This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 181.10

HARVARD COLLEGE

VE RI TAS

SCIENCE CENTER
LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.
AND HIS WIDOW
ELIZA FARRAR
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

Das

GEBÄUDE DES WISSENS.

Von

Robert Grassmann.

Dreiundzwanzigster Band.

Die Formenlehre oder Mathematik

in strenger Formelentwicklung.

Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Die

Formenlehre oder Mathematik

in strenger Formelentwicklung.

Von

Robert Grassmann.

Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Math 181.10

HARVARD COLLEGE
JU[illegible]
LIBRARY.

Farrar fund.

Vorwort.

Die Formenlehre oder Mathematik ſoll in dieſem Werke streng wissenschaftlich mit Ausschluss jedes Trugschlusses dargestellt werden. Sie wird alle vier Zweige der reinen Mathematik: Zahlenlehre oder Arithmetik, Folgelehre oder Funktionenlehre, Ausdehnungslehre und Erweiterungslehre umfassen; dagegen werden die Anwendungen auf die Raumlehre und auf die Mechanik aus dieſem Bande ausgeschlossen.

Gegenwärtig entbehren noch fast alle Darstellungen der Mathematik der streng wissenschaftlichen Form, obwohl dieſe die leichteste und elementarste und zugleich die kürzeste und klarste Form der Entwicklung ist. Fast alle Lehrbücher der Mathematik, bez. ihrer Zweige, namentlich der Zahlenlehre und Funktionenlehre stellen noch Sätze auf, deren Anwendung zu den schlimmsten Trugschlüssen führt, und das traurige Ergebnis hat, dass man durch streng wissenschaftliche Anwendung dieſer Sätze bez. Formeln die grösten Widersprüche, ja jeden beliebigen Unſinn beweiſen kann.

Der Verfasser will hier nicht die Beweiſe für dieſe Behauptung führen; er hat dieſe Beweiſe im Vorworte zu den einzelnen Zweigen, bez. auserdem noch an den betreffenden Stellen des Textes in den Anmerkungen geführt und erlaubt sich hier darauf zu verweiſen. Die geehrten Leſer werden namentlich in dem Vorworte zur Zahlenlehre einen grosen Teil dieſer Beweiſe, ſowie die ſie interessirenden Mitteilungen finden über die Form der Darstellung und über die Art, wie ſich das Buch mit Leichtigkeit leſen und benutzen lässt.

Indem ſich der Verfasser demnach auf die Vorworte zu den einzelnen Zweigen, namentlich zur Zahlenlehre bezieht, bittet er die geehrten Mathematiker, dies Werk einer Prüfung und geneigten Beurteilung zu unterziehen. Namentlich empfiehlt er dies Werk den Herren Lehrern, ſie werden darin die leichtesten Methoden finden, welche trotz der Strenge der Form zu den schnellsten und zugleich ſichersten Fortschritten ihrer Schüler führen müssen.

Der Verfasser.

Die

Zahlenlehre oder Arithmetik

streng wissenschaftlich in strenger Formel-Entwicklung.

Von

Robert Grassmann.

Stettin 1891.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Vorwort.

Die vorliegende Darstellung der Zahlenlehre oder Arithmetik macht den Anspruch, die erste streng wissenschaftliche und zugleich ganz elementare Darstellung der Zahlenlehre zu ſein. Sehen wir von den Arbeiten der Gebrüder Grassmann in Stettin und des Professors Schroeder in Karlsruhe (H. Grassmann Arithmetik Stettin 1860, Berlin 1861, R. Grassmann Zahlenlehre Stettin 1872, E. Schroeder Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Leipzig 1872) ab, ſo bieten ſämmtliche andere Darstellungen der Zahlenlehre in ihren grundlegenden Abschnitten bei ihren ſogenannten Beweiſen die bedenklichsten Zirkelschlüsse und Trugschlüsse, welche nichts beweiſen und nur geeignet ſind, die Leſer an unwissenschaftliches Denken zu gewöhnen und ſie zu verwirren.

Es mag dieſe Behauptung vielen Leſern übertrieben und anmasend erscheinen; aber ſie ist durchaus wahr und darf im Interesse der Wissenschaft nicht verschwiegen werden. Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre, auch die zuletzt erschienenen gründen (und dies ist ein Fehler, der zuerst gerügt werden muss, da er bereits die Möglichkeit strenger Wissenschaftlichkeit ausschliest) ihre Beweiſe auf logische Schlüsse, obwohl ihre Schüler noch gar keine Logik studirt haben, und obwohl es bis in die neueste Zeit noch gar keine wissenschaftliche Darstellung der Logik gegeben hat. Und dieſe Darstellungen thun dies, obwohl die strenge Mathematik gar keine Anwendung der logischen Schlüsse bedarf, ſondern ohne jede Logik allein auf die Sätze der einwertigen Grösen, ihrer Gleichheit und Ungleichheit gegründet werden kann und muss, wie ja auch die Kinder viel früher die Rechnungen mit Zahlen als die Geſetze der Logik kennen lernen.

In jeder streng wissenschaftlichen Darstellung der Zahlenlehre darf jede Zahl nur auf eine Weiſe erklärt werden und zwar fortschreitend jede folgende als die Summe der vorhergehenden plus eins (z. B. $8 = 7 + 1$) und muss erst bewieſen werden, dass jede andere Art, wie dieſelbe entstehen kann (z. B. $8 = 5 + 3$, $8 = 4 \times 2$ u. ſ. w.) der obigen Zahl gleich ist. In jeder streng wissenschaftlichen Darstellung der Zahlenlehre muss ferner festgestellt werden, dass jede folgende Zahl mit allen vorhergehenden Zahlen ungleich ſein muss, wenn man nicht in die gröbsten Trugschlüsse verfallen will.* Wenn aber jede Zahl mit allen vorhergehenden und allen folgenden Zahlen ungleich ſein und nur einen Wert haben ſoll, ſo muss auch für jede Zahl ein eigener einwertiger Name und ein eigenes einwertiges Zeichen eingeführt und muss dies in der wissenschaftlichen Darstellung der Zahlenlehre unzweifelhaft nachgewieſen werden.

Alle Beweiſe in der Zahlenlehre können wissenschaftlich nur in fortschreitender Form geführt werden. Da alle Erklärungen der Zahlen fortschreitende ſind, und jede Zahl fortschreitend aus der vorhergehenden Zahl **a** plus Eins erklärt ist, ſo muss auch jeder Satz, der für alle Zahlen gelten ſoll, auch ſo bewieſen werden, dass man beweiſt, wenn er für **a** gilt, ſo gilt er auch für $\mathbf{a} + \mathbf{1}$ und ſo fortschreitend für alle folgenden Zahlen.

Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre ersparen ſich aber die Mühe des fortschreitenden Beweiſes und wollen denſelben durch einige nichtsſagende und nichtsbeweiſende Phraſen erſetzen.

Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre enthalten aber auch weitere grose Fehler, lassen die Diviſion durch Null zu, rechnen mit mehrwertigen Grösen wie $\sqrt{a^2}$ und lassen es ganz unbeachtet, dass man damit jeden Trugschluss beweiſen kann.**

---

* Anm. Setzen wir z. B. $9 = 1$, ſo ergiebt ſich $8 = 9 - 1 = 1 - 1 = 0$, alſo auch $2 = \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$ und ebenſo $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$, mithin auch $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + 0 = 0$.

** Anm. Lässt man die Diviſion durch Null, oder die mehrwertige Gröse $\sqrt{a^2}$ zu, ſo ergeben ſich aus den Geſetzen der Zahlenlehre die gefährlichsten Trugschlüsse und verliert die ganze Zahlenlehre jeden wissenschaftlichen Wert, wie dies die folgenden kurzen Beispiele beweiſen.

1) Es ist unzweifelhaft $(a - b)c = (a - b)c$ oder $ac - ac = bc - bc$, alſo $a(c - c) = b(c - c)$. Dividiren wir nun durch $c - c$ und heben $\frac{c - c}{c - c}$, ſo ergiebt ſich $a = b$, d. h. jede Zahl jeder andern gleich.

Beim Gebrauche der Klammern musste eine wefentliche Aenderung vorgenommen werden, wenn man nicht eine höchst lästige Zahl von Klammern haben wollte.

Bekanntlich kann man beim fortschreitenden Knüpfen derfelben Art die Klammern weglassen. So ist $a+b+c+d+e=(((a+b)+c)+d)+e$, ebenfo $abcde=(((ab)c)d)e$, und auch $a^{b^{c^d}}=((a^b)^c)^d$. Dagegen wenn verschiedene Knüpfungen vorkommen, fo bezieht fich die höhere nur auf die unmittelbar vorhergehende Gröse, fo ist $a+bc=a+(bc)$, aber nicht gleich $(a+b)c$, fo ist $ab^c=a(b^c)$, aber nicht gleich $(ab)^c$. Für die Funktionszeichen log, sin, cos, tan, cot, f_0 u. f. w. gilt nun aber ein ganz anderes Gefetz; diefe Zeichen müssen auf alle folgenden Grösen desfelben Gliedes bezogen werden, wenn man nicht eine höchst lästige Zahl von Klammern haben, oder durch Ersparung von Klammern Unklarheiten bereiten will. So ist $\sin abc=\sin(abc)$, fo $\sin\frac{x}{y}=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$, fo $f_0 a\sin x=f_0(a\sin x)$, fo $\sin x^2=\sin(x^2)$, dagegen $\sin^2 x=\sin\sin x=\sin(\sin x)$ und $(\sin x)\sin x=(\sin x)^2$. Diefe Regel erspart namentlich für die Funktionenlehre zahlreiche Klammern und macht die Sache viel einfacher.

Es könnte nach dem Gefagten Manchem fo scheinen, als müsse der Fortschritt in der Zahlenlehre ein fehr langfamer und weitläuftiger werden, dem ist aber nicht fo. Vermeidet man alle unnützen Beweife, und beweift man nicht vielmal, was man mit einem Male beweifen kann, fo wird der Fortschritt in der Zahlenlehre ein überraschend schneller. Die vorliegende Darstellung bietet auf nur 242 Seiten trotz vielfacher erläuternder Bemerkungen und aller strengen Beweife die ganze niedere und höhere Zahlenlehre, nebst allen Sätzen über imaginäre und komplexe Grösen, über Winkelfunktionen und höhere Gleichungen in 596 Sätzen.

Der Verfasser glaubt daher dies Buch allen empfehlen zu können, welche eine strenge Wissenschaft mit Vermeidung aller Trugschlüsse

---

2) Setzen wir $\sqrt{a^2}=\sqrt{a^2}$, fo folgt, da $\sqrt{a^2}$ zwei Werte hat, nämlich $+a$ und $-a$, unmittelbar $+a=\sqrt{a^2}=-a$, alfo $a+a=a+\sqrt{a^2}=a-a=0$, jede Gröse der Zahlenlehre gleich Null.

Man wird nun fagen, ja folche Anfätze muss man nicht machen. Darauf antworte ich, man darf nicht folche unrichtigen Gefetze aufstellen, aus denen fich bei richtiger Anwendung folche Trugschlüsse ergeben; das ist schlechthin unwissenschaftlich und muss auf das schärfste gerügt werden.

wünschen. Namentlich erlaubt er sich aber dies Buch allen Lehrern dringend zu empfehlen.

Der vom Verfasser in ſeiner Darstellung eingeschlagene Weg ist nämlich ganz genau derſelbe, den jeder Lehrer beim Rechenunterrichte einschlägt und einschlagen muss. Jeder von uns hat einst auf dieſem Wege zählen und rechnen gelernt. Jede Zahl wird auch vom Kinde fortschreitend gebildet, indem von der gewonnenen Zahl zu der um Eins grösern Zahl fortgeschritten wird. Ebenſo wird beim Zufügen oder Addiren erst $2 = 1 + 1$ zugefügt, dann, wenn dies spielend vor ſich geht, $2 + 1 = 3$ zugefügt, dann $3 + 1 = 4$ und ſo fort. Ebenſo beim Vervielfachen oder Multipliziren wird für jede Zahl z. B. 8 erst

$$1 \text{ mal } 8 + 1 \text{ mal } 8 = 2 \times 8,$$

dann $(2 + 1)$ mal $8 = 2$ mal $8 + 1$ mal $8 = 3 \times 8$ u. ſ. w. stets fortschreitend gebildet, ganz wie dies in der vorliegenden Darstellung geschehen ist. Es ist ja auch unmöglich in andrer Weiſe rechnen zu lernen. Die Lehrer finden alſo in dieſer Darstellung die wissenschaftliche Begründung ihres Rechenunterrichtes. Die Darstellung des Verfassers ist hiernach ebenſo ganz elementar wie ſie streng wissenschaftlich ist.

Die Darstellung in reiner Formelentwicklung wird aber für viele Leſer abschreckend und ermüdend ſein. Auch dem Verfasser ist dieſe Form, zumal, wie ſie in den meisten mathematischen Werken angewandt wird, wenig ſympathisch. Er hat daher hier neue Wege einschlagen zu müssen geglaubt, und bittet die geehrten Leſer dieſen neuen Wegen ihre Aufmerkſamkeit zuzuwenden.

Der Verfasser wird die Zahlenlehre in zwei Formen darstellen, die eine in strenger Formelentwicklung, die andere in freier Gedankenentwicklung.

Die Zahlenlehre in strenger Formelentwicklung ist die streng wissenschaftliche, den Denkoperationen entsprechende Form. In den mathematischen Werken, welche in Formelentwicklung vorschreiten, verlangen die Verfasser aber meist, dass der Leſer alles leſe, jeden Beweis mitmache, kurz, das Buch ausführlich studire; dadurch ermüden ſie den geübten Fachgenossen, langweilen ihn, und müssen doch, um nicht die vorgeschrittenen Kräfte zu ſehr zu ermüden, für die Anfänger oft zu schwierig und unverständlich werden. Dies ist ein Uebel, welches ſich ſehr leicht vermeiden lässt, wenn man verschiedene Schriftarten für den Text der Sätze, für die Beweiſe und für die ſonstigen Bemerkungen anwendet und neben der Zahlenlehre ein ge-

ſondertes Formelbuch und ein Uebungsbuch auflegt. So ist die Sache vom Verfasser geordnet.

Der Text der Sätze ist in halbfetter Borgis-Schrift gedruckt, ſo dass er hervortritt und man die Sätze leſen kann, ohne die Beweiſe durchzugehen. Es kann dann ein Jeder ganz nach Wunsch das ausſuchen, was ihm beſonders anregend oder wichtig erscheint.

Der Beweis der Sätze ist in gewöhnlicher Borgis-Schrift gedruckt. Jeder kann alſo leicht die Beweiſe durchnehmen, welche ihm beſonders wichtig erscheinen; ebenſo leicht kann er aber auch wieder Beweiſe überschlagen. Jeder Beweis aber ist Schritt für Schritt, ohne jeden Sprung geführt; für jede Formeländerung ist in derſelben Zeile hinten der Satz in Klammern beigefügt, nach welchem dieſe Aenderung gestattet ist. Hat der Leſer das Formelbuch neben ſich liegen, ſo findet er in demſelben unmittelbar die Formel oder den Satz, der hier angeführt ist.

Das Formelbuch giebt unter der fortlaufenden Nummer der Sätze für jeden Satz die Formel an, welche in dem Satze bewieſen ist. Dies Formelbuch ſoll beim Gebrauche neben der Zahlenlehre liegen und mit gröster Leichtigkeit eingeſehen werden können. Der gewiegte Fachmann überblickt darnach leicht den Gang des Werkes und findet mit einem Blicke das, worauf es ihm ankommt. Die Beweiſe leſen ſich darnach leicht, wie ein gewöhnliches Buch. Der Anfänger aber kann darnach leicht die Sätze wiederholen und prägt ſich die Formeln leicht bis zur grösten Sicherheit ein. Dies aber ist bekanntlich die erste Bedingung für jeden weitern Fortschritt. Das Formelbuch wird daher jedem eine willkommene Gabe ſein.

Die Bemerkungen ſind in kleiner Schrift (in Petitschrift) gedruckt. Der wissenschaftlichen Darstellung jedes Abschnittes ist eine Einleitung vorausgeschickt, welche den Leſer vorbereiten und mit der Idee und dem Gange des Zweiges vertraut machen ſoll, welche daher nicht zur streng wissenschaftlichen Darstellung gehört. Bei den einzelnen Sätzen ſind, wo es erforderlich schien, Bemerkungen über den Erfinder des Satzes, über die Anſichten anderer Fachmänner, die Beurteilungen anderer Darstellungen, die Beispiele und die Anleitung zu den Uebungen, um die Anwendung der Sätze zu erleichtern, zugefügt und gehören gleichfalls nicht zur strengen Darstellung.

Das Uebungsheft endlich bildet für jeden einzelnen Zweig die Uebungen, welche für den Lernenden notwendig ſind, um den Stoff zu beherrschen und die Sätze mit Leichtigkeit anwenden zu können.

Die Zahlenlehre in freier Gedankenentwicklung ist die freiere, kritische, die Denkoperationen betrachtende Form. Es kann ſich dieſe letzte Form der Entwicklung freier bewegen; ſie kann die verschiedenen möglich erscheinenden Wege unterſuchen, die Ideen, welche der Entwicklung zu Grunde liegen, beleuchten und dadurch den Leſer mehr anregen, auch ſeinerſeits Verſuche in Formelentwicklung und Beweiſen nach verschiedenen Richtungen hin zu machen. Es wird dieſe Art der Darstellung daher eine wünschenswerte Ergänzung zu der ersten Art der Darstellung gewähren. Auch bei der Darstellung in freier Gedankenentwicklung werden ebenſo wie bei der Darstellung in strenger Formelentwicklung nur einwertige Grösen durch einwertige Knüpfungen und ebenſo die Zeichen derſelben, die Buchstaben durch einwertige Knüpfungszeichen zu Formeln verbunden, aber der Unterschied besteht darin, dass bei der Darstellung in freier Gedankenentwicklung die Entwicklung durch Betrachtungen geführt wird, in welcher Weiſe man zu einer strengen Formel gelangen und wie man dieſelbe umgestalten kann, und wie man dadurch zu den Sätzen des Formelbuches gelangt. Der Vorteil dieſer Darstellung ist hier, dass man ſich stets Rechenschaft giebt, welche Wege man einschlagen ſoll und dass man kritisch den eingeschlagenen Weg beleuchtet, ſowie dass ſich hieran dann eine Anleitung schliest, wie man ſich durch Uebungen im Uebungshefte die nötige Gewandtheit in der Umwandlung der Formeln und in der Anwendung derſelben auf das äusere Leben erwerben kann.

Beide Arten der Darstellung ergänzen alſo einander und werden ihre Verehrer finden. Wer die Darstellung in strenger Formelentwicklung studirt hat, wird durch die Darstellung in freier Gedankenentwicklung einen freiern und umfassendern Blick gewinnen. Wer die Darstellung in freier Gedankenentwicklung studirt hat, wird durch die Einſicht in die strengen Beweiſe der strengen Formelentwicklung grösere Sicherheit gewinnen und auftauchende Bedenken leicht überwinden.

Die Kunstsprache ist gegenwärtig in allen mathematischen Werken eine ſehr wenig brauchbare. Man bezeichnet jetzt mit demſelben Kunstausdrucke die verschiedensten, nach ganz abweichenden Geſetzen vorzunehmenden Verknüpfungen und wird dadurch unklar und verworren, ohne die Allgemeinheit erreichen zu können, welche doch notwendig ist. Irrtümer und Verwechſlungen ſind daher ganz unvermeidlich. So z. B. wird das Wort die Multiplikation für die verschiedensten Knüpfungen gebraucht

für a(bc), wo a(bc) = abc und wo a(bc) $\gtrless$ abc,
für ab, wo ab = ba und wo ab $\gtrless$ ba,
für ab, wo aa = 0 und wo aa $\gtrless$ 0 u. f. w.

Und fo in vielen andern Fällen. Dasfelbe Wort bezeichnet bald eine Knüpfung in der Zahlenlehre, bald in der Ausdehnungslehre, bald in der Logik und bald in der Bindelehre, obwohl für diefe Knüpfung in jedem der Zweige ganz verschiedene Gefetze gelten. Dies ist unwissenschaftlich und muss vermieden werden. Die neuen deutschen Kunstausdrücke gewähren hierfür ein gutes Mittel.

Als Kunstsprache werden daher in der Zahlenlehre neue, eindeutig erklärte Kunstausdrücke in rein deutscher Sprache eingeführt; alle mehrdeutigen Fremdwörter find entfernt und durch rein deutsche Wörter erfetzt, die gewohnten Kunstausdrücke aber find in Klammer beigefügt, damit auch denen Rechnung getragen werde, welche an diefe Ausdrücke gewöhnt find.

Nach dem Vorbilde des berühmten Mathematikers S. F. Lacroix giebt der Verfasser noch einen Ueberblick über die griechischen Buchstaben. Es werden diefelben mehrfach in der Zahlenlehre angewandt; um nun auch denen verständlich zu bleiben, welche die griechische Sprache nicht erlernt haben, mögen Zeichen und Namen folgen:

Zeichen.		Name.
Verfal.	Text.	
A	α	Ἀlpha.
B	β	Bêta.
Γ	γ	Gámma.
Δ	δ	Délta.
E	ε	Ἐpfilon.
Z	ζ	Zêta.
H	η	Êta.
Θ	ϑ	Thêta.
I	ι	Ïôta.
K	$\varkappa$	Káppa.
Λ	λ	Lámbda.
M	μ	Mû.
N	ν	Nû.
Ξ	ξ	Xî.

Zeichen. Verſal.	Text.	Name.
O	o	Ómīkrón.
Π	π	Pì.
P	ϱ	Rhô.
Σ	σ, ς	Sígma.
T	τ	Taû.
Y	υ	Ùpſīlón.
Φ	φ	Phî.
X	χ	Chî.
Ψ	ψ	Pſî.
Ω	ω	Ômége.

Zum Schlusse möge noch ein kurzer Ueberblick über die Geschichte der Zahlenlehre folgen.

Die niedere Zahlenlehre ist eine ſehr alte Wissenschaft. Schon 2000 Jahre vor Chr. bildete das Rechnen in Egypten einen Zweig des Volksunterrichtes. Die erste wissenschaftliche Ausbildung erhielt die Zahlenlehre durch die Griechen, namentlich durch Eukleídēs, (geb. 308 vor Chr.), durch Archimédēs (287 bis 212 vor Chr.) und durch Dióphantos (im vierten Jahrhundert nach Chr.). Eine weitere Ausbildung gewann die Zahlenlehre um 500 bis 650 nach Chr. in Indien; hier ward das zehnteilige Zahlenſystem mit den zehn Ziffern, namentlich auch mit der Null eingeführt. Die Araber erfanden im Mittelalter die Zehntbrüche oder Dezimalbrüche, ſowie die ersten trigonometrischen Funktionen. Von ihnen ist die Zahlenlehre um 1000 nach Chr. zuerst in Spanien eingeführt und später erst in den andern Ländern Europas bekannt geworden.

Die höhere Zahlenlehre gehört erst der neuen Zeit an. Erst um 1585 ist das Höhen oder Potenziren und erst 1614 ſind die Logarithmen erfunden.

Die beiden höchsten Zweige der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre oder die Lehre von den komplexen Grösen und die erweiternde Zahlenlehre oder die Lehre von den höhern Gleichungen haben erst in dieſem Jahrhundert ihre Ausbildung erhalten.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

	Nummer.	Seite.
1. Die Erklärung und die Beweisform der Grösenlehre	1	1
2. Die drei Arten der Grösenknüpfung	25	15
3. Die beiden Gattungen der Knüpfung und der Zerlegung	39	24
4. Die Beziehung zweier Knüpfungen	69	34

Erster Abschnitt der Zahlenlehre: Die niedere Zahlenlehre oder die Rechnungen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen.

5. Das Zählen oder die Bildung der Zahlen	114	51
6. Das Zufügen und Abziehen, Strichzahl und benannte Zahl	120	56
7. Das Vervielfachen und Teilen, Bruch, Eigenschaften der Zahlen und Brüche	155	66
8. Das Rechnen mit benannten Zahlen oder die Rechnungen des gewöhnlichen Lebens	259	109
A. Abgekürztes Rechnen	259	109
B. Rechnen mit benannten Zahlen	263	112
C. Proportion und Regeldetri	285	116
D. Gleichungen ersten Grades	302	121

Zweiter Abschnitt der Zahlenlehre: Die höhere Zahlenlehre oder Höhen, Tiefen, Loge oder Logarithmen.

9. Höhen, Tiefen und Loge der Zahlen	315	127
A. Höhen oder Potenziren	315	127
B. Tiefen oder Radiziren	341	138
C. Logen oder Logarithmiren	350	141
D. Eigenschaften von Höhen, Tiefen und Logen	377	150

	Nummer.	Seite.
10. Höhen von Summen und Summen von Höhen	387	154
A. Höhen und Loge von Summen	387	154
B. Zahlenreihen (arithmetische Reihen) und Stufenreihen (geometrische Reihen), Zins- und Rentenrechnung	398	161
C. Höhenreihen oder Potenzreihen	413	165
D. Reihenzahlen oder Systemzahlen (dekadische)	421	167

Dritter Abschnitt der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre oder Richtgrösen, Winkelfolgen und Winkeltafeln.

11. Die Richtgröse, die Winkelfolge und die Winkeltafeln	423	169
1. Die Richtgröse oder komplexe Gröse	423	169
2. Der Winkel, Sinus und Cosinus	435	174
3. Die Tangente, Cotangente und die Winkeltafeln	466	185
4. Der Bogen oder Arcus	490	193
12. Die Richtgrösen in Bafe, Stufe, Log und Winkel	498	196
1. Die Richtgröse in der Bafe	498	196
2. Die Richtgröse in der Stufe (im Exponenten)	510	200
3. Die Richtgröse im Loge (im Logarithmus)	532	206
4. Die Richtgröse im Winkel	546	210

Vierter Abschnitt der Zahlenlehre: Die erweiternde Zahlenlehre oder die Lehre von den Gleichungen.

13. Die allgemeinen Sätze über die Gleichungen	556	216
14. Die Gleichungen zweiten Grades	575	222
15. Die Gleichungen dritten Grades	585	226
16. Die Gleichungen vierten Grades	586	230
17. Die Gleichungen höhern Grades und ihre Löfung durch Näherung	587	232

Einleitung in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

1. Die Erklärungen und die Beweisform der Grösenlehre.

Das Erste, womit wir die Zahlenlehre beginnen müssen, wenn wir keine andre Lehre vorausſetzen wollen, ſind die allgemeinen Erklärungen und Sätze, welche ein streng wissenschaſtliches Denken überhaupt erst möglich machen und welche uns lehren, wie man streng wissenschaſtlich beweiſen und fortschreiten kann, ohne die Logik und ihre Geſetze zu bedürfen.

Dieſe Erklärungen und Sätze gehören aber der Grösenlehre an. Wir müssen alſo auch die Zahlenlehre mit den ersten Sätzen der Grösenlehre beginnen.

a. Die Erklärungen der Grösenlehre.

Erklärung. Die Denklehre ist die Wissenschaft von der Knüpfung der Grösen. Der allgemeine Zweig derſelben heist die Grösenlehre. 1.

Erklärung. Eine Gröse heist jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, ſofern es nur einen und nicht mehre Werte hat. 2.

Alle Werke über Mathematik beginnen mit der Erklärung der Gröse; aber in keinem mir bekannten Werke ist die schlechthin notwendige Bestimmung getroffen, dass jede Gröse nur einen und nicht mehre Werte haben darf. Ohne dieſe Festſetzung bleibt aber das ganze Gebäude unwissenschaſtlich. Denken wir uns, eine Gröse habe auch nur zwei Werte, welche einander ungleich ſind, ſo gilt für ſie kein Satz der Mathematik oder überhaupt des strengen Denkens: denn dann kann man nicht einmal die Gröse ſich ſelbst gleich ſetzen, ohne dass man zu Trugschlüssen gelangt.

In neuester Zeit hat nun der Professor Paul Du Bois-Reymond „Die all„gemeine Funktionentheorie. Erster Teil: Metaphysik und Theorie der mathe„matischen Grundbegriffe: Gröse, Grenze, Argument und Funktion“, Tübingen 1882, eine neue Erklärung von Gröse aufgestellt, welche von der obigen Erklärung weſentlich abweicht. Er ſagt a. a. O. S. 14 Folgendes: „Unter mathematischer Gröse (quantum, quantitas, quantité) versteht man gewöhnlich eine gemeinſame Eigenschaft verschiedenartiger Dinge, in Bezug auf welche ſie numerisch vergleichbar ſind, wie deren Länge oder Gewicht. Doch keineswegs

alle Vorstellungsreihen, mit welchen ſich mathematisch operiren lässt, fallen unter dieſe Definition. Allgemeiner ist unter mathematischer Gröse der Inbegriff einer Folge von Vorstellungen zu verstehen, von der mindestens ausgeſagt werden kann, 1. dass jede Einzelvorstellung in jener Folge ihren genügend bestimmten Platz beſitzt, 2. dass zwischen den Grösen der Folge, oder zwischen ihnen und den Grösen anderer ebenfalls festgeordneter Folgen Beziehungen stattfinden, welche zu neuen Beziehungen combinirt werden können."

Aber dieſe Erklärung ist unbrauchbar und fehlerhaft. Dieſelbe ist zunächst unklar und nebelnd und zeigt, dass der Verfasser ſelbst nicht weiss, was Gröse ist, dass vielmehr in ſeinem Kopfe die verschiedensten Vorstellungen von Gröse durch einander laufen. Die Gröse ſoll nach ihm zunächst eine Eigenschaft, und zwar „eine gemeinſame Eigenschaft verschiedener Dinge", ſie ſoll dann wieder eine Reihe und zwar „eine Vorstellungsreihe" ſein, ſie ſoll drittens „ein Inbegriff von Vorstellungen" ſein. Der Herr D. B. giebt alſo drei von einander abweichende Erklärungen statt einer. Der allein notwendige Teil der Erklärung, dass jede Gröse nur einen und nicht mehre Werte haben darf, fehlt dagegen. Hätte er dieſen aufgestellt, ſo würde er die groben Fehler ſeiner Erklärung ſelbst erkannt haben.

Nicht minder bedenklich ist, was derſelbe Verfasser in demſelben Werke über die mathematische Gröse ſagt. Er behauptet zunächst a. a. O. S. 23, die mathematischen Grösen ſeien lineär, d. h. ſie ſeien auf Längen zurückführbar, ihre Unterschiede, Teile und Vielfachen ſeien wie bei den Längen wieder Grösen derſelben Art, wie Längen messbar und in der Richtung des Kleinsten und Längsten ausgedehnt. Auch die Zahl entstehe durch das Messen der Länge durch ein bestimmtes Mas, die Einheit genannt. Gleich ſeien, ſagt er S. 44, zwei lineäre mathematische Grösen, wenn ihre ſinnlichen Erscheinungen unter denſelben Bedingungen denſelben Eindruck hervorbringen. Er verweist alſo die Mathematik ganz auf die ſinnlichen Erscheinungen und ſagt, dieſe Wissenschaft ſei in Wahrheit eine Naturwissenschaft.

Herr Du Bois-Reymond verkennt hiemit gänzlich den rein formellen Charakter der Mathematik. Er verkennt ganz, dass die Mathematik ſich ihre Grösen ſelbst ſetzt ohne jeden Inhalt, und ohne jedes ſinnliche Substrat und dass ſie dieſelben nach rein geistigen Geſetzen verknüpft, ohne dass ſie auf die Erfahrung der Naturwissenschaft zurückzugehen braucht. Im Gegenteile, er ſieht in der Anwendung der Zahlen und des Messens auf die äusern Dinge der Welt und auf die Erscheinungen die eigentliche Quelle aller mathematischen Grösen. „Ein „rein formalistisch-literales Gerippe der Analyſis, worauf die Trennung der Zahl „nebst den analytischen Zeichen von der Gröse hinausliefe", ſagt er a. a. O. „Seite 53, „würde dieſe Wissenschaft, welche in Wahrheit eine Naturwissenschaft „ist, wenn ſie auch nur die allgemeinsten Eigenschaften des Wahrgenommenen „in den Bereich ihrer Forschungen zieht, schlieslich, wie bemerkt, zum blosen „Zeichenspiel hinabwürdigen, wo den Schriftzeichen willkürliche Bedeutungen „beigelegt werden, wie den Schachfiguren und Spielkarten. So ergötzlich ein „ſolches Spiel ſein kann, ja ſo nützlich für analytische Zwecke die Löſung der „Aufgabe ſich erweist, die Regeln zwischen den Zeichen, welche aus der Grösen„vorstellung hervorgingen, nun bis in ihre letzten formalen Konſequenzen zu „verfolgen, ſo würde dennoch dieſe literale Mathematik, wenn ſie von dem

„Boden, auf dem ſie gewachſen, völlig losgelöst würde, bald genug in unfrucht-„baren Trieben ſich erschöpfen, während die von Gauss ſo wahr und tief Grösen-„lehre genannte Wissenschaft in dem natürlichen stets an Umfang zunehmenden „Wahrnehmungsgebiet des Menschen eine unverſiegbare Quelle neuer Forschungs-„gegenstände und erspriesliclıer Anregungen beſitzt. Ohne Frage wird man mit „Hülfe von ſogenannten Axiomen, von Konventionen, ad hoc erdachten Philo-„ſophemen, unfassbaren Erweiterungen ursprünglich deutlicher Begriffe nach-„träglich ein System der Arithmetik konstruiren können, welches dem aus dem „Grösenbegriff hervorgegangenen in allen Punkten gleicht, um ſo die rechnende „Mathematik gleichſam durch einen Kordon von Dogmen und Abwehrdefinitionen „gegen das psychologische Gebiet abzusperren. Auch kann ein ungewöhnlicher „Scharfſinn auf ſolche Konstruktionen verwendet worden ſein. Allein man würde „auf dieſelbe Weiſe auch andre arithmetische Systeme ſich ausdenken können, „wie dies ja geschehen ist. Die gewöhnliche Arithmetik ist eben die einzige „dem linearen Grösenbegriff entsprechende, ist gleichſam ſeine erste Registrirung. „während die Analyſis, mit dem Grenzbegriff an der Spitze, ſeine höchste Ent-„wicklung bildet.“

Herr Du Bois-Reymond ſieht alſo in der reinen Zahlenlehre pp., welche ihre Zahlen und Zahlgrösen ſelbst erzeugt, nur ein bloses Zeichenspiel ähnlich dem Schachspiele, nicht eine Wissenschaft. Er will die ganze Zahlenlehre auf die Begriffe der Länge, des Längenmases, auf Messungsaufgaben und auf die Erfahrung aus der Sinnenwelt gründen und giebt daher die ganze strenge Formenlehre als Wissenschaft auf. Er ruft Seite 127 a. a. O. bei der Einleitung in die Folgelehre, den Analytikern, welche der numerischen Auffassung der Veränderlichen den Vorzug geben, zu: „Es darf nicht vergessen werden, dass die Zahl „nur das Proteron ſein kann. Das Proton ist und bleibt die lineäre mathematische „Gröse. Denn erst das Teilungsbedürfniss, insbeſondre das Geschäft des Messens „konnte die Zahl und ſolgeweiſe deren Bildungsgeſetze erzeugen. Die Messkunst „teilt zunächst die Einheit in gleiche Teile, heischt ſodann die inkommenſurable „Teilung der Einheit, um geometrisch anschauliche Beziehungen arithmetisch „festzulegen, es entsteht der Begriff des Irrationalen und ſeiner Geſetze. Und „die wissenschaftliche Verallgemeinerung und Zuſammenfassung dieſes Vorganges „ergiebt schlieslich den Begriff der Veränderlichen.“

Man ſieht, Herr Du Bois-Reymond erblickt in der Zahlenlehre nur eine Anwendung der Messkunst und zwar nur in der geraden Linie; er überſieht, dass das ganze Messen mit einem Einheitsmase ja ſelbst nur eine Anwendung der Zahlenlehre ist und dieſe mit ihren Geſetzen bereits vorausſetzt. Aber auch die Messkunst, auch die gerade Linie ist ihm nicht das Erste, er will dieſe erst erfahrungsmäsig aus der Erfahrung der Sinnenwelt ableiten, statt ſie geistig durch Bewegung eines Punktes zu erzeugen und kommt nun zu dem Ergebnisse, dass es in der Erfahrung gar keine gerade Linie giebt, ſofern man mit hinlänglicher Vergröserung die Linie prüft; er hebt mithin überhaupt die Wissenschaft auf. In der Tat, Schwächeres kann man auf dieſem Gebiete kaum leisten. Wir schätzen Herrn Du Bois-Reymond auf dem Gebiete der höhern Funktionenlehre, wo er ſehr Tüchtiges geleistet hat. Aber in den elementaren Zweigen, in Begründung der Wissenschaft, im Auffinden streng wissenschaftlicher Formen und Beweiſe hat er ſich nicht bewährt, dies ist nicht das Gebiet ſeiner bedeutenden Leistungen.

3. **Erklärung. Der Buchstabe ist das Zeichen der Gröse. Derfelbe Buchstabe bezeichnet in demfelben Satze der Grösenlehre stets eine und diefelbe Gröse und hat alfo nur einen Wert. Im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen.**

Jeder Satz, welcher für einen Buchstaben bewiefen ist, gilt mithin für alle Grösen, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse. Soll ein Buchstabe nur eine bestimmte Art von Grösen bezeichnen, fo muss dies in dem Satze ausdrücklich gefagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Grösen dadurch bezeichnet werden follen, fonst würde der Satz für alle beliebigen Grösen gelten.

Wenn eine Reihe von Grösen (z. B. von n Grösen) gegeben ist, fo bezeichnet man die Grösen der Reihe gerne durch denfelben Buchstaben mit darunter gefetztem Zeiger, z. B.

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots\cdots a_{n-1}, a_n.$$

Dann bezeichnet a_1 die erste, a_n die letzte Gröse der Reihe, a_a eine beliebige, a_{a+1} die nächstfolgende Gröse der Reihe.

Der Buchstabe ist als allgemeines Zeichen der einwertigen Gröse bereits von Aristotélēs 384 bis 322 vor Chr. in die Wissenschaft eingeführt worden und muss beibehalten werden. Er ist einerfeits einwertig (einem andern Buchstaben entweder gleich oder ungleich) und ist andrerfeits ganz allgemein, nicht an bestimmte Begriffe gebunden, und kann alfo jedes bezeichnen, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann.

4. **Erklärung. Ein Einfaches (ein elementum) heist eine Gröse, wenn fie geknüpft werden foll, ohne dass fie felbst durch eine Knüpfung von Grösen entstanden ist und welche alfo ursprünglich gefetzt ist.**

In der Grösenlehre find die Zeichen e_1, $e_2 \cdots$ die Zeichen der Einfachen (der Elemente), die Buchstaben (a, b, c...) die Zeichen beliebiger Grösen.

Das Einfache, das Element, kann alfo Jedes fein, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann. Gleichgültig ist dabei, ob es vorher verknüpft gewefen, oder auch durch Verknüpfung entstanden ist, wenn es nur in dem Denkakte, um den es fich handelt, als Einfaches gefetzt wird, d. h. noch nicht verknüpft ist. Es kann mithin auch jede beliebige Gröse als Einfaches gefetzt werden. Jede durch Knüpfung der Einfachen erzeugte Gröse ist im Gegenfatze dazu zufammengefetzt.

5. **Erklärung. Die Knüpfung (die nexio) von Grösen heist jede Zufammenstellung oder Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, fofern das Ergebniss nur einen und nicht mehre Werte hat.**

Das Ergebniss oder das Gefammt der Knüpfung heist das, was durch die Knüpfung zweier Grösen entsteht. Das Ergebniss ist, da

es nur einen Wert hat und Gegenstand des Denkens ist, wieder eine Gröse und kann von neuem geknüpft werden. Das Zeichen für das Gesammt ist Ge.

Jede Grösenknüpfung findet nur zwischen zwei Grösen statt, deren Reihenfolge nicht geändert wird; denn nur diese Knüpfung hat einen und nicht mehre Werte. Sollen mehre Grösen geknüpft werden, so muss genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche zwei Grösen zuerst geknüpft werden sollen, und mit welcher weiteren Gröse demnächst jedesmal das Ergebniss der Knüpfung geknüpft werden soll.

Die Knüpfung kann also jede beliebige Verbindung von Grösen im Denken bezeichnen. Beispiele derselben sind die Verbindungen der Begriffe im Gedanken, der Gedanken in einem Werke. Beispiele sind ferner Addition, Multiplikation, Zeichnungen aller Art, Inhaltsverzeichnisse, Lexika, kurz jedes, was der Mensch im Denken verbinden kann, sofern das Ergebniss nur einen und nicht mehre Werte hat.

Wie notwendig die letzte Bestimmung sei, das macht uns ein Beispiel aus der Raumlehre anschaulich. Denken wir uns, es solle mit der Strecke AB, deren Länge und Lage bestimmt sei, eine zweite Strecke BC von gegebener Länge geknüpft werden. Wenn hier die Richtung dieser zweiten Strecke beliebig sein kann, so hat $AB \circ BC$ unzählig viele Werte; schlagen wir nämlich mit BC um B einen Kreis, so ist jede von A nach dem Umfange des Kreises gezogene Strecke z. B. AC′ und AC″ gleich $AB \circ BC$, also der Wert von $AB \circ BC$ ganz unbestimmt und kann nicht einmal $AB \circ BC = AB \circ BC$ gesetzt werden. Wenn dagegen der Winkel, den AB und BC mit einander bilden sollen, bestimmt ist, dann giebt es nur eine Strecke AC, welche der Forderung genügt und ist $AB \circ BC = AC$ eine einwertige Gröse.

Erklärung. Das Zeichen der Knüpfung kann jedes beliebige Zeichen werden. Dasselbe Knüpfungszeichen bezeichnet in demselben Satze der Grösenlehre stets eine und dieselbe Knüpfung. Im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen jede beliebige Knüpfung bezeichnen. 6.

Jeder Satz, welcher für ein Knüpfungszeichen bewiesen ist, gilt mithin für alle Knüpfungen, welche das Knüpfungszeichen bezeichnen kann. Soll ein Knüpfungszeichen nur eine bestimmte Art von Knüpfungen bezeichnen, so muss dies bei seiner Einführung ausdrücklich gesagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Knüpfung dadurch bezeichnet werden soll.

Das allgemeine Zeichen der Knüpfung, welches jede beliebige Knüpfung bezeichnen kann, ist der Kreis ∘, welcher zwischen die zu knüpfenden Grösen gesetzt wird (z. B. $a \circ b$, gelesen a geknüpft mit b oder kurz a mit b).

Erklärung. Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die Klammer eingeschlossenen Grösen zuvor zu einem Gesammte geknüpft 7.

werden ſollen, ehe dies mit der Gröse auser der Klammer geknüpft werden ſoll.

In jeder Klammer dürfen nur zwei Grösen stehen, ſind mehre Grösen in derſelben enthalten, ſo müssen alle bis auf eine in eine andre Klammer geschlossen ſein, und müssen dann alle Grösen in dieſer andern Klammer zuvor zu einem Geſammte geknüpft ſein, ehe das Geſammt dieſer Klammer mit der einen auser dieſer Klammer stehenden Gröse geknüpft werden darf.

Sind demnach n Grösen zu knüpfen, ſo ſind in dem Ausdrucke n — 2 Klammern erforderlich, ſofern kein Zweifel über die Reihenfolge der Knüpfung Statt finden ſoll (z. B. bei 5 Grösen ſind drei Klammern erforderlich $(a \circ ([b \circ c] \circ d)) \circ e$.

Ein Beispiel wird uns die Bedeutung der Klammer klar machen. Es ist z. B. $(3+4)\, 5 = 7 \cdot 5 = 35$, denn nach der Regel dieſes Satzes muss man zunächst die beiden Grösen in der Klammer knüpfen, alſo $3+4=7$ und nun dieſe Gröse mit der Gröse auser der Klammer knüpfen, alſo $7 \cdot 5 = 35$. Dagegen ist $3+(4 \cdot 5) = 3+20 = 23$. Man muss demnach die Klammern stets genau beachten. Die Grösenlehre wird die Aufgabe haben, festzustellen, in welchen Fällen eine Klammer ohne Aenderung des Wertes weggelassen werden darf.

Wenn mehre Klammern in einem Ausdrucke vorkommen, ſo muss jede ein andres Zeichen haben, als die andern, damit Verwechſelungen unmöglich ſind. Man wendet demnach folgende Klammern an, zunächst die runde Klammer $(\quad)$, dann die eckige Klammer $[\quad]$, dieſe beiden Arten genügen meist, dann die fassende Klammer $\{\quad\}$, endlich die gebogene Klammer $\begin{matrix}(&)\\ (&)\end{matrix}$. Wenn noch mehr Klammern gebraucht werden, giebt man ihnen unten eine Ziffer und unterscheidet demnach

$$(\quad)_1,\ (\quad)_2,\ (\quad)_3 \cdots\cdots\cdots (\quad)_n.$$

Da viele Klammern den Ueberblick auserordentlich erschweren, ſo ſucht man dieſelben möglichst zu vermeiden. der folgende Satz zeigt uns, wie dies zu erreichen ist.

8. **Erklärung. Fortschreitend knüpfen eine Reihe von Grösen heist in der Reihe zuerst die erste mit der zweiten knüpfen; das Geſammt dieſer Knüpfung mit der dritten knüpfen, und ſofort jedesmal das Geſammt der Knüpfung aller frühern Grösen mit der nächstfolgenden knüpfen.**

Eine Gröse, in welcher nur Einfache (Elemente) fortschreitend geknüpft ſind, heist eine einfache Gröse.

Soweit mehre Grösen durch dieſelbe Knüpfungsart fortschreitend geknüpft werden, können die Klammern fortgelassen werden, da über die Folge der Knüpfung kein Zweifel Statt finden kann. Die Klammern

müssen nur dort stehen, wo von der fortschreitenden Knüpfung abgewichen wird, können aber auch in der fortschreitenden Knüpfung wieder eingeführt werden, z. B. $a + b + c = (a + b) + c$, $a + b + c + d = [(a + b) + c] + d$.

Das Gesammt aus der fortschreitenden Knüpfung der Grösen a_1, a_2, $a_3 \cdots a_n$ bezeichnen wir durch $\underset{1,n}{\mathrm{Ge}}\, a_\alpha$, gelesen Gesammt von 1 bis n von a_α, wo n eine ganze Zahl und wo α alle ganzen Werte von 1 bis n erhält; es ist demnach $\underset{1,n}{\mathrm{Ge}}\, a_\alpha = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 \circ \cdots \circ a_n$.

Es ist von gröster Wichtigkeit, dass jede Klammer, welche irgend entbehrt werden kann, ohne zweideutig zu werden, auch wirklich vermieden werde, und ist daher das Weglassen der Klammern, wenn in derselben Knüpfungsart fortschreitend geknüpft werden soll, ein wichtiger Fortschritt.

Es ist aber wohl zu beachten, dass dies Weglassen bei fortschreitender Knüpfung nicht erlaubt ist, wenn bei verschiedenen Knüpfungsarten fortschreitend geknüpft werden soll. So z. B. ist $(a + b) + c = a + b + c$, so auch ist $(ab)c = abc$, dagegen ist nicht $(a + b)c = a + bc$, sondern letzteres ist $a + bc = a + (bc)$. Ebenso ist $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$, aber nicht $(ab)^c = ab^c$, auch nicht $(a + b)^c = a + b^c$ u. s. w. Wir werden noch wiederholt auf diese Regel aufmerksam machen.

Gegenwärtig wird das Setzen und Weglassen der Klammern in fast allen mathematischen Werken noch sehr mangelhaft betrieben. Man setzt vielfach Klammern, wo sie weggelassen werden können und sollen, und lässt vielfach Klammern fort, wo sie gesetzt werden müssen. Die Darstellung wird dadurch häufig undeutlich, selbst fehlerhaft. Ich werde im Laufe des Werkes, namentlich in der Folgelehre, mehrfach auf diesen Punkt zurückkommen und die Regeln aufstellen, nach denen hier verfahren werden muss. Es können darnach in einzelnen Zweigen 90 bis 99 Hundertel der jetzt gebräuchlichen Klammern entbehrt werden, und wird dadurch ein wesentlicher Fortschritt erreicht.

Erklärung. Formel heist jede Knüpfung von Grösen, die Art der Knüpfung bestimmt die Gestalt der Formel. 9.

Formel von a heist eine Formel, welche die Gröse a enthält. Das Zeichen derselben ist $\mathfrak{F}a$, gelesen „Formel von a". Das Zeichen $\mathfrak{F}a$ bezeichnet in demselben Satze der Grösenlehre eine und dieselbe Formel von a. Im Uebrigen kann sie jede beliebige Formel von a bezeichnen. Soll sie nur eine Art von Formeln bezeichnen, so muss dies ausdrücklich gesagt werden.

Gleichlautend heisen zwei Formeln, wenn sie beide ganz dieselben Knüpfungen ganz derselben Grösen enthalten.

Verschieden heisen zwei Formeln, wenn die Knüpfungen oder die Grösen der Formeln von einander abweichen.

Entsprechend heisen die Formeln zweier Grösen, wenn die

Formeln gleichlautend werden, ſobald man in der zweiten Formel die erste Gröse statt der zweiten einführt.

Beiſpiele:

Gleichlautend ſind: a + b (c + a) und a + b (c + a).

Verschieden ſind: a + b (c + a) und a + bc + ba.

Entsprechend ſind: $a + b (c + a^n)$ und $m + b (c + m^n)$.

Die Mathematiker oder Formenlehrer wenden zur Bezeichnung einer Formel. bez. später einer Folge oder Funktion die Zeichen f, F, φ. ψ an und ſetzen. wenn noch mehre Arten derſelben unterschieden werden, Zeiger an das Zeichen. z. B. $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ oder f′. f″. f‴, $f^{IV} \ldots$ Dieſem Gebrauche muss man ſich anschliesen; da aber die Zeichen f, F, φ. ψ auch häufig zur Bezeichnung von Grösen gebraucht werden, ſo wird der Ausdruck fa bez. f(a) zweideutig und kann ebenſo das Zeug oder Produkt von f und a, als die Formel von a bezeichnen. Eine ſolche Zweideutigkeit ist in streng wissenschaftlichen Werken unzulässig. Viele Mathematiker ſuchen dieſe Zweideutigkeit dadurch zu vermeiden, dass ſie Formel von a als f(a) schreiben; aber dies ist fehlerhaft. Denn einmal hat die Klammer um eine einzelne Gröse keinen Sinn und dann ist f(ab) doch wieder zweideutig und kann ebenſo f mal ab. als Formel von ab bezeichnen. Das einzig Richtige ist, dem Formelzeichen eine etwas andre Form zu geben. ich führe dafür die Zeichen f°, F°, φ°, ψ° ein. welche jede Verwechſelung unmöglich machen.

b. Die Beweisform der Grösenlehre.

Nicht minder wichtig, als die Erklärungen der Grösenlehre ſind, ist auch die Beweisform der Grösenlehre für die Zahlenlehre und für die ganze Mathematik. Da wir in der Zahlenlehre keine andre Wissenschaft. auch nicht einmal die Logik vorausſetzen, ſo dürfen wir auch nicht für die Beweiſe einen logischen Schluss und Beweis anwenden.

Glücklicher Weiſe bedürfen wir aber auch des begrifflichen oder logischen Schlusses gar nicht für unſre Beweiſe der Grösenlehre. In dem begrifflichen Schlusse wird nämlich nur von einem Begriffe, der weiter ist, auf einen Begriff geschlossen, der ihm untergeordnet oder enger ist. Bei den Beweiſen der Grösenlehre dagegen haben wir es nicht mit untergeordneten, ſondern allein mit gleichen und ungleichen Grösen zu tun. Der begriffliche oder logische Schluss findet alſo in der Grösenlehre gar keine Anwendung. Daſelbe ergiebt ſich auch daraus, dass alle Beweiſe der Grösenlehre in Formeln geführt werden können und müssen und dass die Ueberſetzung der Beweiſe in die Sprache nur eine Uebertragung ist in das Gebiet des gewöhnlichen Denkens. welches der Grösenlehre und strengen Denklehre an ſich fremd ist.

Die Beweiſe in der Grösenlehre werden nun ſo geführt. dass eine Formel einer andern gleichgeſetzt wird. dieſe einer dritten und ſo fort. Dies führt uns zu den Sätzen von der Gleichheit.

Bei den Sätzen von der Gleichung der Grösen geht die Entwicklung von der Erklärung aus. dass zwei Grösen nur dann gleich genannt werden. wenn man in jeder Knüpfung der Grösenlehre die eine statt der andern ohne Aendrung des Wertes ſetzen kann. Bewieſen wird. dass. wenn in einer Reihe von Grösen

jede vorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, auch die erste jeder folgenden gleich ist, indem dann die erste der zweiten gleich ist, statt der zweiten aber die gleiche dritte, statt dieſer die gleiche nächstfolgende und ſofort jede folgende geſetzt werden kann, ſo dass die erste jeder folgenden gleich ist. Es ist dies das erste Geſetz der Gleichheit oder der Satz des geraden oder direkten Grösenbeweiſes.

Bewieſen wird ferner, dass, wenn in einer Reihe von Grösen eine Gleichung für die erste Gröse der Reihe gilt und wenn ſie auserdem, ſobald ſie für eine beliebige Gröse der Reihe gilt, auch für die nächstfolgende Gröse der Reihe gilt, dass ſie dann auch allgemein für alle Grösen der Reihe gilt. Es ist dies das zweite Geſetz der Gleichheit oder der Satz des fortleitenden oder induktorischen Grösenbeweiſes. Dieſe beiden Arten von Beweiſen kommen in der Grösenlehre allein vor.

In der Logik werden wir später noch die entsprechenden Formen des begrifflichen Beweiſes und auserdem noch den ungeraden oder indirekten Beweis kennen lernen, welche in den späteren Zweigen der logischen Wissenschaften und der Formenlehre und in den Anwendungen dieſer Wissenschaften häufig gebraucht werden.

Erklärung. Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in den Knüpfungen der Grösenlehre die eine statt der andern ohne Aendrung des Wertes ſetzen kann. 10.

Ungleich heisen zwei Grösen, wenn man in den Knüpfungen der Grösenlehre die eine nicht statt der andern ohne Aendrung des Wertes ſetzen kann.

Eine Gröse kann nie einer andern Gröse gleich und zugleich ungleich ſein, ſondern ſie muss der andern Gröse entweder gleich oder ungleich ſein; denn jede Gröse darf nur einen und nicht mehre Werte haben.

Erklärung. Das Gleichheitszeichen $=$ ist das Zeichen der Gleichheit, das Ungleichheitszeichen $\gtrless$ ist das Zeichen der Ungleichheit. Das erstre bezeichnet, dass die geknüpften Grösen gleich ſind (z. B. $a = b$, geleſen a gleich b), das zweite bezeichnet, dass die geknüpften Grösen ungleich ſind (z. B. $a \gtrless b$, geleſen a ungleich b). 11.

Eine Gleichung heist die Knüpfung zweier Grösen durch das Gleichheitszeichen, z. B. $a = b$. Die links stehende Gröse a heist ihre linke Seite, die rechts stehende b ihre rechte Seite.

Wenn auf einer Seite der Gleichung zwei oder mehre Grösen durch Knüpfungszeichen verbunden ſind, ſo müssen dieſe zuerst unter ſich geknüpft werden, ehe ſie der andern Seite gleich geſetzt werden können, oder es ist $a = b \smile c \smile d$ gleich $a = (b \smile c \smile d)$.

Zwei verschiedene Formeln ſind einander gleich, wenn die eine ohne Aendrung des Wertes in die andre umgewandelt werden kann.

Herr Professor Paul Du Bois-Reymond giebt „Allg. Funktionenlehre I., Metaphyſik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe“, Tübingen 1882, S. 44 folgende Erklärung von gleich. „Die mathematischen Grösen ſind entweder gleich oder ungleich. Gleich ſind ſie, wenn ihre ſinnlichen Erscheinungen unter denſelben Bedingungen denſelben Eindruck hervorbringen.“ Hieraus folgt, ſie ſind ungleich, wenn die ſinnlichen Erscheinungen unter denſelben Bedingungen nicht denſelben Eindruck hervorbringen. Aber dieſe Erklärung ist in mehrfacher Beziehung fehlerhaft.

Denn einmal ſind die Grösen der Formenlehre oder Mathematik, wie die der Denklehre vom Geiste geſetzte oder verknüpfte Gebilde, welche grosenteils gar nicht der Sinnenwelt angehören und daher auch keine ſinnlichen Eindrücke hervorbringen, und dann brauchen ſie, auch wenn ſie von ſinnlichen Erscheinungen begleitet ſind, gar nicht denſelben Eindruck unter denſelben Bedingungen hervorzubringen. So ist logisch: der Mensch gleich der Mensch, mag er schwarz oder weis, gros oder klein, dick oder dünn, kurz, mag ſeine äusere Erscheinung ſein, wie ſie will. So ſind mathematisch: 2 Menschen = 2 Menschen, 2 Dreiecke = 2 Dreiecke, mag die ſinnliche Erscheinung derſelben ſein, welche ſie wolle. Kurz, die Gröse hat mit der ſinnlichen Erscheinung gar nichts gemein; Gröse kann jedes ſein, was Gegenstand des Denkens ist, ob es der Sinnenwelt angehört oder nicht. Ebenſo als gleich können jede 2 Grösen geſetzt werden, wenn in dem Denkakte die eine statt der andern ohne Aendrung des Wertes geſetzt werden kann, mögen ſie übrigens in andern Beziehungen ſo ungleich ſein, wie ſie wollen. Die Erklärung des Herrn Du Bois-Reymond ist alſo durchaus fehlerhaft.

Vor allem fehlt bei Herrn D. B. wieder die Hauptbestimmung in der Erklärung, dass eine Gröse einer andern Gröse nie gleich und zugleich ungleich ſein darf. Ohne dieſe Bestimmung ist aber jede Erklärung der Gleichheit unbrauchbar.

12. **Satz.** $a = a$ **oder in Worten:**
Jede Gröse ist ſich ſelbst gleich.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 10. oder in Worten: Nach Erklärung 10 heisen zwei Grösen einander gleich, wenn man ohne Aendrung des Wertes die eine statt der andern ſetzen kann. Jede Gröse kann man, da ſie nach Erklärung 2 nur einen Wert beſitzt, ohne Aendrung des Wertes für ſie ſelbst ſetzen, alſo ist jede Gröse ſich ſelbst gleich.

13. **Satz.** $a \circ b \circ c \circ d = [(a \circ b) \circ c] \circ d$ **oder in Worten:**
In jeder fortschreitenden Knüpfung von Grösen in derſelben Knüpfungsart kann man die Klammern beliebig weglassen oder fortschreitend ſetzen.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 8 oder in Worten: Die beiden Seiten der Gleichung ſind verschieden in der Form der Knüpfung. Nun kann man aber nach Erklärung 8 in der fortschrei-

tenden Knüpfung die Klammern fortlassen; tut man dies auf der rechten Seite, so werden sie gleichlautend, also sind sie gleich nach 12.

Satz. $\underset{1,n+1}{G^{c}} a_a = \left(\underset{1,n}{G^{c}} a_a\right) \circ \underset{n+1}{a}$ 14.

Das Gesammt aus n + 1 Grösen $a_1, a_2 \cdots a_{n+1}$ ist gleich dem Gesammte aus den n ersten Grösen geknüpft mit der Gröse a_{n+1}.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 8.

Die Sätze 12, 13 und 14 drücken nur in Formeln, bezüglich in Sätzen aus, was in den Erklärungen gegeben war; sie sind nur ein andrer Ausdruck des in den Erklärungen Gesetzten und bedürfen daher eines Beweises nicht.

Erklärung. Bedingt gleich oder gleich in Bezug auf eine Bedingung heisen zwei Grösen, wenn die Grösen gleich sind, sofern die Bedingung eintritt. 15.

Das Zeichen der bedingten Gleichheit ist $\overset{*}{=}$; durch den Stern wird die Bedingung, für welche die Gleichheit eintritt, hinzugefügt. Ein zweites Zeichen der bedingten Gleichheit ist die Verbindung zweier Gleichungen, von denen die eine die Annahme oder die Bedingung (die hypóthesis), die andre die Folgerung (die thésis) heist.

Satz. Fa $\overset{*}{=}$ Fb * Bedingung a = b oder 16.
Annahme: a = b Folgerung: Fa = Fb oder in Worten: Wenn zwei Grösen einander gleich sind, so ist auch jede Formel der ersten Gröse gleich der entsprechenden der zweiten Gröse.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 10 oder in Worten: Die Formeln zweier Grösen heisen entsprechend, wenn sie gleichlautend werden, sobald man in der zweiten Formel die erste Gröse statt der zweiten einführt. Nun ist aber a = b nach der Annahme, also kann man ohne Aendrung des Wertes die eine statt der andern in jede Knüpfung, mithin auch in die Formel Fa setzen, dann werden beide Formeln gleichlautend oder gleich, also ist Fa = Fb.

Bemerkt möge hier werden, dass, wenn Fa = Fb ist, daraus noch keineswegs immer folgt, dass a = b ist. So ist a·o = b·o; daraus folgt aber noch nicht a = b; so ist $(+a)^2 = (-a)^2$, daraus folgt aber nicht, dass +a = −a sei.

Satz. a∘b $\overset{*}{=}$ a∘c * Bedingung b = c oder 17.
Annahme: b = c Folgerung a∘b = a∘c oder in Worten: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen auf gleiche Weise knüpft.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 16.

Der Satz ist von groser Wichtigkeit für die ganze Grösen- und Denklehre. Wenn a = b ist, so folgt daraus a + c = b + c, ferner a·c = b·c und $a^c = b^c$, und zwar folgt dies für alle Zweige der Denklehre, für Zahlenlehre und

Ausdehnungslehre. für Logik und Bindelehre. Aber dieſer Satz ſetzt auch voraus, dass jede Verknüpfung nur ein einwertiges Geſammt liefere, lässt man dies auser Acht, ſo kann gerade dieſer Satz zu den bedenklichsten Trugschlüssen führen. Es tritt dies ſofort hervor, wenn man die Knüpfungen mit negativen Grösen oder mit Brüchen zulässt.

Sei z. B. bei der Zahlenlehre $\frac{1}{0}$ zugelassen, ſo wird, da $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, auch $a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0$ ist, nach dieſem Satze, wenn auf beiden Seiten mit $\frac{1}{0}$ multiplicirt wird, $(a \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = (b \cdot 0) \cdot \frac{1}{0}$ und $(a \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = a \cdot (0 \cdot \frac{1}{0}) = a \cdot 1 = a$ und ebenſo $(b \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = b$, mithin $a = b$, d. h. jede Gröse jeder andern gleich.

Sei ferner z. B. bei der Logik, wo $a + a = a$ ist, die Gröse $a - a = 0$ zugelassen, ſo wird $a = a + 0 = a + (a - a) = (a + a) - a = a - a = 0$ und ebenſo jede andere Gröse, alſo alle Grösen gleich Null und einander gleich.

Sei bei der Logik, wo $a \cdot a = a$ ist, die Gröse $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ zugelassen, ſo wird $a = a \cdot 1 = a \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = (a \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$, und ebenſo jede andere Gröse, alſo alle Grösen gleich Eins und einander gleich.

Man muss alſo aufpassen und ſich verſichern, dass jede Knüpfung nur einen Wert giebt, wie dies bereits die Erklärung 5 fordert. Ist dies erfüllt, dann gilt der Satz ſelbstverständlich ganz allgemein.

18. **Satz. Annahme: $a = c$, $b = c$ Folgerung $a = b$.**

Wenn zwei Grösen einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie unter einander gleich.

Beweis: In Formeln: Annahme $b = c$ Folg.: $(a = c) \doteq (a = b)$ (nach 17) oder in Worten: Die Gleichung $c = b$ bleibt nach Satz 17 richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen a auf gleiche Weiſe knüpft, alſo ist $(a = c) \doteq (a = b)$.

In dem Satze 18 kommt zuerst die Formel vor $(a = c) \doteq (a = b)$, wo in einer Gleichung jede Seite der Gleichung wieder eine Gleichung darstellt. Da die Grösen auf jeder Seite des Gleichheitszeichens unter ſich geknüpft werden müssen, ehe ſie gleichgeſetzt werden können, ſo muss hier jede Seite der Hauptgleichung in eine Klammer geschlossen werden, wie dies im Beweiſe geschehen ist. Dann ist der Sinn der Bezeichnung unzweifelhaft und einwertig.

19. **Satz. $(a = b) \equiv (b = a)$ oder Annahme $a = b$, Folgerung $b = a$ oder in Worten: Die beiden Seiten einer Gleichung kann man vertauschen.**

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 10.

Zwei Grösen ſind einander gleich, wenn man ohne Aendrung des Wertes in jeder Knüpfung die eine statt der andern ſetzen kann,

alſo kann man statt der ersten die zweite und statt der zweiten die erste ſetzen.

Satz. Annahme: $a = b$, $b = c$ **Folgerung**: $a = c$ **oder in Worten**: **Wenn die erste Gröse der zweiten und die zweite der dritten gleich ist, ſo ist auch die erste der dritten gleich.** 20.

Beweis: Unmittelbar nach 17. Annahme: $b = c$ Folgerung: $(a = b) \doteq (a = c)$ oder in Worten: Die Gleichung $b = c$ bleibt nach 17 richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen a auf gleiche Weiſe knüpft, alſo ist $(a = b) \doteq (a = c)$.

Satz. $[a = (b \circ c \circ d \circ \cdots)] = [a = b \circ c \circ d \circ \cdots]$. **oder in Worten**: **Wenn die eine Seite einer Gleichung in eine Kammer geschlossen ist, ſo kann man die Klammer weglassen.** 21.

Beweis: Unmittelbar aus der Erklärung 10.

Satz des geraden (direkten) Grösenbeweiſes. Annahme: $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3 \cdots a_{n-1} = a_n$ **oder** $a_a = a_{a+1}$ **Folgerung**: $a_1 = a_n$ **oder in Worten: Wenn in einer Reihe von Grösen jede vorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, ſo ist auch die erste der letzten gleich.** 22.

Beweis in Formeln: Annahme: $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3$ Folgerung:

$a_1 = a_3$ (nach 20)

Annahme: $a_1 = a_3$, $a_3 = a_4$ Folgerung: $a_1 = a_4$ (nach 20)

u. ſ. w.

Annahme: $a_1 = a_{n-1}$, $a_{n-1} = a_n$ Folgerung: $a_1 = a_n$ (nach 20)

Beweis in Worten: Nach der Vorausſetzung ist die erste Gröse gleich der zweiten. Da aber nach der Vorausſetzung ferner jede nächstvorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, ſo kann ich in jeder Gleichung statt der nächstvorhergehenden Gröse die nächstfolgende ſetzen; alſo kann ich in der rechten Seite der ersten Gleichung statt der zweiten die dritte, statt der dritten die vierte und ſofort bis zu der letzten Gröse der Reihe ſetzen, alſo ist auch die erste Gröse der letzten Gröse gleich.

Satz des fortleitenden (induktorischen) Grösenbeweiſes. 23.

Annahme: $\mathfrak{F} a_1 = \Phi a_1$, $[\mathfrak{F} a_a = \Phi a_a] = [\mathfrak{F} a_{a+1} = \Phi a_{a+1}]$

Folgerung: $\mathfrak{F} a_n = \Phi a_n$ **oder in Worten**:

Jede Gleichung der Formenlehre, welche für die erste Gröse einer Reihe gilt und welche, wenn ſie für eine beliebige Gröse der Reihe gilt, dann auch für die nächstfolgende Gröse der Reihe Geltung hat, gilt auch für alle folgenden Grösen der Reihe.

Beweis in Formeln:

Es ist $Fa_1 = \Phi a_1$ und $[Fa_1 = \Phi a_1] = [Fa_2 = \Phi a_2]$ Folgerung:
$Fa_2 = \Phi a_2$ (nach 10)

Es ist $Fa_2 = \Phi a_2$ und $[Fa_2 = \Phi a_2] = [Fa_3 = \Phi a_3]$ Folgerung:
$Fa_3 = \Phi a_3$ (nach 10)

u. f. w.

Es ist $Fa_{n-1} = \Phi a_{n-1}$ und $[Fa_{n-1} = \Phi a_{n-1}] = [Fa_n = \Phi a_n]$
Folgerung: $Fa_n = \Phi a_n$ (nach 10)

In Worten: Nach der Annahme gilt die Gleichung $Fa_1 = \Phi a_1$ für die erste Gröse der Reihe. Ferner gilt diefe Gleichung, fobald fie für eine beliebige Gröse der Reihe a_a gilt, auch für die nächstfolgende Gröse der Reihe a_{a+1}; man kann mithin in diefer Gleichung a_{a+1} statt a_a fetzen, oder es ist in Bezug auf diefe Gleichung $a_a \stackrel{*}{=} a_{a+1}$, mithin ist auch in Bezug auf diefe Gleichung $a_1 \stackrel{*}{=} a_n$ nach Satz 22, d. h. man kann in diefer Gleichung auch statt der ersten Gröse der Reihe a_1 die letzte Gröse der Reihe a_n fetzen, oder die Gleichung gilt, da fie für die erste Gröse gilt, auch für die letzte Gröse der Reihe.

24. **Satz des einfachen Grösenbeweifes (des elementaren Beweifes).**

Jede Gleichung der Grösenlehre, welche für ein Einfaches oder für ein Element gilt, und welche, fobald fie für eine beliebige Gröse gilt, auch für jede Gröse gilt, welche ein Einfaches mehr enthält, gilt auch für alle durch fortschreitende Knüpfung von Einfachen erzeugten Grösen.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 23, wenn man das erste Einfache als erste Gröse und jedesmal die ein Einfaches mehr enthaltende Gröse auch jedesmal als nächstfolgende Gröse in der Reihe fetzt.

Alle die Sätze über die Gleichung der Grösen gehen aus der Erklärung der gleichen Gröse hervor, dass man statt jeder Gröse die gleiche fetzen kann. Die ersten Sätze ergeben fich daraus unmittelbar, die letzten ergeben fich durch wiederholte Anwendung der Erklärung und wiederholte Einstellung der gleichen Gröse.

Es hat uns diefe Nummer namentlich in den letzten Sätzen 22, 23 und 24 die Form der Beweife gelehrt, welche in der Grösenlehre, wie in allen Zweigen der Denklehre: in allen Zweigen der Formenlehre oder Mathematik, wie in allen Zweigen der logischen Wissenschaften die allein gültige und stets wiederkehrende ist und daher die gröste Wichtigkeit für die strenge Wissenschaft befitzt.

2. Die drei Arten der Grösenknüpfung.

Nachdem wir die Erklärungen und die Beweisform der Grösenlehre kennen gelernt haben, könnten wir nunmehr zu den Grösen und Knüpfungen der Zahlenlehre übergehen, dann aber müssten wir das Gefetz der Einigung etwa fechsmal beweifen und ebenfo oft das Gefetz der Vertauschung und ebenfo viermal die Gefetze der Trennung einer Knüpfung. Viel kürzer, einfacher und auch für die Schüler leichter ist es, diefe Gefetze einmal in der Grösenlehre zu beweifen und dann diefe Gefetze einfach in den verschiedenen Ordnungen der Zahlenlehre anzuwenden. Ich ziehe daher diefen Weg vor und entwickle alfo aus der Grösenlehre noch die Sätze über die Arten der Knüpfung und demnächst auch die über die Gattungen der Knüpfung.

Erklärung. Unter der Gröse $a \circ (\circ b)$ verstehen wir die Gröse $a \circ b$. Die Gröse $(\circ b)$, gelefen „Mit b", heist eine Knüpfgröse. 25.

Satz. $a \circ (\circ b) = a \circ b$. 26.
Statt eine Knüpfgröse zu knüpfen, kann man die Gröse ohne Vorzeichen knüpfen.

Erklärung. Satz. Bei der Grösenlehre unterscheiden wir drei Arten der Knüpfung: Die Anreihung, die Einigung und die Vertauschung der Grösen. 27.

a. Die Anreihung der Grösen.

Erklärung. Die Anreihung heist eine Knüpfung von Grösen, fofern die Klammer nicht weggelassen, die Stellung der Grösen nicht geändert werden darf, ohne dass fich der Wert des Gefammtes ändert. 28.

Die Anreihung der Grösen ist die einzige Form der Knüpfung, bei welcher jede Knüpfungsform von jeder andern Knüpfungsform verschieden und nur fich felbst gleich ist. So ist für die Anreihung nicht nur $a \circ b \neq b \circ a$, fondern auch $a \circ b \circ c \neq a \circ (b \circ c)$.

Für die Anreihung, wo alfo weder Einigung, noch Vertauschung gilt, giebt uns jedes wissenschaftliche System, jedes Buch, namentlich jedes Wörterbuch ein Beispiel. Ein andres Beispiel bietet die Erhöhung oder Potenzirung, denn auch bei diefer ist weder $a^b = b^a$, noch ist $(a^b)^c = a^{(b^c)}$.

b. Die Einigung der Grösen.

Erklärung. Die Einigung (die connexio) heist eine Knüpfung von Grösen, fofern man, statt mit der zweiten Gröse ein Einfaches (ein Element) zu knüpfen, dies auch mit dem Gefammte der Knüpfung der beiden Grösen knüpfen kann, ohne dass fich der Wert des Gefammtes ändert. 29.

30. **Grundformel der Einigung.** $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$ **oder in Worten Statt mit der zweiten Gröse ein Einfaches (ein Element) zu einigen, kann man es mit dem Geſammte der beiden Grösen einigen, und — Statt mit dem Geſammte zweier Grösen ein Einfaches zu einigen, kann man es mit der zweiten Gröse einigen.**

Die Erklärung der Einigung muss ſo gefasst werden, dass das Ergebniss der Einigung wieder einwertig ist. Daraus ergiebt ſich die obige Erklärung mit Notwendigkeit. Denn gegeben ſind uns die Einſachen (die Elemente), welche noch nicht geknüpft ſind. Festgeſetzt ist bereits, dass wir in der fortschreitenden Knüpfung der Einfachen die Klammern ſortlassen können, alſo dass $(a\circ e_1)\circ e_2 = a\circ e_1\circ e_2$ ist. Festgeſetzt muss noch werden, was gelten ſoll, wenn mit einer Gröse a das Geſammt einer Gröse b und eines Einfachen geknüpft werden ſoll, z. B. $a\circ(b\circ e)$. Darf hier die Klammer nicht weggelassen werden, ſo ist eine Weglassung der Klammern auserhalb der fortschreitenden Knüpfung überhaupt nicht möglich: darf ſie dagegen hier weggelassen werden, ist alſo $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$, ſo lässt ſich daraus das ganze Geſetz der Einigung ableiten. Zunächst gilt dann nämlich $a\circ(e_1\circ e_2) = a\circ e_1\circ e_2$. Ferner gilt $a\circ(e_1\circ e_2\circ e_3) = a\circ(e_1\circ e_2)\circ e_3 = a\circ e_1\circ e_2\circ e_3$ u. ſ. w.

Die Erklärung: Eine Knüpfung heist Einigung, wenn $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$ ist, genügt alſo für die ganze Klammerlöſung. Andrerſeits enthält ſie auch nicht zuviel; denn angenommen, ſie ſollte nur gelten bis zu 10 Einfachen (Elementen), weiter aber nicht, ſo ſetzen wir, dass b 10 Einfache enthalte, dann gilt alſo nicht $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$, alſo auch von da ab keine einzige Art der Klammerlöſung (auserhalb der fortschreitenden Knüpfung). Aus der Erklärung, dass $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$ ſei, wird in den Sätzen über die Einigung das Geſetz der Einigung oder das Klammergeſetz abgeleitet, dass, ſofern jene Grundformel gelte, auch jede Klammer beliebig geſetzt oder weggelassen werden könne und dass das Ergebniss wieder eine Gröse ſei, deren Einfache (Elemente) fortschreitend geknüpft ſind.

Man hat von anderer Seite die Erklärung ſo gefasst, dass man $a\circ(b\circ c) = a\circ b\circ c$ erklärt hat, wo a, b, c beliebige Grösen ſind. Aber wollten wir die Erklärung in dieſer Weiſe fassen, ſo wäre in der Erklärung bereits das ganze Geſetz der Einigung vorausgeſetzt. Denn, wenn man alle Klammern herstellt, ſo enthält jede Klammer nur zwei Grösen und kann man demnach von der äusersten Klammer anfangend nach dieſer Erklärung jede Klammer weglassen. Die Erklärung könnte dann alſo auch lauten: Die Einigung ist die Knüpfung der Grösen, bei welcher man jede Klammer beliebig ſetzen oder weglassen kann. In dieſer Erklärung wäre dann aber als Erklärung ausgeſprochen, was ſich aus einer viel engeren Erklärung ableiten lässt. Es würde daher auch gar nicht erkannt werden, welche Vorausſetzung notwendig ist, damit das ganze Geſetz der Einigung stattfinde. Eine gute Erklärung aber darf nichts weiter festſetzen, als dieſe für die Sache unumgänglich notwendige Vorausſetzung.

Andrerſeits kann dann aber auch jede mehrfach zuſammengeſetzte Gröse auf mehrfache Weiſe entstanden ſein, und könnte daher auch ſehr wohl mehrfache Werte haben; jedenfalls müsste doch erst bewieſen werden, dass alle dieſe Werte gleich ſind, wenn man wissenschaftlich ſein und Trugschlüsse vermeiden

will. Die gegebene Erklärung ist alſo die allein mögliche, wenn man streng wissenschaftlich ſein will.

Es ist dieſe strenge Form der Erklärung zuerst 1847 von den Gebrüdern Grassmann bei ihrer gemeinſamen Arbeit in der Arithmetik eingeführt worden. Sie erkannten bereits damals, dass bei allen Grösen, welche aus mehren Einfachen zuſammengeſetzt ſind, genau die Reihenfolge der Knüpfung bestimmt werden müsse, in welcher die Einfachen verbunden werden ſollen. Eine verschiedene Art der Knüpfung kann auch einen verschiedenen Wert der geknüpften Grösen erzeugen, ſo z. B. ist für Geänder (Variationen) $ab \gtrless ba$, ſo ist für Höhen (Potenzen) $a^{b^c} \gtrless a^{(b^c)}$. Die Gebrüder Grassmann liesen es für den ersten Unterricht im Rechnen gelten, wenn der Lehrer ſagt: „Seht Kinder, es giebt ganz dasſelbe, ob ich ſage $6 + 1$ ist 7, oder $4 + 3$ ist 7, die Reihenfolge im Zuſammenzählen ist alſo ganz gleichgültig"; dagegen erklärten ſie es für schlechthin unwissenschaftlich, in der Wissenschaft eine ſolche Annahme zu machen, ohne ſie zu beweiſen.

Jede einwertige Gröse, ſo schlossen die Gebrüder Grassmann, darf nur in einer einzigen bestimmten Reihenfolge durch Knüpfung der Einfachen erzeugt werden, und ſie ſetzten als die einfachste Reihenfolge der Knüpfung die fortschreitende Knüpfung fest, bei welcher das jedesmalige Ergebniss der Knüpfung nur mit einem, und zwar dem nächstfolgenden Einfachen geknüpft wird. Sie gaben demnach auch bereits 1847 und demnächst in ihren Werken H. Grassmann, Arithmetik 1861, R. Grassmann, Formenlehre 1872, der auf a folgenden Gröse die Form $a \circ e$ und ſo fort und erklärten jede Gröse aus der nächstvorhergehenden durch Knüpfung mit einem Einfachen. Auch Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, Erster Band 1872 ist, ohne damals dieſe Arbeiten zu kennen, ganz zu derſelben Erklärung gekommen und erklärt jede Zahl durch Zufügung von Eins zu der nächstvorhergehenden.

Auch der Beweis für die fortschreitend aus Einfachen erzeugten Grösen und für ihre Knüpfungen muss, dies erkannten die Gebrüder Grassmann gleichfalls schon damals, wenn er streng wissenschaftlich ſein ſoll, fortleitend (von a zu $a \circ e$ vorgehend) geführt werden.

Satz. Das Geſammt der Einigung zweier einfachen Grösen a und b ist wieder eine einfache Gröse, d. h. eine Gröse, deren Einfache (Elemente) fortschreitend geknüpft ſind. 31.

Formelbeweis: Nach Einfachen d. h. einfach (elementar) in Bezug auf b.

1. Der Satz gilt, wenn b nur ein Einfaches e enthält, denn es ist a, alſo auch $a \circ e$ nach 8 eine einfache Gröse, in welcher die Einfachen fortschreitend geknüpft ſind.
2. Wenn der Satz für eine Gröse $a \circ b$ gilt, ſo dass $a \circ b$ eine Gröse ist, deren Einfache fortschreitend geknüpft ſind (Annahme), ſo gilt er auch für die Gröse $a \circ (b \circ e)$, wo b ein Einfaches e mehr enthält, ſo dass auch $a \circ (b \circ e)$ wieder eine Gröse ist, in welcher

die Einfachen fortschreitend geknüpft ſind (Folgerung); denn es ist

$$a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e \qquad \text{(nach 30)}$$

d. h. da $a \circ b$ nach der Annahme eine Gröse ist, deren Einfache fortschreitend geknüpft ſind, ſo ist auch $a \circ b \circ e$, alſo auch $a \circ (b \circ e)$ eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft ſind.

3. Mithin gilt der Satz nach 24 allgemein für alle Grösen b.

Der fortleitende und namentlich der nach Einfachen (Elementen) fortleitende oder elementare Beweis erscheint zur Zeit Vielen, welche an das unwissenschaftliche Geschwätz gewöhnlicher Beweiſe in der Logik und Arithmetik gewöhnt ſind, ermüdend, abschreckend und namentlich für Schulen unpraktisch und unpassend. Dieſe werden vorausſichtlich auch über den vorliegenden streng wissenschaftlichen Weg die Naſe rümpfen und vornehm aburteilen. Dieſen daher noch ein Wort. Ich lege dieſen Gegnern des fortleitenden Beweiſes die folgenden Fragen vor:

1. Wollen ſie mit bereits geknüpften Grösen anfangen, ohne die Geſetze der Knüpfung zu bestimmen und ohne Einfache oder Elemente zu ſetzen. welche ſie knüpfen?

Ich für meinen Teil halte es allein für wissenschaftlich und für Schüler einfach (elementar), erst nach einander eine Reihe ungeknüpfter Einfacher oder Elemente zu ſetzen und dieſe demnächst zu andern Grösen nach bestimmten Geſetzen zu knüpfen.

2. Wollen ſie aus den Einfachen alle Grösen, welche ſich aus denſelben durch Knüpfung erzeugen lassen, gleichzeitig ableiten, ohne allmählich von der jedesmal erzeugten Gröse zu der nächstfolgenden durch Knüpfung eines neuen Einfachen überzugehen?

Ich für meinen Teil erzeuge erst allmählich jede folgende Gröse aus der vorhergehenden durch Knüpfung eines neuen Einfachen oder Elementes, und jeder Elementarlehrer wird mir bestätigen, dass man nur auf dieſem Wege in der Zahlenlehre die Zahlen erzeugen könne. Auch die Gegner des fortleitenden Weges haben ſo in der Kindheit zählen gelernt, indem ſie lernten: Eins und eins ist zwei; zwei und eins ist drei; drei und eins ist vier u. ſ. w. Der fortleitende (induktorische) Weg ist alſo bei dem Setzen der Einfachen (der Elemente) und bei der fortschreitenden Knüpfung der Einfachen zu Grösen der gebotne, allein richtige und allein einfache (elementare).

3. Wollen ſie bei der Knüpfung mehrer Grösen ſofort beliebig viele und zwar beliebig zuſammengeſetzte knüpfen, oder wollen ſie erst zwei Grösen knüpfen und zwar zunächst ſo, dass die zweite nur zwei Einfache (Elemente), demnächst dass ſie drei Einfache und fortschreitend immer ein Einfaches mehr enthält?

Ich für meinen Teil wähle wieder den letztern Weg als den allein wissenschaftlichen und einfachen (elementaren). Nachdem nämlich die Kinder die Zahlen erzeugt haben, ſo beginnt nun in der Schule das Zufügen der Zahlen oder Addiren. Der Lehrer zeigt den Kindern, dass statt 2 zuzufügen, ſie erst eins und dann noch eins zufügen können und übt dann ein „eins und zwei giebt drei, zwei und zwei giebt vier u. ſ. w.“ Ist dies bis zu voller Sicherheit

eingeübt, ſo zeigt der Lehrer, dass statt drei zuzufügen, man zwei und eins zufügen könne und übt dann das Zufügen von drei bis zu voller Sicherheit ein und ebenſo bei jeder folgenden Zahl zeigt der Lehrer, dass statt die folgende zuzufügen, man die vorhergehende und eins zufügen könne und übt jede folgende Reihe, ehe er weiter fortschreitet, bis zu voller Sicherheit ein.

Es giebt alſo nur einen einfachen (elementaren) Weg des Unterrichtes in der Formenlehre, das ist der fortleitende (induktorische), und ebenſo giebt es nur einen wissenschaftlichen Weg der Entwicklung und des Beweiſes in den Anfangsgründen der Grösenlehre, das ist wiederum der fortleitende (induktorische).

Das Werk des ausgezeichneten Mathematikers E. Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1872, gehört zu den besten Werken dieſes Zweiges. Er hat bereits die fortschreitende Erklärung der Zahlen $a+1$, wo jede folgende von allen früheren verschieden ist, dagegen hat er nicht den fortleitenden Beweis. Wenn der Satz für a gilt, gilt er auch für $a+1$, obwohl dies der einzig wissenschaftliche ist, hier kommen wieder Trugschlüsse, oder es werden Vorausſetzungen gemacht, welche bewieſen werden können. Dagegen ist das Werk von H. Grassmann, Arithmetik, Berlin 1861, das erste, in welchem einer der Zweige der Formenlehre namentlich die Arithmetik in streng wissenschaftlicher Weiſe dargestellt ist.

Satz. $a\circ(b\circ c) = a\circ b\circ c$ oder in Worten 32.
In der Einigung dreier Grösen kann man die Klammern beliebig weglassen oder ſetzen.

Formelbeweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf c.

1. Die Gleichung gilt, wenn c nur ein Einfaches enthält (nach 30)
2. Wenn die Gleichung für eine Gröse c gilt (Annahme), ſo gilt ſie auch für die Gröse $c\circ e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} a\circ[b\circ(c\circ e)] &= a\circ[b\circ c\circ e] && \text{(nach 30)}\\ &= a\circ(b\circ c)\circ e && \text{(nach 30)}\\ &= a\circ b\circ c\circ e && \text{(nach Annahme)}\\ &= a\circ b\circ(c\circ e) && \text{(nach 30)}\end{aligned}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 24 auch allgemein für alle Grösen.

Beweis in Worten: Wenn man nach Satz 31 in der dritten Gröse c alle Klammern herstellt und die Einfachen nach 30 rückschreitend aus der Klammer entfernt, ſo kann man die ſämmtlichen Einfachen von c aus der Klammer entfernen und die Klammer alſo weglassen.

Satz. Geſetz der Einigung oder Klammergeſetz. 33.
In jeder Knüpfung beliebiger Grösen, für welche Einigung gilt, kann man jede Knüpfklammer dieſer Knüpfung beliebig weglassen

2*

oder ſetzen, und das Geſammt der Knüpfung ist eine Gröse, deren Einfache (Elemente) fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis in Formeln, fortleitend (induktorisch) in Bezug auf $\underset{1,n}{G^0} b_{\mathfrak{b}}$.

Es ſei gegeben $a \circ (\underset{1,n}{G^0} b_{\mathfrak{b}}) = a \circ (b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n)$, zu beweiſen ist $a \circ (b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n) = a \circ b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n$.

1. Die Gleichung gilt, wenn $\underset{1,n}{G^0} b_{\mathfrak{b}}$ nur zwei Grösen $b_1 \circ b_2$ enthält (nach 32).
2. Wenn die Gleichung für irgend ein Geſammt $\underset{1,n}{G^0} b_{\mathfrak{b}}$ gilt (Annahme), ſo gilt ſie auch für das Geſammt $\underset{1,n+1}{G^0} b_{\mathfrak{b}}$, welches eine Gröse b_{n+1} mehr enthält (Folgerung), denn
$$a \circ (\underset{1,n+1}{G^0} b_{\mathfrak{b}}) = a \circ (\underset{1,n}{G^0} b_{\mathfrak{b}} \circ b_{n+1}) \qquad \text{(nach 14)}$$
$$= (a \circ \underset{1,n}{G} b_{\mathfrak{b}}) \circ b_{n+1} \qquad \text{(nach 32)}$$
3. Mithin gilt die Gleichung nach 23 allgemein.

Beweis in Worten: Man stelle zunächst alle Klammern wieder her. Dann ſind in jeder Klammer nach 7 nur zwei Grösen enthalten, und ist das Geſammt der Klammer nur mit einer dritten Gröse auser der Klammer zu knüpfen. Man kann alſo nach 32 jedesmal die äuserste Klammer weglassen, und ſo nach der Reihe ſämmtliche Klammern weglassen, die Formel wird dabei eine Gröse, in welcher alle Einfache fortschreitend geknüpft ſind.

34. **Satz. In jeder Knüpfung von Grösen, für welche Einigung gilt, kann man statt der Einfachen (Elemente) auch beliebige aus dieſen erzeugte Grösen, welche ungleich der nichtigen Gröse dieſer Knüpfung ſind, als Einfache (Elemente) ſetzen und daraus neue Grösen ableiten, und gelten auch für dieſe alle Geſetze der Einigung.**

Beweis: Die Grundformel der Einigung ist $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, aus dieſer ſind alle Geſetze der Einigung abgeleitet. Dieſe Formel gilt aber nach 32 auch, wenn wir statt des Einfachen e eine beliebige Gröse c einführen u. ſ. w.

Das Geſetz der Einigung der Grösen findet in den Zweigen der Denklehre oder Grösenlehre, wie der Formenlehre und der logischen Wissenschaften eine überaus reiche Anwendung. In der Grösenlehre wird es bei der Addition, bei der Multiplikation und auch bei der Potenzirung angewandt. In der Zahlenlehre wird es bei der Addition und bei der Subtraktion, bei der Multiplikation und bei der Diviſion, bei der Potenzirung ff. angewandt. In der Logik wird es bei der Addition und Multiplikation, in der Bindelehre wird es bei der Addition und bei der Multiplikation, und zwar bei den Kombinationen, wie Variationen und ferner bei den Potenzen gebraucht. Es wäre wenig wissenschaftlich, wollte

man dasselbe Gesetz 18 bis 20 mal an verschiedenen Stellen ableiten und beweisen, statt es einmal in der Grösenlehre abzuleiten und dann nur anzuwenden. Ganz unwissenschaftlich aber ist es, wenn man es gar nicht ableitet, sondern ohne Ableitung und ohne Beweis als selbstverständlich voraussetzt. oder auch statt des Beweises einige nichts beweisende Phrasen giebt, hinter denen man Unwissenschaftlichkeit verstecken will, wie dies gewöhnlich geschieht. Für die Einübung empfiehlt es sich, dies Gesetz für verschiedene Knüpfungszeichen, z. B. $a + (b + c) = a + b + c$ und $a(bc) = abc$ zu beweisen und an Zahlenbeispielen zu erläutern, z. B. dass $8 + (3 + 10) = (8 + 3) + 10$, dass $4 \cdot (5 \cdot 7) = (4 \cdot 5) \cdot 7$ ist. Es wird dadurch das Gesetz anschaulich und tritt lebendiger ins Bewusstsein. Sehr zweckmäsig ist es, bei Geübteren die Grenzen dieses Gesetzes aufzustellen, dass z. B. in der Zahlenlehre zwar $a^{(b \cdot c)} = (a^b)^c$ gilt, dass aber nicht $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ ist. Ein Beispiel für Einigung ohne Vertauschung bieten uns die Geänder oder Variationen in der Bindelehre (Kombinationslehre); denn bei den Geändern ist $a(bc) = abc$, aber nicht $ab = ba$; es gilt also Einigung ohne Vertauschung.

c. Die Vertauschung der Grösen.

Erklärung. Die Vertauschung (die mutatio) heist eine Knüpfung von Grösen, sofern auser der Einigung auch die Vertauschung zweier Einfachen (Elemente) gilt. 35.

Grundformel der Vertauschung. $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ 36.
Zwei Einfache (Elemente) kann man, wenn Vertauschung gilt, mit einander vertauschen.

Für die Vertauschung der Grösen muss zunächst bemerkt werden, dass Vertauschung ohne Einigung nichts Neues giebt. Sollte z. B. die Vertauschung zweier Einfachen $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ gelten, aber nicht Einigung: so könnte man in $e_1 \circ e_2 \circ e_3$, wohl $e_1 \circ e_2$ vertauschen, aber nicht $e_2 \circ e_3$, denn stellt man die Klammern her, so ist $e_1 \circ e_2 \circ e_3 = (e_1 \circ e_2) \circ e_3$, also wird e_2 und e_3 durch eine Klammer getrennt und kann, sofern nicht Einigung gilt, auch nicht vertauscht werden, gilt dagegen Einigung, so kann man die Klammern beliebig setzen, also ist dann $e_1 \circ e_2 \circ e_3 = e_1 \circ (e_2 \circ e_3)$. Hier kann man e_2 und e_3 vertauschen und erhält also $e_1 \circ (e_3 \circ e_2) = e_1 \circ e_3 \circ e_2$. Die Erklärung der Vertauschung wird also die sein müssen, dass nicht nur Einigung, sondern auch auserdem die Vertauschung zweier benachbarter Einfacher (Elemente) gilt. Bewiesen wird dann das Gesetz der Vertauschung, dass man die Klammer beliebig setzen und weglassen und die Ordnung der Grösen beliebig ändern kann ohne Aendrung des Werts des Ergebnisses.

Lehrsatz. Gesetz der Vertauschung. 37.

In jeder Knüpfung beliebiger Grösen, für welche Vertauschung gilt, kann man die Klammern beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der zu verknüpfenden Grösen beliebig ändern, ohne dass sich

der Wert des Gefammtes ändert, und das Gefammt der Knüpfung ist eine Gröse, deren Einfache (Elemente) fortschreitend verknüpft find.

Beweis in Formeln: Der Formelbeweis zerfällt in drei Teile, man muss nämlich beweifen,

a. dass man eine Gröse und ein Einfaches vertauschen kann, oder dass $a \circ e = e \circ a$,

b. dass man zwei Grösen unter einander vertauschen kann, oder dass $a \circ b = b \circ a$ und

c. dass bei mehren Grösen jede Gröse eine beliebige Stelle erhalten kann, oder dass $a \circ b \circ c \circ d = a \circ d \circ c \circ b$.

a. Beweis nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf a.

1. Die Gleichung $a \circ e_1 = e_1 \circ a$ gilt, wenn a nur ein Einfaches e_2 enthält, denn $e_2 \circ e_1 = e_1 \circ e_2$ (nach 36).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse a gilt (Annahme), fo gilt fie auch für die Gröse $a \circ e_2$, welche ein Einfaches e_2 mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} (a \circ e_2) \circ e_1 &= a \circ (e_2 \circ e_1) && \text{(nach 30)} \\ &= a \circ (e_1 \circ e_2) && \text{(nach 36)} \\ &= (a \circ e_1) \circ e_2 && \text{(nach 30)} \\ &= (e_1 \circ a) \circ e_2 && \text{(nach Annahme)} \\ &= e_1 \circ (a \circ e_2) && \text{(nach 30)} \end{aligned}$$

3. Alfo gilt die Gleichung nach 24 allgemein.

b. Beweis nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf b.

1. Die Gleichung $a \circ b = b \circ a$ gilt, wenn b nur ein Einfaches e enthält (nach 37 a).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme), fo gilt fie auch für jede Gröse $b \circ e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ e) &= (a \circ b) \circ e && \text{(nach 30)} \\ &= (b \circ a) \circ e && \text{(nach Annahme)} \\ &= b \circ (a \circ e) && \text{(nach 30)} \\ &= b \circ (e \circ a) && \text{(nach 37a)} \\ &= (b \circ e) \circ a && \text{(nach 32)} \end{aligned}$$

3. Alfo gilt der Satz nach 24 allgemein.

c. Da Einigung gilt, fo kann man die Grösen zwischen der zu verfetzenden Gröse d und der Stelle, wohin fie verfetzt werden foll, in eine Klammer schliesen, dann ist

$$a \circ b \circ c \circ d = a \circ [(b \circ c) \circ d] \qquad \text{(nach 33)}$$
$$= a \circ [(c \circ b) \circ d] \qquad \text{(nach 37b)}$$
$$= a \circ [d \circ (c \circ b)] \qquad \text{(nach 37b)}$$
$$= a \circ d \circ c \circ b \qquad \text{(nach 33)}$$

Beweis in Worten: a. Da Vertauschung gilt, ſo gilt nach 35 auch Einigung, alſo kann man nach 34 auch die Klammern beliebig ſetzen oder weglassen, ohne dass ſich der Wert des Geſammtes ändert.

b. Man kann aber auch jedes Einfache in jede beliebige Stelle bringen. Denn nach dem Geſetze der Einigung (33) kann man ein beliebiges Einfaches mit ſeinem benachbarten, z. B. dem vorhergehenden, in eine Klammer schliesen, dann die Einfachen (nach 36) vertauschen und demnächst die Klammer wieder löſen. Auf gleiche Weiſe kann man dasſelbe Einfache wieder mit dem nunmehr benachbarten, z. B. vorhergehenden, in eine Klammer schliesen, wieder die Einfachen vertauschen und dann die Klammer löſen und ſofort. Man kann alſo jedes beliebige Einfache in jede beliebige vorhergehende oder nachfolgende Stelle bringen ohne Aendrung des Wertes.

c. Ebenſo kann man jede Gröse in jede beliebige Stelle bringen, indem man nach der Reihe jedes Einfache der Gröse ohne Aendrung des Wertes an jene Stelle bringt. Mithin kann man die Ordnung der zu knüpfenden Grösen beliebig ändern, ohne dass ſich der Wert des Geſammtes ändert. Das Geſammt ist nach 34 wieder eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft ſind.

Satz. In jeder Knüpfung von Grösen, für welche Vertauschung gilt, kann man statt der Einfachen (der Elemente) auch beliebige, aus dieſen erzeugte Grösen, welche ungleich der nichtigen Gröse dieſer Knüpfung ſind, als Einfache (Elemente) ſetzen und daraus neue Grösen ableiten, und gelten auch für dieſe alle Geſetze der Vertauschung. 38.

Beweis: Die Geſetze der Vertauschung ſind ſämmtlich aus den beiden Grundformeln $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ und $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ abgeleitet, dieſe gelten aber nach 37 auch für beliebige Grösen, alſo u. ſ. w.

Auch der Beweis für das Geſetz der Vertauschung kann ſelbstredend, wenn er streng wissenschaftlich ſein ſoll, wieder nur fortleitend nach Einfachen oder Elementen, d. h. elementar geführt werden.

Das Geſetz der Vertauschung der Grösen findet wieder in den Zweigen der Grösenlehre, wie der Formenlehre und der Denklehre eine überaus reiche Anwendung. In der Grösenlehre wird es bei der Addition, bei der Multiplikation und bei der Potenzirung angewandt. In der Zahlenlehre wird es bei der Addition

und Subtraktion, Multiplikation und Diviſion, Potenzirung ff. gebraucht. In der Logik wird es bei der Addition und Multiplikation, in der Bindelehre bei der Addition, der Multiplikation und Potenzirung der Kombinationen gebraucht. Es wäre wenig wissenschaftlich, wollte man auch hier den Beweis 12 bis 20 mal wiederholen oder gar ihn überschlagen und durch unwissenschaftliche bemäntelnde Phraſen erſetzen, wie dies meistenteils geschieht. Die strenge Wissenschaft fordert den Beweis hier an dieſer Stelle vor den einzelnen Zweigen und findet die Darstellung hierin ihre Begründung und Rechtfertigung. Für die Einübung empfiehlt es ſich, dies Geſetz wieder für verschiedene Knüpfungszeichen, z. B. $a + b = b + a$, $ab = ba$ zu beweiſen und an Zahlenbeispielen zu erläutern, alſo dass $7 + 9 = 9 + 7$, dass $7 \cdot 9 = 9 \cdot 7$ ist. Es wird dadurch das Geſetz anschaulich und tritt lebendiger ins Bewusstſein. Für die Geübteren empfiehlt es ſich, die Formeln $(a \cdot b)^c = (b \cdot a)^c$, $a^{b+c} = a^{c+b}$, $(a^b)^c = (a^c)^b$ zu üben und nachzuweiſen, dass nicht $a^b = b^a$ ist.

3. Die beiden Gattungen der Knüpfung und der Zerlegung.

Bei der Knüpfung giebt es nun zwei grose Gattungen mit überaus abweichenden Geſetzen, ſie unterscheiden ſich dadurch, dass bei der einen das Geſammt wieder in ſeine geknüpften Grösen zerlegt oder getrennt werden kann, und die durch dieſe Trennung erzeugte Gröse nur einen und nicht mehre Werte hat, dass bei der andern dagegen es mehre Grösen giebt, welche der Löſung der Knüpfung entsprechen, ja dass es wohl ſelbst ein ganzes Gebiet ſolcher Grösen giebt. Wir nennen die erstre Gattung die trennbare Knüpfung, die zweite die untrennbare Knüpfung. Die beiden Gattungen der Knüpfung ſind es, welche das Denken des Menschen mannigfach und reich gestalten.

Der ersten dieſer beiden Gattungen der trennbaren Knüpfung entspricht die Trennung, wo die übrig bleibende Gröse nur einen Wert hat. Der untrennbaren Knüpfung entspricht die Löſung, wo die übrig bleibende Gröse mehre Werte hat.

Beiden Gattungen der Knüpfung ſind gemeinſam einerſeits die nicht ändernde Gröse einer Knüpfung, welche mit jeder Gröse in dieſer Knüpfung geknüpft werden kann, ohne den Wert derſelben zu ändern. Als Beispiele haben wir für dieſelbe bei der Addition die Null, denn $a + 0 = a$, bei der Multiplikation die Eins, denn $a \cdot 1 = a$ und bei dem Exponenten auch die 1, denn $a^1 = a$.

Andrerſeits ſind beiden Gattungen gemeinſam die unveränderliche Gröse einer Knüpfung, welche mit jeder Gröse in dieſer Knüpfung geknüpft werden kann, ohne dass ſich ihr Wert ändert. Als Beispiele haben wir für dieſelbe bei der Multiplikation die Null, denn $0 \cdot a = 0$, bei der Baſe die Eins, denn $1^a = 1$.

Wir werden zuerst dieſe beiden Grösen behandeln und dann zu den beiden Gattungen der Knüpfung und zu den beiden Gattungen der Zerlegung übergehen.

39. **Erklärung. Die nicht ändernde Gröse einer Knüpfung heist die Gröse, welche mit jeder Gröse a durch dieſe Knüpfung ver-**

bunden werden kann, ohne dass der Wert dieſer Gröse a geändert wird.

Das Zeichen der nicht ändernden Gröse für die allgemeine Knüpfung ist μ, geleſen my.

Es ist höchst wichtig, dass man ſich für jede Knüpfung die nicht ändernde Gröse merke. Für die Addition oder Fügung ist 0 die nicht ändernde Gröse, denn für jede Gröse a ist $a + 0 = a$; für die Multiplikation ist 1 die nicht ändernde Gröse, denn für jede Gröse a ist $a \cdot 1 = a$, für das Potenziren ist im Exponenten die 1 die nicht ändernde Gröse; denn für jede Gröse a ist $a^1 = a$.

Satz. $a \circ \mu = a \qquad \mu \circ a = a$ 40.

Die nicht ändernde Gröse einer Knüpfung mit jeder beliebigen Gröse a in dieſer Knüpfung geknüpft, ändert dieſe Gröse a nicht.

Unmittelbar aus der Erklärung 39.

Erklärung. Die unveränderliche Gröse einer Knüpfung heist die Gröse, welche mit jeder Gröse a durch dieſe Knüpfung verbunden werden kann, ohne dass ihr eigner Wert verändert wird. 41.

Das Zeichen der unveränderlichen Gröse für die allgemeine Knüpfung ist v, geleſen ypsilón.

Es ist auch hier wieder höchst wichtig, dass man für jede Knüpfung die unveränderliche Gröse merke. Für die Addition ist Unendlich oder ∞ die unveränderliche, denn für jede Gröse a ist $\infty + a = \infty$; für die Multiplikation ist 0 die unveränderliche, denn es ist $0 \cdot a = 0$; für die Potenzirung ist 1 in der Baſe die unveränderliche, denn es ist $1^a = 1$, auserdem ist für poſitiven Exponenten auch 0 in der Baſe eine unveränderliche, denn dann ist $0^a = 0$.

Satz. $a \circ v = v \qquad v \circ a = v$ 42.

Die unveränderliche Gröse einer Knüpfung bleibt auch, wenn man eine beliebige Gröse a in dieſer Knüpfung mit ihr knüpft, ganz unverändert.

Unmittelbar aus der Erklärung 41.

Erklärung. Bei der Knüpfung unterscheiden wir zwei Gattungen: eine trennbare und eine untrennbare. 43.

Man kann darüber, ob die beiden Gattungen der Knüpfung in die Grösenlehre gehören, verschiedener Anſicht ſein. Ich ſelbst habe in meiner Grösenlehre von 1872 die Betrachtung der beiden Gattungen von der Grösenlehre ausgeschlossen. Als ich jedoch die Bearbeitung der zeichnenden Raumlehre vornahm, welche eine Anwendung der Grösenlehre auf den Raum darstellt, erkannte ich, dass die Unterscheidung der beiden Gattungen der Knüpfung bereits in der Grösenlehre vorgenommen werden muss, und erweiterte demnach die Grösenlehre zunächst nach dieſer Richtung.

Erklärung. Die Zerlegung der Knüpfung heist die Verbindung 44.

zweier Grösen, durch welche das geknüpfte Geſammt wieder in ſeine geknüpften Grösen zerlegt wird.

Es giebt zwei Gattungen von Zerlegung der Knüpfung: die Trennung und die Löſung, erstre entspricht der trennbaren, letztre der untrennbaren Knüpfung.

Jeder Gattung und Art der Knüpfung entspricht auch eine Gattung und Art der Zerlegung. Wenn zwei oder mehre Grösen zu einem Geſammte geknüpft ſind, ſo kann man dieſe Knüpfung wieder zerlegen, indem man von dem Geſammte die eine Gröse wieder wegnimmt. In dieſem Falle ist alſo das Geſammt und eine wegzunehmende Gröse gegeben und wird die dann übrig bleibende Gröse geſucht.

Sei z. B. $7 + 8 = 15$ die Knüpfung, ſo ist $15 - 8 = 7$ die Zerlegung. ſei $3 \cdot 5 = 15$ die Knüpfung, ſo ist $15 : 5 = 3$ die Zerlegung, ſei $4^3 = 64$ die Knüpfung. ſo ist $64^{\frac{1}{3}} = 4$ die Zerlegung.

Bei der Zerlegung ist nun aber grose Vorſicht geboten, wenn noch ferner die Geſetze der Grösenlehre gelten ſollen. In der Grösenlehre darf nämlich. wie wir oben feststellten, jede Gröse nur einen und nicht mehre Werte haben, beachtet man dies nicht, ſo gerät man in die bedenklichsten Trugschlüsse. Dies mussten wir schon bei der Erklärung der Knüpfung ins Auge fassen. Wir erklärten daher die Knüpfung ſo: Die Knüpfung von Grösen heist jede Zuſammenstellung oder Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, ſofern das Ergebniss nur einen und nicht mehre Werte hat.

Ganz entsprechend werden wir nun auch bei der Zerlegung verfahren müssen. Wir nennen die Zerlegung eine Trennung, wenn es nur eine Gröse a giebt, welche mit derſelben Gröse b geknüpft, das Geſammt c liefert. Nimmt man dann b aus c fort, oder trennt man b von c, ſo bleibt nur eine Gröse a übrig; das Ergebniss der Trennung hat dann nur einen und nicht mehre Werte und gelten dann für die Trennung alle Geſetze der Knüpfung. Namentlich ist dann $(a \circ b) \smile b = a$. Dieſe Trennung entspricht der trennbaren Knüpfung.

Wenn es dagegen zwei oder mehre Grösen $a_1 \cdots a_n$ giebt, welche mit b geknüpft, das Geſammt c geben, ſo bleiben, wenn man b wieder aus c fortnimmt oder wenn man $c = a \circ b$ zerlegt, n Grösen $a_1 \cdots a_n$ übrig, von denen jede der Forderung genügt, ſei nun $\smile$ das Zeichen dieſer Gattung der Zerlegung, ſo hat $c \smile b$ alſo n verschiedene Werte und darf dann nicht mehr $a = (a \circ b) \smile b$ geſetzt werden, ſondern $(a \circ b) \smile b$ hat dann n Werte $a_1 \cdots a_n$ und wollte man alſo $a = (a \circ b) \smile b$ ſetzen, ſo würde es gleich $a_1 \cdots a_n$ ſein und alſo nicht mehr eine Gröse ſein, da dieſe nur einen und nicht mehre Werte hat bez. haben darf. Tut man es dennoch, ſo kommt man in die gröbsten Trugschlüsse. So ist in der Logik für jede Gröse a stets $a + a = a$, alſo darf man in der Logik nicht $a - a = 0$ einführen, da man ſonst zu groben Trugschlüssen gelangt; es ergiebt ſich dann beispielsweiſe, da auch Einigung gilt, $a = a + 0 = a + (a - a) = a + a - a = a - a = 0$, d. h. jede Gröse der Logik gleich Null; ebenſo darf man in der Logik, da in derſelben für jede Gröse a auch $a \cdot a = a$ ist, nicht $a : a = 1$ einführen, da man hier wieder zu Trugschlüssen gelangt; es ergiebt ſich dann beispielsweiſe, da auch wieder Einigung gilt, $a = a \cdot 1 = a \cdot (a : a) = a \cdot a : a = a : a = 1$, d. h. jede Gröse der Logik gleich Eins.

So ist in der Zahlenlehre $a \cdot 0 = 0$, alſo darf man in der Zahlenlehre nicht $1 = 0 : 0$ einführen, denn es ist dann $a = a \cdot 1 = a \cdot (0 : 0) = (a \cdot 0) : 0 = 0 : 0 = 1$, alſo jede Zahl gleich eins.

So ist in der Zahlenlehre $(+a)^2 = (-a)^2 = a^2$, alſo darf man hier nicht die zweite $\sqrt{a^2}$ als Gröse ſetzen; denn es wäre dann $+a = \sqrt{a^2} = -a$.

Es werden dieſe Beispiele hinreichen, um zu zeigen, dass man, wenn es bei der Zerlegung der Knüpfung mehre Grösen giebt, welche der Zerlegungsaufgabe genügen, die übrig bleibenden Grösen nicht einander gleich ſetzen darf. In dieſem Falle ist es aber wünschenswert, dass festgestellt werde, welche Grösen der Aufgabe genügen, und dass dieſe Feststellung ein einfaches Zeichen habe. Ich führe dafür das Zeichen $\cong$ ein, geleſen entsprechend gleich, es ist alſo $\sqrt{a^2} \cong \pm a$. Die Zerlegung nenne ich in dieſem Falle eine Löſung, das Ergebniss das Gelöſe.

Die ersten, welche eine streng wissenschaftliche Unterſuchung über die möglichen Zerlegungen in den einzelnen Ordnungen der Arithmetik und der Ausdehnungslehre vorgenommen haben, ſind meines Wissens die Gebrüder Grassmann geweſen. Dieſelben haben bereits 1847 die Geſetze ganz in der Form dargestellt, wie ſie in H. Grassmann, Arithmetik, Berlin 1861, erschienen ſind. Hier ist zuerst in der Wissenschaft bei jeder Art der Trennung zunächst der Beweis geführt, dass es nur eine Gröse giebt, welche der Aufgabe genügt, und ist zuerst bewieſen, dass man nie durch Null teilen darf.

In R. Grassmann, Formenlehre, Stettin 1872, ist ferner die Subtraktion und die Diviſion für die Logik und für die Kombinationslehre verworfen, welche von andern Gelehrten auch noch nach 1872 angewandt ist, ohne dass dieſe Gelehrten die Trugschlüsse bemerkt haben, denen ſie dadurch verfallen ſind und dass hienach alle Grösen der Logik einerſeits gleich Null und andrerſeits gleich Eins ſein müssen, dass alſo dann kein Geſetz der Logik gilt.

A. Die trennbare Knüpfung und die Trennung der Grösen.

Erklärung. Die trennbare Knüpfung der Grösen heist die 45.
Knüpfung, wenn es nur eine Gröse a giebt, welche mit der gegebenen Gröse b durch dieſe Knüpfung verbunden dasſelbe Geſammt $a \circ b$, bez. dasſelbe Geſammt $b \circ a$ giebt, ſofern die gegebene Gröse b ungleich der unveränderlichen Gröse dieſer Knüpfung ist.

Man nennt die unveränderliche Gröse der Knüpfung daher auch die untrennbare Gröse der Knüpfung, die andern Grösen heisen bei der trennbaren Knüpfung trennbare Grösen.

Es ist die Bedingung, dass die gegebene Gröse b ungleich der unveränderlichen Gröse der Knüpfung ſein müsse, eine ganz notwendige; denn nach 42 ist $v \circ a = v = v \circ c$, wo a und c ganz beliebige Grösen ſein können. Würde man hier alſo auch die Trennung zulassen, ſo würde folgen $a = c$, d. h. jede beliebige Gröse jeder andern beliebigen Gröse gleich.

Bei der Addition ist die unendliche Gröse ∞ die unveränderliche, hier ist alſo $\infty + a = \infty = \infty + c$; bei der Multiplikation ist Null die unveränderliche, hier ist alſo $0 \cdot a = 0 = 0 \cdot b$, in der Baſe ist die Eins die unveränderliche, hier ist $1^a = 1 = 1^b$, ebenſo ist im Exponenten die Null die unveränderliche, denn es ist $a^0 = 1^0 = b^0$.

46. **Satz. Bei trennbarer Knüpfung ist,**
wenn $a \circ b = a \circ c$ oder wenn $b \circ a = c \circ a$, wo $a \gtrless v$ (Annahme)
auch $b = c$ (Folgerung) oder
Je zwei Grösen (b und c), welche mit derſelben Gröse a durch trennbare Knüpfung verbunden gleiche Geſammte liefern, ſind einander gleich, ſofern die Gröse a der unveränderlichen Gröse der Knüpfung ungleich ist.

Beweis: Unmittelbar aus 45.

47. **Erklärung. Die Trennung (die secretio) zweier Grösen heist die Verbindung zweier Grösen, wenn zu dem gegebenen Geſammte a und einer gegebenen trennbaren Gröse b (d. h. einer Gröse, welche ungleich der unveränderlichen Gröse dieſer Knüpfung ist) die andre Gröse c geſucht wird, welche mit der gegebenen Gröse b in entsprechender Weiſe geknüpft, das Geſammt a giebt und es zugleich nur eine Gröse c giebt, welche mit b in dieſer Weiſe geknüpft, das Geſammt a liefert.**

Im Folgenden wird stets bei der Trennung vorausgeſetzt, dass die zu trennende Gröse ungleich der unveränderlichen Gröse dieſer Knüpfung ist.

48. **Erklärung. Das Zeichen der Trennung ist $\smile$, geleſen „trenn“. Vor dem Zeichen steht das Geſammt a, nach demſelben die zu trennende Gröse b. Die zu trennende Gröse heist der Trenner, die übrig bleibende Gröse heist das Bleibſel.**

49. **Grundformel der Trennung. $a = a \circ b \smile b$, $a = a \smile b \circ b$.**
Eine Gröse fortschreitend trennbar knüpfen und trennen oder fortschreitend trennen und trennbar knüpfen, ändert den Wert der Gröse nicht.

Nach der Erklärung 48 ist das Geſammt $a = c \circ b$, und ist auch $a \smile b = c$, mithin ist, wenn wir den Wert von a einſetzen, $c \circ b \smile b = c$. Nach der Erklärung 48 ist ebenſo $a \smile b = c$ und $c \circ b = a$, alſo, wenn wir den Wert von c einſetzen, $a \smile b \circ b = a$. Die Grundformel enthält alſo genau das, was in der Erklärung gegeben ist.

50. **Erklärung. Die Trenngröse heist die Gröse, welche mit a trennbar geknüpft $a \smile b$ giebt.**

Das Zeichen der Trenngröse ist $(\smile b)$, geleſen „Trenn b“.

Satz. $a \circ (\smile b) = a \smile (\circ b) = a \smile b$ **und** $a \smile (\smile b) = a \circ (\circ b) = a \circ b$. 51.
Eine Trenngröse knüpft man, indem man die entsprechende Knüpfgröse trennt und eine Trenngröse trennt man, indem man die entsprechende Knüpfgröse knüpft und statt eine Knüpfgröse zu knüpfen bez. zu trennen, kann man die Gröse ohne Vorzeichen knüpfen bez. trennen.

Beweis. 1. Es ist $a \circ (\smile b) = a \smile b$. Unmittelbar aus 50.

2. Es ist
$$\begin{aligned} a \smile (\circ b) &= a \smile (\circ b) \circ b \smile b && \text{(nach 49)} \\ &= a \smile (\circ b) \circ (\circ b) \smile b && \text{(nach 26)} \\ &= a \smile b && \text{(nach 49)} \end{aligned}$$

3. Es ist
$$\begin{aligned} a \smile (\smile b) &= a \smile (\smile b) \smile b \circ b && \text{(nach 49)} \\ &= a \smile (\smile b) \circ (\smile b) \circ b && \text{(nach 51.1)} \\ &= a \circ b && \text{(nach 49)} \end{aligned}$$

Satz. Es giebt den drei Arten der Knüpfung entsprechend drei 52.
Arten des Trennens: das Antrennen, das Eintrennen und das Abtrennen.

Die drei Arten der Knüpfung, welche wir im zweiten Abschnitt kennen gelernt haben, waren die Anreihung, für welche weder Einigung, noch Vertauschung gilt, die Einigung, für welche zwar Einigung, aber keine Vertauschung gilt, und die Vertauschung, für welche ſowohl Einigung als auch Vertauschung gilt.

Von den drei Arten der Trennung entspricht nun das Antrennen der Anreihung, das Eintrennen der Einigung und das Abtrennen der Vertauschung.

a. Das Antrennen der Grösen.

Erklärung. Das Antrennen (die dejunctio) heist die Tren- 53.
nung, wenn für die entsprechende Knüpfung nur das Geſetz der Anreihung gilt.

Geſetz des Antrennens. Für das Antrennen gelten nur die 54.
allgemeinen Geſetze der Trennung; dagegen darf man weder eine Klammer auflöſen, noch die Reihenfolge der Grösen ändern.

Beweis: Da das Antrennen nach 53 eine Trennung ist, ſo gelten für dieſelbe auch die allgemeinen Geſetze der Trennung, d. h. die Sätze 47 bis 51. Da ferner für die entsprechende Knüpfung nach 53 weder Einigung, noch Vertauschung gilt, ſo darf man keine Klammer auflöſen, und darf auch nicht einmal innerhalb einer Klammer die Reihenfolge der Grösen ändern, noch weniger darf man eine Gröse in einer Klammer mit einer Gröse auser der Klammer vertauschen.

b. Das Eintrennen der Grösen.

55. **Erklärung. Das Eintrennen (die sejunctio) heist die Trennung, wenn für die entsprechende Knüpfung die Einigung gilt.**

56. **Satz. In jeder Knüpfung beliebiger Grösen, für welche ſowohl Einigung, als auch Trennung gilt, kann man jede Knüpfklammer dieſer Knüpfung beliebig weglassen oder ſetzen ohne Aendrung der Vorzeichen und ohne Aendrung des Wertes. Die Ordnung der Grösen bleibt dabei unverändert.**

Beweis: 1. Es ſei die erste Gröse in der Klammer eine Gröse ohne Vorzeichen oder eine Knüpfgröse, ſo kann man nach 51 für jede Gröse, welche in der Klammer zu trennen ist, die entsprechende Trenngröse knüpfen. alſo z. B. statt $a\circ(b \smile c)$ ſetzen $a\circ(b\circ(\smile c))$. dann ſind alle Grösen in der Klammer nur zu knüpfen und kann man alſo die Klammer nach 33 weglassen und dann auser der Klammer wieder statt $\circ(\circ b)$ nur $\circ b$, statt $\circ(\smile b)$ nur $\smile b$ ſetzen nach 51.

2. Es ſei die erste Gröse in der Klammer eine Trenngröse, ſo kann man nach 56.1 alle folgenden Glieder in der Klammer in eine zweite Klammer schliesen, welche zu knüpfen ist. Die Formel hat dann die Form $a\circ(\smile b\circ c)$. Setzen wir hier $(\smile b) = d$, ſo ist

$$
\begin{aligned}
a\circ(\smile b\circ c) &= a\circ(d\circ c) && \text{(nach Annahme)}\\
&= a\circ(d\circ c)\smile c\circ c && \text{(nach 49)}\\
&= a\circ(d\circ c)\circ(\smile c)\circ c && \text{(nach 51)}\\
&= a\circ(d\circ c\circ(\smile c))\circ c && \text{(nach 33)}\\
&= a\circ(d\circ c\smile c)\circ c && \text{(nach 51)}\\
&= a\circ d\circ c && \text{(nach 49)}\\
&= a\circ(\smile b)\circ c && \text{(nach Annahme)}\\
&= a\smile b\circ c && \text{(nach 51)}
\end{aligned}
$$

57. **Satz.** $b\smile b = \smile b\circ b = \mu$ **oder Das Geſammt aus der Knüpfgröse und der entsprechenden Trenngröse und ebenſo das Geſammt aus der Trenngröse und der entsprechenden Knüpfgröse ist in der Eintrennung gleich der nicht ändernden Gröse.**

Beweis: Nach 40 ist $a = a\circ\mu$. Nach 49 und nach 56 ist aber auch $a = a\circ b\smile b = a\circ(b\smile b)$, und $a = a\smile b\circ b = a\circ(\smile b\circ b)$. Mithin ist nach 18 auch $a\circ\mu = a\circ(b\smile b) = a\circ(\smile b\circ b)$ Bei der Trennung giebt es aber nur eine Gröse, welche mit a geknüpft das gleiche Geſammt giebt, mithin ist auch $\mu = b\smile b = \smile b\circ b$, was zu beweiſen war.

58. **Satz. Statt eine Klammer, welche mehre Knüpf- bez. Trenngrösen enthält, einzutrennen, kann man die Vorzeichen der Grösen**

entgegengefetzt nehmen und die fo erhaltenen Grösen in umgekehrter Reihenfolge fortschreitend knüpfen, oder

Eine Trennklammer kann man, wenn Einigung gilt, nach Entgegenfetzung der Vorzeichen aller Grösen in der Klammer und, nachdem man die Reihenfolge diefer Grösen umgekehrt hat, weglassen oder fetzen.

Beweis: 1. Der Satz gilt, wenn in der Klammer nur zwei Grösen find; denn es ist

$$a \smile (\odot b \odot c) = a \smile (\circ(\odot b)\circ(\odot c)) = a \smile ((\odot b)\circ \odot c)) \quad \text{(nach 52)}$$
$$= a \smile (d \circ e) \quad \text{wo } d = (\odot b) \text{ und } e = (\odot c)$$
$$= a \smile (d \circ e) \circ d \smile d \quad \text{(nach 49)}$$
$$= a \smile (d \circ e) \circ d \circ e \smile e \smile d \quad \text{(nach 49)}$$
$$= a \smile (d \circ e) \circ (d \circ e) \smile e \smile d \quad \text{(nach 56)}$$
$$= a \smile e \smile d \quad \text{(nach 49)}$$
$$= a \smile (\odot c) \smile (\odot b) \quad \text{da } e = (\odot c) \text{ und } d = (\odot b)$$
$$= a \curlyvee c \curlyvee b \quad \text{(nach 51)}$$

2. Wenn der Satz für n Grösen in der Klammer gilt, fo gilt er auch für $n + 1$ Grösen in der Klammer. Angenommen nun, dass $a \smile (c_1 \circ c_2 \circ c_3 \cdots \circ c_n) = a \smile c_n \smile c_{n-1} \smile \cdots \smile c_3 \smile c_2 \smile c_1$ und $c_a = (\odot b_a)$ gefetzt ist, dann fetze $c_1 \circ c_2 \circ c_3 \cdots \circ c_n = C$, fo ist

$$a \smile (c_1 \circ c_2 \circ c_3 \cdots \circ c_n \circ c_{n+1}) = a \smile ((c_1 \circ c_2 \circ c_3 \cdots \circ c_n) \circ c_{n+1})$$
$$= a \smile (C \circ c_{n+1})$$
$$= a \smile c_{n+1} \smile C \quad \text{(nach 58,1)}$$
$$= a \smile c_{n+1} \smile (c_1 \circ c_2 \circ c_3 \cdots \circ c_n)$$
$$= a \smile c_{n+1} \smile c_n \cdots \smile c_3 \smile c_2 \smile c_1$$
$$\text{(nach Annahme)}$$

Setzen wir hierin wieder $c_a = (\odot b_a)$, fo wird jede Gröse $\smile(\odot b_a) = \curlyvee b_a$ nach 32, d. h. das Vorzeichen entgegengefetzt genommen.

Gefetz der Einigung und Eintrennung. In jeder Verbindung von Grösen durch Knüpfen mit Einigung oder durch Eintrennung kann man ohne Aendrung des Wertes jede Knüpfklammer unter Beibehaltung der Ordnung ohne Weitres, jede Trennklammer aber erst nach Entgegenfetzung der Vorzeichen und nach Umkehr der Reihenfolge aller Grösen in der Klammer beliebig weglassen oder fetzen. 59.

Beweis: Unmittelbar aus 56 und 58.

Satz. In jeder Knüpfung und Trennung von Grösen, für welche Einigung gilt, kann man statt der Einfachen (Elemente) auch belie- 60.

bige aus dieſen durch Knüpfung oder Trennung erzeugte Grösen, welche ungleich der nicht ändernden Gröse dieſer Knüpfung ſind, als Einfache (Elemente) ſetzen und daraus neue Grösen ableiten und gelten auch für dieſe alle Geſetze der Einigung und der Trennung.

Beweis: Für die Knüpfung ist der Satz bereits in Nummer 34 bewieſen. Die Geſetze der Trennung gelten aber auch nach 55, wie in den Nummern 56 bis 59 bewieſen, wenn für die Knüpfung die Geſetze der Einigung gelten, alſo gelten ſie auch hier.

c. Das Abtrennen der Grösen.

61. **Erklärung. Die Abtrennung (die disjunctio) heist die Trennung, wenn für die entsprechende Knüpfung die Vertauschung gilt.**

62. **Geſetz der Vertauschung und Abtrennung. In jeder Verbindung von Grösen durch Knüpfen mit Vertauschung oder durch Abtrennung kann man ohne Aendrung des Wertes jede Knüpfklammer ohne Weitres, jede Trennklammer nach Entgegenſetzung der Vorzeichen aller Grösen in der Klammer beliebig weglassen oder ſetzen, und die Ordnung der verknüpften Grösen beliebig ändern.**

Beweis: Die Klammern kann man ſämtlich nach 59 wegſchaffen, wenn man die richtige Reihenfolge beobachtet. Giebt man dann jeder Gröse $\smile e$, welche ein Trennzeichen hat, nach 51 die Form $\circ(\smile e)$, ſo ſind dann alle Grösen nur zu knüpfen und kann man alſo nach 37 auch die Ordnung der verknüpften Grösen beliebig ändern und der Gröse $\circ(\smile e)$ dann wieder die Form $\smile e$ geben.

63. **Satz. In jeder Knüpfung und Trennung von Grösen, für welche Vertauschung gilt, kann man statt der Einfachen (Elemente) auch beliebige aus dieſen durch Knüpfung oder Trennung erzeugte Grösen als Einfache (Elemente) ſetzen und daraus neue Grösen ableiten und gelten auch für dieſe alle Geſetze der Vertauschung und der Trennung.**

Beweis: Für die Knüpfung ist der Satz bereits in 38 bewieſen. Wenn aber die Geſetze der Vertauschung für die Knüpfung gelten, ſo gelten nach 61 auch die Geſetze der Abtrennung, alſo auch hier.

64. **Erklärung. Die untrennbare Knüpfung der Grösen heist die Knüpfung, wenn es mehre Grösen $a_1, a_2 \cdots$ giebt, welche mit der gegebenen Gröse b durch dieſe Knüpfung verbunden dasſelbe Geſammt $a_1 \circ b$, bezüglich dasſelbe Geſammt $b \circ a_1$ geben, ſofern die gegebene Gröse b ungleich der unveränderlichen Gröse dieſer Knüpfung ist.**

Auch hier muss die Bedingung hinzugefügt werden, wenn $b \gtrless v$ ist, denn wenn $b = v$ ist, ſo lässt ſich gar nicht erkennen, ob die Knüpfung trennbar oder

untrennbar ist, da in beiden Fällen für je zwei beliebige Grösen a und b nach 42 auch $r \circ a = r = r \circ b$ ist.

Erklärung. Die Lösung (die lysis) zweier Grösen heist die Verbindung zweier Grösen, wenn zu dem gegebenen Gesammte a und einer gegebenen Gröse b alle die Grösen $c_1, c_2 \cdots c_n$ gesucht werden, welche mit der gegebenen Gröse b in entsprechender Weise geknüpft, das Gesammt a geben und es zugleich mehr als eine solche Gröse c_1 giebt, welche dieser Forderung genügt. 65.

Erklärung. Das Zeichen der Lösung ist $\smile$, gelesen „los". Vor dem Zeichen steht das Gesammt a, nach demselben die zu lösende Gröse b. Die zu lösende Gröse heist der Löser; die Gesammtheit der Grösen, welche der Aufgabe genügen, heist das Gelös, jede einzelne dieser Grösen heist eine Wurzel. 66.

Beispiel aus der Zahlenlehre: $(a^4)^{\frac{1}{4}}$ hat die vier Werte $+a$, $-a$, $+ai$, $-ai$, die Gröse $a0:0$ hat die unendlich vielen Werte von Null bis $+$Unendlich.

Beispiel aus der Logik: Die Gröse, welche mit b gefügt $a + b$ giebt, hat die Werte $a + x(a + \bar{b})$, die Gröse, welche mit b multiplizirt $a \cdot b$ giebt, hat die Werte $a + x(a + \bar{b})$.

Der Name die Wurzel (die radix) ist für die einzelnen Werte, welche der Lösungsaufgabe $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ entsprechen, bereits allgemein in Gebrauch. Diesen Namen nehme ich hier auf und erweitere die Bedeutung auf jeden Wert eines Gelöses.

Erklärung. Das Gelös kann dem Gesammte nach Lösung des Lösers nur entsprechend gleich gesetzt werden. Das Zeichen hiefür ist $\cong$, gelesen „entsprechend gleich". Beim Gelös werden die entsprechenden Werte in scharfe Klammer gesetzt. 67.

Beispiele: $(a^4)^{\frac{1}{4}} \cong [\pm a, \pm ai]$ $\quad a \cdot 0:0 \cong$ Med. $[+\infty, -\infty]$.

Satz. Für die Lösung gilt kein Gesetz der Grösenlehre, da das Gelös nicht einen, sondern mehre Werte hat. Die Lösung kann erst dann angewandt werden, wenn die Lösung so bestimmt ist, dass jedem Werte der Lösung auch nur ein bestimmter Wert des Gelöses entspricht. 68.

Beispiel: $\sqrt[n]{a^n}$ hat bekanntlich n Werte. und es ist

$$\sqrt[n]{a^n} = a\left(\cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}\right).$$ Ebenso hat das Integral $\int ax^2$ bekanntlich eine ganz willkürliche Konstante w und es ist $\int ax^2 = w + \frac{1}{3}ax^3$. Hier muss in jedem einzelnen Falle der Wert der willkürlichen Konstante w bestimmt werden und hat dann das Intregal einen ganz bestimmten Wert.

Da man mit dem Gelöfe nicht weiter knüpfen kann, fo scheint es, als habe das Gelös für die strenge Denklehre oder für die Formenlehre und für die logischen Wissenschaften keinen Wert; dem ist aber nicht fo. Es ist in vielen Fällen fehr wichtig zu wissen, welcher Grösenkreis einer bestimmten Aufgabe Genüge leistet und dies ermittelt gerade die Löfung. Wir werden die Löfung in vielen Fällen auftreten fehen und die Wichtigkeit kennen lernen, welche diefelbe für die Wissenschaft hat. Dagegen giebt es auch andre Gelöfe, welche stets ganz unbestimmt bleiben, fo z. B. $\frac{1}{0}$; mit diefen Gelöfen darf man dann gar nicht rechnen.

4. Die Beziehung zweier Knüpfungen.

Wir haben bisher immer nur eine einzelne Knüpfung für fich betrachtet, ohne in einer Formel die eine Knüpfung mit einer andern Knüpfung in Beziehung zu fetzen. In diefer Nummer werden wir nun die Beziehung zweier Knüpfungen kennen lernen und dadurch die niedrigste und die nächsthöhere Ordnung der Grösenknüpfung gewinnen.

Eine Beziehung nennen wir es, wenn bei einer Knüpfung von Grösen jedes Einfache der einen Gröse mit der andern Gröse zu knüpfen ist, z. B.

$$3\cdot 8 = (1+1+1)\cdot 8 = 1\cdot 8 + 1\cdot 8 + 1\cdot 8.$$

Wir haben hier zwei Knüpfungen: eine niedere $1+1+1$ und eine höhere $3\cdot 8$.

69. **Erklärung der Fügung. Die Fügung oder Addition (gr. die prósthesis, lat. die additio) heist die niedrigste Knüpfung der Grösen, für welche es keine Beziehung zu einer noch niederen Knüpfung giebt.**

Das Stück (der summandus) heist die zu fügende Gröse.

Die Summe (die summa) heist das Gefammt der Fügung.

Die Einfachgrösen (die Elementargrösen) heisen die Einfachen (die Elemente) und die durch fortschreitende Fügung derfelben erzeugten Grösen.

70. **Erklärung. Das Zeichen der Fügung ist ein stehendes Kreuz $+$, gelefen „plus" oder „zu". Eine Gröse mit einem Kreuz als Vorzeichen heist eine Plusgröse. Eine Gröse ohne Vorzeichen ist gleich der Plusgröse oder $a = +a$. Eine Klammer, vor welcher das Kreuz $+$ steht, heist eine Plusklammer. Das Zeichen der Summe von n Grösen $a_1, a_2 \cdot \cdot a_n$ ist $\underset{1,n}{S}\, a_\alpha = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.**

Wenn kein Anfangszeichen unter dem Summenzeichen steht, fo beginnt die Reihe mit a_0 oder $\underset{,n}{S}\, a_\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Die Fügung (die additio) ist alfo die niedrigste Ordnung der Grösenlehre, wie des Denkens überhaupt. In ihr werden die vom Geiste gefetzten Einfachen (die Elemente) an einander geknüpft, daraus die Grösen gebildet und diefe weiter

mit einander geknüpft, aber ſo, dass keine Beziehung zu einer noch niederen Ordnung der Knüpfung gilt.

Erklärung. Die nicht ändernde Gröse der Fügung heist Null. Das Zeichen der Null ist 0. 71.

Die Null ist alſo diejenige Gröse, welche zu jeder Gröse gefügt werden kann, ohne den Wert derſelben zu ändern; oder

Die Knüpfung, für welche Null die nicht ändernde Gröse ist, ist die Fügung oder die Addition.

Eine unveränderliche Gröse für die allgemeine Fügung giebt es nicht, ſofern man nicht die unendliche Gröse, deren Zeichen ∞ ist, in die Fügung einführen will.

Satz. $a + 0 = a \qquad 0 + a = a$ 72.

Null zu jeder Gröse gefügt, ändert die Gröse nicht.

Beweis: Unmittelbar aus 71.

Satz. Es giebt drei Arten der Fügung: 1. die Anfügung, für welche weder Einigung noch Vertauschung der Stücke gilt, 2. die Einfügung, für welche zwar Einigung, aber keine Vertauschung der Stücke gilt und 3. die Zufügung, für welche ſowohl Einigung, als auch Vertauschung der Stücke gilt. 73.

Man könnte hier für die verschiedenen Gattungen der Fügung verschiedene Namen einführen und würden ſich in dem Falle die folgenden Namen empfehlen:

	Allgemeines Fügen.	Aeuseres Fügen.	Inneres Fügen.
Fürs Fügen:	Reihen.	Fügen.	Stellen.
Anfügen:	Anreihen.	Anfügen.	Anstellen.
Einfügen:	Einreihen	Einfügen.	Einstellen.
Zufügen:	Zureihen.	Zufügen.	Zustellen.

Ich halte dies aber für überflüssig. Der Name Fügen ist ganz allgemein und kann für alle Zweige verwandt werden. Welche Gattung der Fügung gemeint ist, das ergiebt ſich leicht aus den Sätzen, wenn geſagt wird, was gefügt werden ſoll. In der Logik und in der Kombinationslehre nennt man übrigens bereits das Fügen allgemein ein Aufstellen und redet vom Aufstellen der Gebinde oder Kombinationen, vom Aufstellen der Geänder oder Variationen u. ſ. w. Dies kann man zur Unterscheidung beibehalten.

Erklärung der Anfügung. Die Anfügung (die additio im weiten Sinne) heist die Fügung, ſofern für die Grösen derſelben weder Einigung noch Vertauschung gilt. 74.

Die Anfügung ist die einzige Form der Fügung, bei welcher jede einzelne Ordnung und Klammerſetzung von jeder andern verschieden und nur ſich ſelbst gleich ist. Bei der Anfügung ist nicht nur $a + b \gtrless b + a$, ſondern auch $a + b + c \gtrless a + (b + c)$.

Jedes wissenschaftliche System, ſelbst jedes Wörterbuch giebt uns ein Beispiel der Anfügung; ebenſo jedes Buch, wo die Folge und die Zuſammenordnung der Gedanken eine feste ist, für welche weder Vertauschung noch auch nur Einigung gilt.

75. **Gefetz der Anfügung. In jeder Knüpfung durch Anfügung darf man weder eine Klammer löfen, noch die Reihenfolge der Grösen ändern; auch giebt es für diefe Art der Knüpfung keine höhere Ordnung der Knüpfung.**

Beweis: Da nicht Einigung gilt, fo darf man keine Klammer löfen; da nicht Vertauschung gilt, fo darf man auch innerhalb einer Klammer nicht einmal die Reihenfolge der Grösen ändern; noch weniger darf man eine Gröse in einer Klammer mit einer Gröse auser der Klammer vertauschen. Endlich giebt es auch für das Anfügen nicht eine Knüpfung höherer Ordnung; denn für jede Knüpfung höherer Ordnung muss das Beziehungsgefetz zur niederen Knüpfung gelten; dies aber erfordert, wie wir demnächst fehen werden, die Einigung für die niedere Knüpfung. Da nun für die Anfügung keine Einigung gilt, fo giebt es auch für die Anfügung keine höhere Ordnung der Knüpfung.

76. **Erklärung der Einfügung. Die Einfügung (die additio im mittlern Sinne) heist die Fügung, fofern für diefelbe die Grundformel der Einigung gilt.**

77. **Grundformel der Einfügung (der additio im mittlern Sinne).**

$$a + (b + e) = a + b + e$$

oder in Worten Statt zu dem zweiten Stücke ein Einfaches (ein Element) zu fügen, kann man es zur Summe fügen und: Statt zu der Summe ein Einfaches zu fügen, kann man es zu dem zweiten Stücke fügen.

78. **Gefetz der Einfügung (der additio im mittlern Sinne). In jeder Knüpfung der Grösen durch Einfügung kann man ohne Aendrung des Wertes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen. Die Summe ist wieder eine Einfachgröse (eine Elementargröse).**

Beweis: Nach 77 gilt die Grundformel der Einigung, alfo nach 30 bis 34 auch das Gefetz der Einigung, d. h. man kann die Klammern beliebig fetzen oder weglassen, und das Ergebniss ist wieder eine Gröse, deren Einfache fortschreitend gefügt find, d. h. nach 69 eine Einfachgröse (eine Elementargröse).

79. **Erklärung der Zufügung. Die Zufügung (die additio im engen Sinne) heist die Fügung, fofern für diefelbe auser der Grundformel der Einigung auch die Grundformel der Vertauschung gilt.**

80. **Grundformel der Zufügung (der peradditio oder der additio im engen Sinne).** $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$

Bei der Zufügung kann man zwei Einfache (zwei Elemente) vertauschen.

Gefetz der Zufügung (der additio im engen Sinne). **In jeder Knüpfung der Grösen durch Zufügung kann man ohne Aendrung des Wertes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern, die Summe ist wieder eine Einfachgröse (eine Elementargröse).** 81.

Beweis: Nach 77 und 78 gilt für jede Zufügung zunächst das Gefetz der Einfügung oder der Einigung, d. h. man kann ohne Aendrung des Wertes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen, und die Summe ist wieder eine Einfachgröse. Nach 79 und 80 gilt ferner die Grundformel der Vertauschung, alfo gilt nach 36 bis 38 auch das Gefetz der Vertauschung, d. h. man kann ohne Aendrung des Wertes die Ordnung der Stücke beliebig ändern. Mithin gilt das ganze Gefetz der Zufügung.

Erklärung des Webens. Das Weben (die multiplicatio) **heist die mittlere Ordnung der Grösenknüpfung, für welche das Gefetz der einfachen Beziehung zur Fügung gilt, d. h. statt die Summe einer Gröse und eines Einfachen mit einer andern Gröse zu weben, kann man die beiden Grösen mit einander weben und ebenfo das Einfache mit der andern Gröse weben und die Ergebnisse fügen.** 82.

Die Bedingung ist, dass für das Fügen wenigstens Einfügen gilt und dass ein Einfaches (Element) mit einem Einfachen gewebt wieder ein Einfaches giebt.

Was die beiden Bedingungen betrifft, fo muss zunächst festgestellt werden, was $e_a \cdot e_b$ fein foll, wo ein Einfaches mit einem Einfachen gewebt ist. Ist dies wieder eine Gröse und zwar ein Einfaches, welches nur einen Wert hat, fo kann man weiter damit knüpfen, ist es nicht ein Einfaches, fondern hat es mehre Werte, fo gilt für die Webung kein Gefetz der Grösenknüpfung.

Ebenfo wenn für die niedere Knüpfung Einigung gilt, fo dass $a + b + e = a + (b + e)$ ist, dann gilt, wie in Satz 86 ff. bewiefen wird, das ganze Gefetz der Beziehung, gilt dagegen für die niedere Knüpfung keine Einigung, fo gilt auch nicht Satz 86, noch irgend ein andrer Satz der Beziehung.

Für das Weben empfiehlt es fich, diefe Erklärung zunächst an einigen Beispielen klar zu machen, z. B.

$$(7 + 1)\,5 = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \text{ oder } 8 \cdot 5 = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 5.$$
$$7\,(8 + 1) = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 1 \text{ oder } 7 \cdot 9 = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 1.$$
$$(a + 1)\,m = am + 1m \text{ und } a\,(m + 1) = am + a1.$$

Es wird zweckmäsig fein, dies bis zur vollsten Anschaulichkeit der Erklärung am kleinen Einmaleins einzuüben, z. B.

$$2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 3 + 3 = 6; \; 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 6 + 3 = 9;$$
$$4 \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 9 + 3 = 12 \text{ u. f. w.}$$

Und ebenfo

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6; \; 2 \cdot 4 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8 \text{ u. f. w.}$$

Die Erklärung bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Die fo eben gegebene Erklärung ist die allein scharfe und streng wissenschaftliche und zugleich die einfachste (die elementarste). Aus ihr lässt fich das ganze Beziehungsgefetz ableiten. Andrerfeits enthält diefe Erklärung aber auch nicht mehr, als unumgänglich nötig ist, um das Beziehungsgefetz daraus ableiten zu können.

Endlich ist diefe Erklärung auch allein einfach (elementar). Der Lehrer, welcher im Rechenunterrichte die Kinder das Gefetz der Beziehung beim Vervielfachen (beim Multipliziren) lehrt, wo bekanntlich die 1 das Einfache ist, zeigt den Kindern, dass einmal zwei zwei ist, und fährt dann fort: Zweimal zwei ist einmal zwei und einmal zwei, einmal zwei ist zwei und noch einmal zwei ist wieder zwei, zwei und zwei ist vier, alfo ist zweimal zwei auch vier. Dreimal zwei ist zweimal zwei und einmal zwei, zweimal zwei ist vier, einmal zwei ist zwei, vier und zwei ist fechs, alfo ist dreimal zwei auch fechs. Viermal zwei ist dreimal zwei und einmal zwei, dreimal zwei ist fechs, einmal zwei ist zwei, fechs und zwei ist acht, alfo ist viermal zwei auch acht u. f. w. Die Erklärung ist alfo ganz einfach (elementar).

Das Weben (die multiplicatio) ist die mittlere Ordnung der Grösenknüpfung. Sie fetzt die Knüpfung der Einfügung, bez. der Zufügung und die in diefer Knüpfung erzeugten Grösen bereits voraus, und erzeugt die Grösen der mittleren Ordnung durch Beziehung nach den Formeln $(a + b) c = ac + bc$ und $a (b + c) = ab + ac$.

Das Weben oder die mittlere Ordnung der Knüpfung, für welche das Gefetz der einfachen Beziehung zur Knüpfung erster Ordnung, der Fügung oder additio gilt, wird in der Zahlenlehre das Multipliziren oder Vervielfachen genannt. Für die Zahlenlehre behalte ich diefen Ausdruck, da er für die Zahlen fehr gut passt, bei. Dagegen passt diefer Ausdruck gar nicht für die andern Zweige der Grösenknüpfung. So z. B. ist es ganz unpassend, vom Vervielfachen der Begriffe in der Logik oder vom Vervielfachen der Aufstellungen in der Kombinationslehre, oder auch nur vom Vervielfachen der Grösen in der Ausdehnungslehre zu sprechen. Man würde durch folche Ausdrücke die gefährlichsten Missverständnisse herbeiführen. Der Ausdruck vervielfachen eignet, wie gefagt, nur der Zahlenlehre; für die Grösenlehre und für die andern Zweige der Grösenknüpfung bedarf man demnach neuer Ausdrücke.

In der Grösenlehre von 1872 habe ich für diefe mittlere Ordnung der Knüpfung den Namen „Weben" in die Wissenschaft eingeführt, der die Eigentümlichkeit diefer Knüpfungsart fehr passend bezeichnet; denn wie beim Weben der Fäden jeder Faden des Aufzugs mit jedem Faden des Einschlags verbunden oder geknüpft wird, fo wird bei der mittlern Ordnung der Knüpfung jedes Stück des einen Faches oder Faktors mit jedem des andern geknüpft. Das folgende Beispiel giebt uns ein klares Bild der Sache.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
α	αa	αb	αc	αd	αe	αf	αg	αh	αi	αk	αl
β	βa	βb	βc	βd	βe	βf	βg	βh	βi	βk	βl
γ	γa	γb	γc	γd	γe	γf	γg	γh	γi	γk	γl
δ	δa	δb	δc	δd	δe	δf	δg	δh	δi	δk	δl
ε	εa	εb	εc	εd	εe	εf	εg	εh	εi	εk	εl
ζ	ζa	ζb	ζc	ζd	ζe	ζf	ζg	ζh	i	ζk	ζl

Um aber auch auszudrücken, dass das Weben hier dasſelbe bezeichnet, was man gewöhnlich ein Multipliziren nennt, ſo füge ich den lateinischen Namen multiplicare hinzu. Zwar passt dieſer Name eigentlich auch nur für die Zahlenlehre; aber man ist gewöhnt, die lateinischen Namen vieldeutig zu gebrauchen und bald dies, bald jenes darunter zu verstehen; es ist alſo auch erlaubt, den Namen multiplicare ſo zu behandeln. Der deutsche Name „weben“ ist dann der eindeutige, streng wissenschaftliche, der lateinische der erläuternde, auf die Knüpfungsart der Zahlenlehre hindeutende.

Von dem Weben giebt es nun übrigens in den verschiedenen Zweigen ſehr verschiedene Gattungen: in der Zahlenlehre das Vervielfachen, für welches $1 \cdot 1 = 1$ ist, in der Ausdehnungslehre das Flachen, für welches $ee = 0$ und $e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}} = - e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{a}}$ ist, und das innre Weben, für welches $e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}} = 0$ und $ee = 1$ ist, in der Logik das Bestimmen, für welches $ee = e$ und $e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}} = 0$ ist, und in der Kombinationslehre das Binden der Geschiede (der Komplexionen), für welches $e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}} = e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{a}}$ ist, wobei entweder $aa = 0$, oder $aa \gtrless 0$ geſetzt wird und das Binden der Geänder (der Variationen), für welches $e_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{b}} \gtrless e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{a}}$ ist, wobei wieder entweder $aa = 0$, oder $aa \gtrless 0$ geſetzt wird.

Hier ist es alſo unerlässlich, die verschiedenen Arten des Webens zu unterscheiden und verschiedene unterscheidende Namen für die einzelnen Gattungen einzuführen.

Erklärung. Das Zeichen des Webens ist ein Punkt oder das blose Nebeneinanderschreiben der zu webenden Grösen, z. B. a·b oder ab geleſen a mal b oder ab. 83.

Die zu webende Gröse heist der Fach (der factor), das Geſammte des Webens heist das Zeug (das productum). Eine Gröse, vor der ein Malzeichen steht, heist eine Malgröse.

Der Name der Fach stammt vom Urverb pak. sskr. paç. lat. pac. goth. fahan. nhd. fahen; fangen in der Bedeutung fange, binde. dann fange an, mache.

Der Fach ist alſo ein Gerät zum Fangen, zum Aufnehmen; dann in den Zuſammenſetzungen „einfach, zehnfach, hundertfach, das Vierfache" etc. zur Bezeichnung der Faktoren allgemein üblich, mithin echt deutsch.

Der Name das Zeug stammt vom Urverb tagh, tangh, sskr. taksh, gr. teúchō tyn-chánō, étych-on erzeuge, wirke, téch-nē Kunst, lat. texo webe, ahd. ziugan. nhd. zeugen, erzeugen, weben, davon Zeug, ahd. ziuc, schwd. tyg, das Gewebte. das Gerät.

84. **Erklärung. Die Klammer heist eine Malklammer, wenn die Grösen in und auser der Klammer durch Weben geknüpft ſind; ſie heist eine Beziehungsklammer, wenn die Grösen in der Klammer durch Fügen, dieſe Klammer aber mit der Gröse auser der Klammer durch Weben geknüpft ſind.**

Beispiele: Malklammer $a(bc)$; Beziehungsklammer $a(b+c)$, $(a+c)b$, $(a+b)(c+d)$.

Beim Weben oder Multipliziren ist es wichtig, auf das Geſetz zu achten, welche Klammer ohne Aendrung des Wertes fortgelassen werden kann. In jeder einfachen Knüpfungsart können die Klammern fortgelassen werden, wenn fortschreitend geknüpft wird: ſo ist $(a+b)+c = a+b+c$ und $(ab)c = abc$. Wenn dagegen zwei Knüpfungsarten gemengt ſind, ſo muss, ſofern keine Klammer steht, zunächst erst die höhere Knüpfung ausgeführt werden, ehe die niedere Knüpfung ausgeführt wird, ſo ist $a + bc = a + (bc)$, $ab + c = (ab) + c$, $ac + bd = (ac) + (bd)$.

85. **Erklärung. Jedes Formelzeichen (Funktionszeichen), welches ſich auf die folgenden Grösen bezieht, muss, ſofern keine Klammer steht, auf alle folgenden Grösen desſelben Gliedes bezogen werden. Soll das Formelzeichen ſich nicht auf alle dieſe Grösen beziehen, ſo muss es mit den Grösen, auf welche es ſich beziehen ſoll, in eine Klammer geschlossen werden.**

Es ist dieſe Regel von allergröster Wichtigkeit zur Vermeidung unnützer Klammern; man kann durch Beobachten derſelben etwa 90 % der ſonst erforderlichen Klammern ersparen. Wir werden gleich in den folgenden Sätzen 87 bis 89 die Anwendung dieſer Regel kennen lernen.

86. **Grundformel des Webens (der Multiplikation).**

$$(a + e)b = ab + eb, \qquad a(b + e) = ab + ae \text{ und } e_1e_2 = e$$

Statt zu dem einen Fache (dem einen Faktor) ein Einfaches zu fügen, kann man zu dem Zeuge der beiden Fache das Zeug des Einfachen mit dem andern Fache fügen und

Das Zeug oder Produkt zweier Einfachen ist wieder ein Einfaches.

Aus dieſer Grundformel folgen nun die Geſetze der einfachen Beziehung oder des Webens durch fortleitende (induktorische) Beweiſe.

87. **Satz. Das Zeug oder Produkt ae und eb eines Einfachen (eines Elementes) und einer Einfachgröse ist wieder eine Einfachgröse, d. h. eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft ſind.**

Beweis nach Einfachen (elementar) in Bezug auf a.

1. Der Satz gilt, wenn a nur ein Einfaches enthält; denn $e_1 e_2$ ist ein Einfaches (nach 86).
2. Wenn der Satz für a gilt (Annahme), so gilt er auch für die Gröse $a + e_1$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn es ist $(a + e_1)e = ae + e_1 e$ (nach 86). Nun ist ae eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind nach der Annahme, $e_1 e$ ist ein Einfaches (nach 86) und fortschreitend geknüpft, also ist auch $ae + e_1 e$ eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.
3. Also gilt der Satz nach 24 auch allgemein.

Und ebenso folgt, dass eb. eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.

Satz. Das Zeug oder Produkt ab zweier Einfachgrösen ist wieder eine Einfachgröse, d. h. eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind und gelten für die Zeuge alle Gesetze der Einfügung. 88.

Beweis nach Einfachen (elementar) in Bezug auf b.

1. Der Satz gilt, wenn b nur ein Einfaches enthält (nach 87).
2. Wenn der Satz für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme), so gilt er auch für die Gröse $b + e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn nach 86 ist
$$a(b + e) = ab + ae.$$
Hier aber ist ab eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind (nach Annahme) und ae eine ebensolche Gröse (nach 87); die Summe zweier Grösen, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind, ist aber nach 78, wenn Einfügung gilt, wieder eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind, also ist auch $a(b + e)$ eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.
3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Satz. $$(a + b)c = ac + bc$$ 89.
$$c(a + b) = ca + cb$$ **oder in Worten**

Das Zeug oder Produkt einer Gröse mit einer Summe aus 2 Grösen ist gleich der Summe aus den Zeugen jener Gröse mit den beiden Grösen.

Formelbeweis: Nach Einfachen (elementar) in Bezug auf b.

1. Die Gleichung gilt, wenn b nur ein Einfaches enthält (nach 86).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme),

ſo gilt ſie auch für die Gröse $b + e$, welche ein Einfaches e mehr enthält; denn

$$[a + (b + e)]c = [(a + b) + e]c \quad \text{(nach 77)}$$
$$= (a + b)c + ec \quad \text{(nach 86)}$$
$$= ac + bc + ec \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= ac + (bc + ec) \quad \text{(nach 77)}$$
$$= ac + (b + e)c \quad \text{(nach 86)}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 24 allgemein.

Und ebenſo folgt $c(a + b) = ca + cb$.

90. **Satz.**

$$(\underset{1,n}{S} a_\alpha)b = \underset{1,n}{S} a_\alpha b \quad \text{oder} \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \cdots + a_n b$$

$$b(\underset{1,n}{S} a_\alpha) = \underset{1,n}{S} b a_\alpha \quad \text{oder} \quad b(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ba_1 + ba_2 + \cdots + ba_n$$

Das Zeug oder Produkt einer Gröse mit einer Summe aus beliebig vielen Grösen ist gleich der entsprechenden Summe aus den Zeugen jener Gröse mit dieſen einzelnen Grösen oder —
Eine Beziehungsklammer löst man, indem man jede Gröse in der Klammer mit der Gröse auser der Klammer webt und die entstandenen Zeuge einfügt.

Beweis in Formeln fortleitend (induktorisch) in Bezug auf $\underset{1,n}{S} a_\alpha$.

1. Der Satz gilt, wenn die Summe $\underset{1,n}{S} a_\alpha$ nur 2 Grösen $a_1 + a_2$ enthält, nach 89.

2. Wenn der Satz für eine Summe $\underset{1,n}{S} a_\alpha$ aus n Grösen gilt (Annahme), ſo gilt er auch für die Summe $\underset{1,n+1}{S} a_\alpha$, welche eine Gröse a_{n+1} mehr enthält (Folgerung); denn

$$[\underset{1,n+1}{S} a_\alpha]b = [(\underset{1,n}{S} a_\alpha) + a_{n+1}]b \quad \text{(nach 14)}$$
$$= (\underset{1,n}{S} a_\alpha)b + a_{n+1}b \quad \text{(nach 89)}$$
$$= (\underset{1,n}{S} a_\alpha b) + a_{n+1}b \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= \underset{1,n+1}{S} a_\alpha b \quad \text{(nach 14)}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 23 allgemein.

Und ebenſo folgt, dass $b[\underset{1,n}{S} a_\alpha] = \underset{1,n}{S} b a_\alpha$ ist.

Beweis in Worten: Man stelle in der Summe nach 78, da Einfügung gilt, alle Klammern her, ſo ist jede Summe eine Summe aus 2 Grösen. Das Zeug einer Gröse b mit dieſer Summe ist gleich der Summe aus den beiden Zeugen jener Gröse b mit den beiden einzelnen Grösen. Ist nun eine der beiden Grösen noch eine Summe, ſo ver-

wandelt ſich ganz auf dieſelbe Weiſe das Zeug jener Gröse b mit dieſer Summe wieder in die Summe zweier Zeuge jener Gröse b mit den einzelnen Grösen und ſofort, bis keine der Grösen mehr eine Summe andrer Grösen ist und alſo das Ganze in eine Summe aus den Zeugen der Gröse b und der einzelnen Grösen umgewandelt ist.

Satz. $(\underset{1,n}{S}a_a)(\underset{1,m}{S}b_b) = \underset{1,n\,1,m}{\overline{S\ a_a b_b}}$ oder 91.

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_m) = \begin{array}{l} a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_m \\ +a_2b_1+a_2b_2+\cdots+a_2b_m \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ +a_nb_1+a_nb_2+\cdots+a_nb_m \end{array}$$

Das Zeug (das Produkt) zweier Summen erhält man, indem man jede Gröse der einen Summe mit jeder der andern Summe webt und die erhaltenen Zeuge einfügt. Die erhaltene Summe ist wieder eine Gröse, deren Einfache (deren Elemente) fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis in Formeln: Wir ſetzen $\underset{1,m}{S}b_b = B$, dann ist

$$\begin{aligned}(\underset{1,n}{S}a_a)(\underset{1,m}{S}b_b) &= (\underset{1,n}{S}a_a)B = \underset{1,n}{S}a_aB && \text{(nach 90)}\\ &= \underset{1,n}{S}a_a(\underset{1,m}{S}b_b) && \text{(nach Setzung)}\\ &= \underset{1,n.1,m}{S}a_ab_b\end{aligned}$$

Da $a_a(\underset{1,m}{S}b_b) = \underset{1,m}{S}a_ab_b$ ist nach 90, wo $_{1,m}$ ſich auf b bezieht.

Beweis in Worten: Man betrachte zuerst die zweite Summe als eine Gröse, ſo ist das Zeug der beiden Summen gleich der Summe aus den Zeugen, welche man erhält, wenn man jede Gröse der ersten Summe mit der ganzen zweiten Summe webt (nach 90). Und jedes ſolche Zeug ist gleich der Summe der Zeuge, welche man erhält, wenn man die betreffende Gröse der ersten Summe mit jeder Gröse der zweiten Summe webt. Die erhaltene Summe aber ist nach 88 wieder eine Gröse, deren Einfache (deren Elemente) fortschreitend geknüpft ſind.

Satz. $(\underset{1,n}{S}a_a)(\underset{1,m}{S}b_b)(\underset{1,p}{S}c_c)\cdots = \underset{1,n.1,m.1,p.}{S}a_ab_bc_c\cdots$ 92.

Das Zeug (das Produkt) mehrer Summen erhält man, indem man jede Gröse der ersten Summe mit jeder der zweiten Summe webt, jedes erhaltene Zeug mit jeder Gröse der dritten Summe webt u. ſ. w. und die erhaltenen Zeuge einfügt. Die erhaltene Summe ist wieder eine Gröse, deren Einfache (deren Elemente) fortschreitend geknüpft ſind.

Beweis: Man schliese zuerst die ersten beiden Fache in eine Klammer

$$(\underset{1,n}{S} a_{\mathfrak{a}})(\underset{1,m}{S} b_{\mathfrak{b}})(\underset{1,p}{S} c_{\mathfrak{c}})\cdots = [(\underset{1,n}{S} a_{\mathfrak{a}})(\underset{1,m}{S} b_{\mathfrak{b}})](\underset{1,p}{S} c_{\mathfrak{c}})\cdots$$
$$= ([\underset{1,n.1,m.}{S} a_{\mathfrak{a}} b_{\mathfrak{b}}](\underset{1,p}{S} c_{\mathfrak{c}}))\cdots \qquad \text{(nach 91)}$$
$$= (\underset{1,n.1,m.1,p.}{S} a_{\mathfrak{a}} b_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{c}})\cdots \qquad \text{(nach 91)}$$

u. f. w.

Es empfiehlt fich, bei jedem der Sätze eine Uebung der Beziehung namentlich bei der Multiplikation vorzunehmen, um die Anschauung an Zahlenbeispielen zu gewinnen.

93. **Gefetz des Webens (der Multiplikation). In jeder Grösenknüpfung durch Weben (durch Multiplikation) kann man ohne Aendrung des Wertes jede Plusklammer beliebig fetzen oder weglassen und jede Beziehungsklammer auflöfen,**

indem man jedes Stück des einen Fachs (des einen Faktors) mit jedem des andern webt und die Zeuge einfügt; das Ergebniss ist wieder eine Einfachgröse (eine Elementargröse).

Beweis: Nach 92 gilt das Gefetz der Beziehung, wie es in dem Satze ausgesprochen ist, und da auserdem Einfügung gilt, fo kann man nach 78 auch die Plusklammer beliebig fetzen oder weglassen.

Für das Weben empfiehlt fich zunächst und vor allem die Einübung des Beziehungsgefetzes an einer Reihe von Beispielen. Hier ist schon eine grösere Mannigfaltigkeit der Uebung möglich. Man entwickle nur z. B.

$(a+b)(b+c)=ab+ac+bb+bc \quad (a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb.$

$(a+b+c)(d+e+f)=ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf.$

$(a+b)(b+c)(c+d)=abc+abd+acc+acd+bbc+bbd+bcc+bcd.$

94. **Satz.** $\quad 0 \cdot a = 0 \qquad a \cdot 0 = 0$

und wenn $ab \gtrless 0$, fo ist fowohl $a \gtrless 0$, als auch $b \gtrless 0$.

Null ist die unveränderliche Gröse des Webens oder Null giebt mit jeder Gröse gewebt Null und wenn ein Zeug oder Produkt zweier Grösen ungleich Null ist, fo ist jede der beiden Grösen ungleich Null und umgekehrt.

Beweis: $ab = a(b+0)$ (nach 72)

$= ab + a0$ (nach 93)

Mithin ist a0 eine Gröse, welche zu ab gefügt, dies nicht ändert, d. h. es ist Null (nach 71). Wenn ferner $ab \gtrless 0$, fo muss fowohl $a \gtrless 0$ als $b \gtrless 0$ fein, denn wäre eine Gröse z. B. $a = 0$, fo wäre $ab = 0 \cdot b = 0$, was gegen die Annahme ist.

95. **Erklärung. Die Eins heist dasjenige Einfache (das Element), welches mit jedem Einfachen ohne Aendrung des Wertes gewebt werden kann. Das Zeichen der Eins ist 1.**

Satz. $e \cdot 1 = e \qquad 1 \cdot e = e$ 96.
Eins ändert, mit einem beliebigen Einfachen gewebt (multiplizirt), den Wert desselben nicht.

Satz. $1 \cdot 1 = 1$ 97.
Eins ist diejenige Gröse, welche mit sich selbst gewebt (oder multiplizirt) sich nicht ändert.

Satz. $a \cdot 1 = a \qquad 1 \cdot a = a$ 98.
Eins ist die nicht ändernde Gröse des Webens oder
Eins ändert, mit einer beliebigen Gröse gewebt (multiplizirt), den Wert derselben nicht.

Beweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf a.

1. Der Satz gilt, wenn a nur ein Einfaches enthält (nach 96)
2. Wenn der Satz für eine beliebige Gröse a gilt (Annahme), so gilt er auch für $a + e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$(a + e) \cdot 1 = a \cdot 1 + e \cdot 1 \qquad \text{(nach 93)}$$
$$= a + e \qquad \text{(nach Annahme und nach 96)}$$

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Wenn für das Fügen trennbares Einfügen, also auch Einziehen, gilt, so kann bei der Beziehung der Fall eintreten, dass eine Beziehungsklammer Strichgrösen enthält. Wir müssen also noch das Weben von Plusgrösen und von Strichgrösen behandeln.

Satz. Es giebt drei Arten der Webung: 1. Die Anwebung, für welche weder Einigung, noch Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt, 2. die Einwebung, für welche zwar Einigung, aber keine Vertauschung der Fache gilt und 3. die Verwebung, für welche sowohl Einigung, als auch Vertauschung der Fache gilt. 99.

Bei der Webung ist das Gesetz der Beziehung des Webens zum Fügen für alle Arten der Webung das gleiche; ein Unterschied der Arten der Webung kann also nur dadurch erzeugt werden, dass für die zu webenden Fache oder Faktoren verschiedene Gesetze der Einigung und der Vertauschung gelten. Darnach kann man beim Weben entsprechend wie beim Fügen drei Arten der Webung unterscheiden: Das Anweben, für welches weder Einigung noch Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt, das Einweben, für welches zwar Einigung, aber keine Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt und das Verweben, für welches sowohl Einigung, als auch Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt.

b. Das Anweben.

100. **Erklärung des Anwebens. Das Anweben (die Multiplikation im weiten Sinne) heist die Webung, wenn nur das Gefetz der Beziehung, nicht aber Einigung, auch nicht Vertauschung der Fache (der Faktoren) gilt.**

Ein Beispiel für diefe Rechnungsart findet fich weder in den Zweigen der mathematischen, noch in den Zweigen der logischen Wissenschaften. Dennoch durfte diefe Knüpfungsart an diefer Stelle in der Grösenlehre nicht übergangen werden, da es dem Menschen möglich ist, eine folche Knüpfungsart im Denken auszuführen und die Grösenlehre alle Knüpfungen behandeln foll, welche im Denken vorkommen oder doch möglicher Weife vorkommen können, fofern ihr Ergebniss nur einen und nicht mehre Werte hat.

101. **Gefetz des Anwebens. Für das Anweben gilt nur das Gefetz des allgemeinen Webens oder das Gefetz der Beziehung, auch giebt es für diefe Art des Webens keine Knüpfung dritter Ordnung.**

Beweis: Unmittelbar aus 100. Eine Knüpfung dritter Ordnung kann es nur geben, wenn es eine Beziehung zum Weben giebt, dann aber muss mindestens Einigung der Fache oder Faktoren gelten. Da diefe für das Anweben nicht gilt, giebt es für diefe Art der Webung keine Knüpfung dritter Ordnung.

c. Das Einweben.

102. **Erklärung des Einwebens. Das Einweben (die Multiplikation im mittlern Sinne) heist das Weben, wenn auser der Beziehung Einigung dreier Einfachen (Elemente) als Fache (als Faktoren), nicht aber Vertauschung derfelben gilt.**

103. **Grundformel des Einwebens (der Multiplikation im mittlern Sinne).**

$$e_1(e_2e_3) = e_1e_2e_3$$

Im Zeuge dreier Einfachen (im Produkte dreier Elemente) kann man bei dem Einweben die Malklammer fetzen oder weglassen.

104. **Satz.** $a(e_1e_2) = ae_1e_2$

Im Zeuge oder Produkte einer Gröse und zweier Einfachen kann man beim Einweben die Malklammer fetzen oder weglassen, oder: Statt eine Gröse mit dem Zeuge zweier Einfachen (mit dem Produkte zweier Elemente) einzuweben, kann man fie mit den Einfachen fortschreitend einweben.

Formelbeweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf a.

1. Die Gleichung gilt, wenn a nur ein Einfaches enthält (nach 103).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse a gilt (Annahme), ſo gilt ſie auch für die Gröse $a + e_3$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}(a + e_3)(e_1 e_2) &= a(e_1 e_2) + e_3(e_1 e_2) && \text{(nach 93)}\\ &= a e_1 e_2 + e_3 e_1 e_2 && \text{(nach Annahme und nach 103)}\\ &= (a + e_3) e_1 e_2 && \text{(nach 93)}\end{aligned}$$

3. Alſo gilt die Gleichung nach 24 allgemein.

Beweis in Worten: Die Gröse a ist eine Summe von Einfachen, das Zeug $(e_1 e_2)$ ist ein Einfaches nach 83. Dann wird nach 93 das Zeug $a(e_1 e_2)$ eine Summe, deren Stücke ſämmtlich Zeuge dreier Einfachen ſind. In dieſen ſämmtlich können nach 103 die Malklammern geſetzt oder weggelassen werden; wir lassen ſie daher weg. Endlich können, da in allen dieſen Zeugen die beiden letzten Einfachen e_1 e_2 dieſelben ſind, die ersten Einfachen nach 90 wieder in eine Summe gefügt werden und geben dann wieder die erste Gröse a. Es ist dann aber dieſe Gröse fortschreitend mit den beiden Einfachen eingewebt.

Satz. $a(be) = abe$ 105.

Im Zeuge (im Produkte) zweier Grösen und eines Einfachen (eines Elementes) kann man beim Einweben die Malklammer ſetzen oder weglassen, oder:

Statt eine Gröse mit dem Zeuge (dem Produkte) aus einer Gröse und einem Einfachen einzuweben, kann man ſie fortschreitend mit der Gröse und mit dem Einfachen einweben.

Formelbeweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf b.

1. Die Gleichung gilt, wenn b nur ein Einfaches enthält (nach 104).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige Gröse b gilt (Annahme), ſo gilt ſie auch für die Gröse $b + e_1$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}a[(b + e_1)e] &= a[be + e_1 e] && \text{(nach 93)}\\ &= a(be) + a(e_1 e) && \text{(nach 93)}\\ &= abe + ae_1 e && \text{(nach Annahme und nach 104)}\\ &= (ab + ae_1)e && \text{(nach 93)}\\ &= a(b + e_1)e && \text{(nach 93)}\end{aligned}$$

3. Alſo gilt die Gleichung nach 24 allgemein.

Beweis in Worten: Ganz entsprechend wie zu 104.

106. **Gefetz des Einwebens (der Multiplikation im mittlern Sinne).**

In jeder Grösenknüpfung durch Einweben kann man die Plusklammern und die Malklammern ohne Weitres fetzen oder weglassen, und die Beziehungsklammern auflöfen, indem man jedes Stück des einen Fachs (des einen Faktors) mit jedem Stücke des andern einwebt und die Zeuge fügt. Das Zeug ist wieder eine Einfachgröse.

Beweis: Nach 105 gilt die Grundformel der Einigung für Fache (für Faktoren), alfo gilt nach 30 bis 34 auch das Gefetz der Einigung für Fache (für Faktoren). Die übrigen Teile des Satzes gelten aber nach dem Gefetze des Webens (nach 93).

d. Das Verweben.

107. **Erklärung des Verwebens.** Das Verweben (die Multiplikation im engen Sinne) heist das Weben, wenn für die Fache (für die Faktoren) auser der Grundformel der Einigung auch die Grundformel der Vertauschung gilt.

108. **Grundformel des Verwebens (der Multiplikation im engen Sinne).**

$$e_1 e_2 = e_2 e_1$$

Beim Verweben lassen fich zwei Einfache (zwei Elemente) vertauschen.

109. **Gefetz des Verwebens (der Multiplikation im engen Sinne).**

In jeder Grösenknüpfung durch Verweben kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und die Malkammern beliebig fetzen oder weglassen, die Ordnung der Fache (der Faktoren) beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflöfen, indem man jedes Stück des einen Fachs (des einen Faktors) mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt. Das Zeug ist wieder eine Einfachgröse.

Beweis: Nach 108 gilt die Grundformel der Vertauschung, alfo nach 36 bis 38 auch das Gefetz der Vertauschung. Der übrige Teil des Satzes gilt nach dem Gefetze des Einwebens (106).

Für die Verwebung empfehlen fich zur Uebung wieder einige Beispiele, wie:

$$abc(a+b+c) = aabc + abbc + abcc$$

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + 3aab + 3abb + bbb \text{ u. f. w.}$$

Bis hieher mussten wir die Grösenlehre entwickeln, ehe wir zur Zahlenlehre übergehen konnten. Alle Zahlen find nämlich durch Zufügen der Eins gewonnen; wir mussten demnach erst den Begriff der Eins haben, ehe wir zur Zahlenlehre übergehen konnten.

Erklärung. Die Formenlehre oder Mathematik ist derjenige Zweigstamm der Grösenknüpfung, für den äusere Fügung gilt, d. h. für den sämmtliche durch fortschreitendes Zufügen desselben Einfachen entstandene Grösen einander ungleich sind, sofern das Einfache ungleich Null ist. 110.

Erklärung. In der Formenlehre oder Mathematik, zu der wir jetzt übergehen, heist das Einfache oder Element eine Einheit (die henótēs, die monás). 111.

Erklärung. Die Formenlehre oder Mathematik zerfällt in zwei Hauptzweige: die Rechenlehre oder die Análysis und die Dehnlehre oder die Sýnthesis. 112.

Jeder dieser beiden Hauptzweige der Mathematik entwickelt zwei Zweige, einen niedern und einen höhern.

Die Formenlehre oder Mathematik zerfällt demnach im Ganzen in vier Zweige: die Zahlenlehre (Arithmetik) oder die niedere Analysis, die Folgelehre (Funktionenlehre) oder die höhere Analysis, die Ausdehnungslehre oder die niedere Synthesis und die Erweiterungslehre oder die höhere Synthesis.

Wir behandeln im Folgenden zunächst die Zahlenlehre.

Erster Abschnitt der Zahlenlehre: Die niedere Zahlenlehre oder die elementare Zahlenlehre enthaltend die Lehre von den Rechnungen mit den ganzen Zahlen und den Brüchen.

113. **Erklärung. Die Zahlenlehre oder die Arithmetik (die arithmētikḗ) heist der Zweig der Grösenknüpfung, in welchem nur eine Einheit, die Eins, und die durch fortschreitendes Fügen der Eins entstandenen Grösen, die Zahlen, ſowie die durch Knüpfung von Zahlen erzeugten Grösen behandelt werden.**

Die Zahlenlehre zerfällt wie die Formenlehre in vier Abschnitte: die niedere Zahlenlehre, welche die Lehre von den vier elementaren Rechnungen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion mit ganzen Zahlen und mit Brüchen behandelt, die höhere Zahlenlehre, welche die Erhöhung oder Potenzirung und die Vertiefung, Radizirung, wie die Lehre von den Logarithmen behandelt, die dehnende Zahlenlehre, welche uns die komplexe Gröse und die Winkelfunktionen vorführt, und endlich die erweiternde Zahlenlehre, welche uns in den höhern Gleichungen die höchste Blüte der Zahlenlehre bietet.

Der erste Abschnitt oder die niedere Zahlenlehre ist die arithmētikḗ im Sinne der alten Griechen.

Die Entwicklung wird, wenn man die Grösenlehre vorausſetzen darf, ungemein einfach und kurz und führt bis zu der unbegrenzten Aufstellung aller Brüche, ſowie zu der Bruchgleichung oder Proportion und ihrer Anwendung in der Regeldetri und zu den Gleichungen ersten Grades.

Es ist dieſer Abschnitt trotz ſeiner Einfachheit in fast allen Lehrbüchern der Zahlenlehre höchst unwissenschaftlich behandelt; kein Abschnitt enthält ſoviel Trugschlüsse, als gerade dieſer elementare und grundlegende Abschnitt. Nirgends ſind die Trugschlüsse aber auch verderblicher als gerade hier; ſie verwirren die Köpfe der Lernenden, machen ſie unklar und unſicher, dass ſie nicht wissen, was gilt, und was nicht gilt, und schaden dadurch dem Fortschritte und dem strengen mathematischen Denken unſäglich.

Das vorliegende Werk vermeidet diese Trugschlüsse; es schlägt den streng wissenschaftlichen Weg ein. Es ist aber überaus wichtig, dass der Lernende nicht blos die Sätze richtig mathematisch in Formeln oder logisch in Sätzen ableiten lerne, sondern er muss dieselben auch sofort praktisch anwenden und gebrauchen lernen. Um dies zu erzielen, habe ich bei jedem Satze Beispiele in Zahlen gegeben, welche den Satz anschaulich machen und dem Verständnisse näher führen. Aber diese Beispiele genügen allein auch nicht. Die Sätze müssen durch zahlreiche Uebungen in Fleisch und Blut übergeführt werden. Der Mathematiker muss die Sätze beherrschen und sie mit Leichtigkeit und voller Sicherheit anwenden können, dazu bedarf er aber bedeutender Uebungen.

Der Verfasser hat daher eigene „Mathematische Uebungshefte“ herausgegeben, welche die praktische Anwendung und Einübung der mathematischen Gesetze lehren. Das erste Heft entspricht ganz dem ersten Abschnitte der Zahlenlehre. Von den andern mathematischen Uebungsbüchern unterscheidet es sich dadurch, dass es zunächst die Regeln kurz aufstellt und dann die Reihenfolge der Aufgaben so ordnet, dass jeder Schüler die Aufgaben der Reihe nach selbständig und ohne fremde Hülfe lösen kann.

In dem vorliegenden ersten Abschnitte, d. h. in der niedern oder elementaren Zahlenlehre behandeln wir zunächst das Zählen oder die Bildung der Zahlen, d. h. den einfachsten oder elementarsten Teil der niedern Zahlenlehre; dann behandeln wir die erste Ordnung der Zahlenknüpfung oder das Addiren und Subtrahiren, sowie die Strichzahlen und die benannten Zahlen; demnächst gehen wir zur zweiten Ordnung der Zahlenknüpfung über oder zum Multipliziren und Dividiren mit den benannten Zahlen und mit den Brüchen und kommen schlieslich zu den Bruchgleichungen und den Gleichungen ersten Grades, mit denen die niedere oder elementare Zahlenlehre schliest.

5. Das Zählen oder die Bildung der Zahlen.

Erklärung. Die Zahlen (die arithmoi, die numeri), welche durch fortschreitendes Fügen der Eins entstehen, werden sämmtlich einander ungleich gesetzt. 114.

Die Bedingung, dass alle durch fortschreitendes Fügen derselben Einheit entstandenen Zahlen einander ungleich sein müssen, haben zuerst die Gebrüder Grassmann 1847 in ihrer gemeinsamen Arbeit über Arithmetik, demnächst zuerst der eine derselben, H. Grassmann, in seiner „Arithmetik“, Stettin 1860, Berlin 1861, Seite 3, und der andre R. Grassmann in seiner „Zahlenlehre“, Stettin 1872 Seite 9 gestellt. Ganz unabhängig von ihnen hat der ausgezeichnete Mathematiker Schroeder „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Erster Band.“ Leipzig 1872, Seite 63, dieselbe Bedingung aufgestellt. In der Tat, wenn man diese Bedingung auslässt, so gilt kein Satz des Abziehens, des Teilens und des Tiefens und Logens, wie wir dies an den betreffenden Stellen sehen werden.

In den Lehrbüchern der Zahlenlehre werden die Zahlen fast immer so erklärt, dass sie durch fortschreitendes Zufügen derselben Einheit e entstanden seien, wo e eine beliebige Grösse sein kann. Dann aber muss eine zweite Be-

dingung hinzugefügt werden, dass nämlich die Einheit e ungleich Null und auch ungleich unendlich gesetzt werden muss. Diese Bedingung aber ist bis jetzt in allen Lehrbüchern der Zahlenlehre übersehen worden; dennoch muss sie, wenn man die Einheit e einführt, aufgestellt werden, sofern man streng wissenschaftlich sein will. Selbst in H. Grassmann, Arithmetik, Stettin 1860 und in R. Grassmann's Zahlenlehre, Stettin 1872 ist es übersehen worden, diese Bedingung einzuführen. Dieselbe erscheint zuerst in der Grösenlehre des Verfassers von 1889 und in diesem Werke. Wie notwendig dieselbe ist, ergiebt sich aber sofort, wenn man statt der Einheit e die Gröse 0 oder die Gröse ∞ einführt. Denn es ist $0 + 0 = 0$ nach 73, wenn also 0 als Einheit gesetzt wird, so ist nicht mehr $e + e \gtrless e$. Ebenso ist $a + \infty = \infty$, wenn also ∞ als Einheit e gesetzt wird, so ist nicht mehr $a + e \gtrless a$. Es darf also in der Zahlenlehre nie 0 oder ∞ als Einheit gesetzt werden. Wir setzen deshalb in der Zahlenlehre entweder jede Einheit stets endlich und ungleich Null und können dann künftig diese Bedingung weglassen, oder wir setzen noch viel einfacher nur die Eins als die Einheit, welche wir zufügen und leiten daraus die andern Zahlen ab, wie es hier geschehen ist und wie es das einfachste und zugleich das wissenschaftlichste ist.

Alle durch fortschreitendes Fügen der Eins oder auch der Einheit e erzeugten Zahlen a sind übrigens, sofern e endlich und ungleich Null ist, gleichfalls endlich und ungleich Null. Denn wie weit auch der Mensch das Zählen fortsetzen möge, so bleibt er doch immer bei einer endlichen Zahl stehen; die durch fortschreitendes Zählen erzeugte Zahl a kann also nie unendlich werden. Die durch fortschreitendes Zählen der Eins oder des e erzeugte Zahl a kann aber auch nie Null werden; denn wäre die Zahl a gleich Null, so wäre $a + e = 0 + e = e$ nach 73, was gegen die Erklärung 110, wie 114 wäre.

115. **Grundformel für das Zählen.**

Es ist $\underset{1,m+n}{S} 1 \gtrless \underset{1,m}{S} 1$ **oder** $\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots + 1}^{m+n} \gtrless \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{m}$

Sämmtliche durch fortschreitendes Fügen der Einheit, d. h. durch Zählen entstandene Zahlen sind einander ungleich.

Da alle Zahlen, welche durch fortschreitendes Fügen der Eins entstehen, einander ungleich sind, so würde es unwissenschaftlich sein, wollte man auch nur zwei dieser Zahlen mit einander verwechseln. Jede Zahl muss demnach ihr eigenes Zeichen und ihren eigenen Namen haben, der eine Verwechselung mit andern Zahlen unmöglich macht. Die Aufgabe, alle Zahlen zu bezeichnen und zu benennen, ist also die erste, die an uns herantritt.

Wenn man, wie in fast allen Lehrbüchern der Zahlenlehre, die Zahlen durch fortschreitendes Zufügen einer beliebigen Einheit entstehen lässt, so kann man jede beliebige endliche Gröse, welche ungleich Null ist, als Einheit setzen und muss dann, da auch die Zahlen verschiedener Einheit verschieden sind, z. B. die Zahl: Mensch + Mensch verschieden ist von Apfel + Apfel, die Zahlen verschiedener Einheiten unterscheiden. Wir müssen dann also auch für jede Zahl jeder andern Einheit e ein andres Zeichen und einen andern Namen haben. Die Einführung der Einheit e an dieser Stelle macht also die Sache unnütz verwickelt, ja die Namengebung geradezu unmöglich.

Der einzig einfache und brauchbare Weg ist alſo der, dass man alle Zahlen nur durch fortgeſetztes Zufügen der Eins entstehen lässt, wie das hier geschehen ist.

Da beim Zählen alle durch fortschreitendes Zufügen der Eins entstandenen Zahlen einander ungleich ſind, ſo bedarf man auch ſelbst hier für jede Zahl einen eigenen Namen und ein eigenes Zeichen; da man aber durch fortgeſetztes Zufügen der Eins unzählig viele Zahlen bilden kann, ſo gebraucht man auch unzählig viele Namen und Zeichen.

Da andrerſeits alle Mathematiker ſich bei demſelben Zeichen und demſelben Namen auch stets dieſelbe Zahl denken müssen, ſo müssen die Namen und die Zeichen leicht kenntlich und leicht zu behalten ſein und müssen bereits wenige Namen genügen, um ſämmtliche Zahlen zu bezeichnen.

Die Löſung dieſer Aufgabe hat den alten Völkern grose Schwierigkeit gemacht. Die alten Völker, wie die Egypter, die Phönizier und die Griechen wandten für die Bezeichnung der Zahlen teils die Buchstaben an nach der Reihe des Alphabets, teils Zeichen, welche die Anzahl der Striche zählten, wie I, II, III, und konnten damit nur wenige Zahlen bezeichnen. Vollkommner war bereits ihre Bildung der Namen für die Zahlen; aber auch dieſe war noch zum Teil fehlerhaft und ſind dadurch auch Fehler in unſere jetzigen Zahlnamen gekommen.

Die Zeichen ſind zuerst vollkommner geworden, ſeitdem die Inder im Mittelalter das Zeichen der Null eingeführt haben und die ſogenannten arabischen Ziffern aus Egypten durch die Araber nach Europa verpflanzt ſind. Die Namen und Zeichen der Zahlen ſind darnach die in den folgenden Nummern aufgeführten.

Die bisherigen Lehrbücher der Zahlenlehre haben es verſäumt, die Zeichen und Namen der Zahlen hier aufzuführen; dennoch ist dieſe Aufführung schlechthin geboten und wird zur Entfernung grober Missbräuche in der Benennung der Zahlen Anlass geben.

Erklärung. Die Namen und Zeichen der ersten zehn Zahlen oder der Einer. Die Zeichen der Zahlen heisen Ziffern. 116.

a. **Die Null (Zeichen 0) ist die Grösse, welche zu jeder Grösse ohne Aendrung des Wertes gefügt werden kann.**

b. **Die Eins (Zeichen 1) ist die Einheit der reinen Zahlen, für welche $1 \cdot e = e$ ist.**

c. **Die Zwei (Zeichen 2) ist eins plus eins.**

d. **Die Drei (Zeichen 3) ist zwei plus eins.**

e. **Die Vier (Zeichen 4) ist drei plus eins.**

f. **Die Fünf (Zeichen 5) ist vier plus eins.**

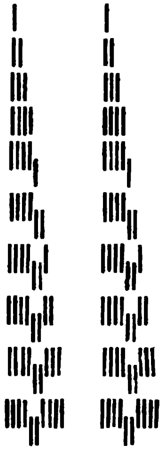
g. **Die Sechs (Zeichen 6) ist fünf plus eins.**

h. **Die Sieben (Zeichen 7) ist ſechs plus eins**

i. **Die Acht (Zeichen 8) ist ſieben plus eins.**

k. **Die Neun (Zeichen 9) ist acht plus eins.**

l. **Die Zehn (Zeichen 10) ist neun plus eins.**



117. **Erklärung. Die Namen und Zeichen der höhern Zahlen. Um auch die höhern Zahlen bezeichnen zu können, giebt man den Ziffern verschiedene Stellen.**

Der Wert der Ziffer richtet ſich nach der Stelle, auf welcher ſie steht. Die Stelle links vom Komma oder, wenn kein Komma steht, die letzte Stelle rechts heist die nullte Stelle; die Stelle links neben der nullten Stelle heist die erste Stelle; die ate Stelle links neben der nullten Stelle heist die ate Stelle.

Jede Ziffer hat auf der nullten Stelle den einfachen Wert; ſie hat auf der a + 1ten Stelle den zehnfachen Wert als auf der aten Stelle.

Die Eins heist auf der ersten Stelle zehn (Zeichen 10), auf der zweiten Stelle hundert (Zeichen 100), auf der dritten Stelle tauſend (Zeichen 1000), auf der vierten Stelle zehntauſend (Zeichen 10000), auf der fünften Stelle hunderttauſend (Zeichen 100000) und auf der ſechſten Stelle Million (Zeichen 1000000).

Beim Leſen der Ziffern beginnt man mit der Ziffer der höchsten Stelle und schliest mit der der niedrigsten Stelle.

Beispiele: 3221 geleſen dreitauſend zweihundert zwanzig und eins. 5006 geleſen fünftauſend und ſechs.

Beim Leſen der Ziffern und bei der Benennung der Zahlen ist aber bereits in den ältesten Zeiten eine Verwirrung eingetreten, welche auch jetzt noch fortdauert und welche beſeitigt werden muss. Es ist klar, dass die kleine Zahl vor dem Namen der Stellenzahl (tauſend, hundert pp.) die Anzahl bestimmt, wie viel mal dieſe Stellenzahl genommen werden ſoll, ſo ist drei Tauſend = 1000 + 1000 + 1000 = 3 · 1000 = 3000, ſo dreihundert = 100 + 100 + 100 = 3 · 100 = 300, ſo ist hundert und zwei Tauſend = 102 · 1000 = 102000. Es ist dies nicht nur eine allgemeine Regel bei der Namengebung der Zahlen, ſondern bei jeder Benennung, ſo ist 3 Mas = 3 · 1 Mas, ſo 3 Pfund = 3 · 1 Pfund, ſo 3 Mark = 3 · 1 Mark. Dagegen muss die Zahl niederer Stelle bei der Benennung stets auf die Zahl höherer Stelle folgen. Hienach bezeichnet der deutsche Name dreizehn unzweifelhaft 3 · 10 = 30. Dagegen muss die Zahl 13 im Deutschen nicht dreizehn, ſondern zehn drei genannt werden, ebenſo muss die 21 im Deutschen nicht ein und zwanzig, ſondern zwanzig eins genannt werden u. ſ. w., wie dies bei den Franzoſen richtig geschieht. Es ist dieſe sprachliche Verwirrung bei den Zahlnamen aber schon eine ſehr alte; schon 2000 vor Chr. herrscht dieſelbe im Sanskrit. So heist in den Veden trisata 300 und trisapta 3. 7, aber daneben trăgōdasan 13 u. ſ. w. Im Griechischen und Lateinischen gehen die Formen drei und zehn und zehndrei, ein und zwanzig und zwanzig eins durch einander, in neuerer Zeit haben die Deutschen die unrichtige erste Form, die Franzoſen die richtige zweite Form angenommen. Die Deutschen müssen hier die jetzt übliche Form der Zahlnamen ändern und die richtige Form annehmen. Es ist dies eine ſehr leichte Sache, welche auch bereits

vielfach im kaufmännischen Verkehre angewandt wird. Das „und" wird zweckmäsig nur bei der Ziffer der letzten Stelle angewandt.

Auch für die höhern Stellen empfiehlt fich eine andre Benennung der Stellen; diefe kann aber nur durchgeführt werden, wenn alle Gelehrten darin übereinkommen. Bis dahin muss es bei der jetzigen Sitte bleiben. Es wird aber wenigstens erlaubt fein, einen Vorschlag zu machen, wie die Sache geordnet werden kann. Alle gebildeten Völker haben jetzt ein zehnteiliges Zahlenfystem; dazu gehört aber auch, dass die Stellen zehnteilig geordnet werden. Die Billion follte darnach 10 Stellen, nicht aber 12 Stellen haben, die Million follte 5, nicht aber 6 Stellen links von der nullten Stelle erhalten; ich erlaube mir daher den Vorschlag zu machen, dass man 10^{10} eine Bill, 10^5 eine Mill nenne. Man könnte dann 10^4 eine Myr nennen, auch könnte man etwa statt Taufend und statt Hundert die abgekürzten Formen „Daus" und „Hun" einführen, welche, wie die Sprachgeschichte beweif't, ebenfo gut find, wie jene gewöhnlichen längeren Wortformen. So lange aber ein folcher Vorschlag nicht allgemein angenommen ist, muss es bei der jetzigen Sitte bleiben.

Der Satz 117 von den verschiedenen Stellen der Zahlen wird in den Lehrbüchern der Zahlenlehre oder Arithmetik fast immer erst nach der Lehre von den Potenzen bei den Reihenzahlen vorgetragen; aber ganz mit Unrecht. Die Zahlen höherer Stellen find von den Indern und Arabern um 500 bis 800 n. Chr. eingeführt, lange bevor man Potenzen kannte, welche erst 1585 n. Chr. in Europa eingeführt find. Ebenfo werden die Zahlen höherer Stellen von den Kindern bereits in der untersten Klasse der Elementarschule gebildet und benutzt, lange bevor fie von den Potenzen eine Ahnung haben. Die Lehre von den höhern Stellen muss alfo hier bei der Bildung der Zahlen vorgetragen werden und wird in den folgenden Nummern ihre Entwicklung finden. Mit der Potenzlehre hat fie gar nichts zu tun.

Satz. $a + (b + 1) = a + b + 1$ 118.

Für die Zahlen gilt die Grundformel der Einfügung: Statt zu dem zweiten Stücke eine Eins zu fügen, kann man fie zu der Summe fügen und statt zu der Summe eine Eins zu fügen, kann man fie zum zweiten Stücke fügen.

Wir haben schon oben bemerkt, dass man in allen Zweigen der Grösenknüpfung die Grundformel der Einfügung und daraus hervorgehend das Gefetz der Einfügung gelten lässt, da nur in dem Falle, wenn dies gilt, eine höhere Ordnung der Grösenknüpfung möglich ist. Haben wir aber diefe Grundformel, fo geht daraus die ganze Zahlbildung für höhere Stellen hervor, fofern man noch das Gefetz aus 116 für den Uebergang der 9 in die 10 beachtet, dass nämlich $10 = 9 + 1$.

Satz. Wenn auf einer Stelle die Ziffer neun steht und es wird noch eine Eins auf der Stelle zugefügt, fo wird dafür auf diefer Stelle eine Null und auf der nächst höhern Stelle eine Eins gefetzt. 119.

Es wird zweckmäsig fein, die Bildung der höheren Zahlen nach diefen Sätzen an einigen Beispielen zu zeigen.

Es ist $11 = 10 + 1$.

$12 = 10 + 2 = 10 + (1 + 1) = (10 + 1) + 1 = 11 + 1$ (nach 116c und 118)

$13 = 10 + 3 = 10 + (2 + 1) = (10 + 2) + 1 = 12 + 1$ (nach 116d und 118)

$14 = 10 + 4 = 10 + (3 + 1) = (10 + 3) + 1 = 13 + 1$ (nach 116e und 118)

$15 = 10 + 5 = 10 + (4 + 1) = (10 + 4) + 1 = 14 + 1$ (nach 116f und 118)

$16 = 10 + 6 = 10 + (5 + 1) = (10 + 5) + 1 = 15 + 1$ (nach 116g und 118)

$17 = 10 + 7 = 10 + (6 + 1) = (10 + 6) + 1 = 16 + 1$ (nach 116h und 118)

$18 = 10 + 8 = 10 + (7 + 1) = (10 + 7) + 1 = 17 + 1$ (nach 116i und 118)

$19 = 10 + 9 = 10 + (8 + 1) = (10 + 8) + 1 = 18 + 1$ (nach 116k und 118)

$20 = 10 + 10 = 10 + (9 + 1) = (10 + 9) + 1 = 19 + 1$ (nach 116.l und 118)

u. f. w. ganz in gleicher Weife bis 99 bez. bis 999.

$$99 + 1 = (90 + 9) + 1 = 90 + (9 + 1) = 90 + 10 = 100,$$

$$999 + 1 = (900 + 99) + 1 = 900 + (99 + 1) = 900 + 100 = 1000$$

u. f. w.

Man kann alfo auch bei der obigen Namengebung und Bezeichnung doch fehr wohl die Bildung der Zahlen durch die fortschreitende Fügung von Eins festhalten, dass alfo 20 nicht durch $10 + 10$, fondern durch $19 + 1$, dass 100 nicht durch $10 \cdot 10$, fondern durch $99 + 1$ erklärt und gewonnen wird. Es ist dies der einzige einfache oder elementare Weg der Zahlbildung, auf dem die Kinder die Zahlen beim Zählen bilden lernen und ist auch der einzig wissenschaftliche Weg.

6. Das Zufügen und das Abziehen, die Strichzahl und die benannte Zahl.

A. Das Zufügen der Zahlen.

Wir haben schon oben in 118 gefehen, dass in der Zahlenlehre, wie in allen Zweigen der Grösenknüpfung die Grundformel der Einfügung oder der Einigung für die Fügung gefetzt wird, da es nur in dem Falle, wenn Einigung gilt, eine höhere Ordnung der Zahlenknüpfung geben kann. Die Grundformel der Vertauschung gilt felbstverständlich, da nur gleiche Einheiten, d. h. gleiche Einfen $1 + 1$ gefügt werden.

120. **Grundformeln der Zahlenfügung.**

$$a + (b + 1) = a + b + 1 \qquad 1 + 1' = 1' + 1$$

Für die Zahlenfügung gelten die Grundformeln der Einfügung und Zufügung oder der Einigung und Vertauschung.

Satz. Das Zufügen einziffriger Zahlen oder das Eins und Eins. Um das Eins und Eins für die einziffrige Zahl zu bilden, fügt man zu der Zahl a erst 1, dann 2, und fo fortschreitend, nachdem man a + b gefunden hat, die Summe a + (b + 1) = a + b + 1, bis man zu a + 10 gelangt. 121.

Beweis: Unmittelbar aus 120.

Ein Beispiel wird die Sache klar machen. Sei das Eins und Eins für acht zu bilden, alfo 8 + 1, 8 + 2, 8 + 3 u. f. w. So füge man

$8 + 1 = 9$

$8 + 2 = 8 + (1 + 1) = (8 + 1) + 1 = 9 + 1 = 10$ (nach 118)

$8 + 3 = 8 + (2 + 1) = (8 + 2) + 1 = 10 + 1 = 11$ (nach 118)

$8 + 4 = 8 + (3 + 1) = (8 + 3) + 1 = 11 + 1 = 12$ (nach 118)

$8 + 5 = 8 + (4 + 1) = (8 + 4) + 1 = 12 + 1 = 13$ u. f. w.

Die Sache macht hienach gar keine Schwierigkeiten. Das Eins und Eins ist demnächst bis zu schlechthiniger Sicherheit, welche jeden Irrtum unmöglich macht, zu lernen.

Ganz ebenfo verfährt man beim Zufügen der Ziffern höherer Stellen, z. B.
$8000 + 1000 = 9000$;
$8000+2000=8000+(1000+1000)=(8000+1000)+1000=9000+1000=10000$
und übt auch diefe Zufügung bis zu vollster Sicherheit ein. Dann geht man zu dem Gefetze der Zahlenfügung über.

Gefetz der Zahlenfügung. In jeder Knüpfung der Zahlen durch Fügen gilt das Gefetz der Zufügung, d. h. man kann ohne Aendrung des Wertes die Plusklammern beliebig fetzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern, die Summe ist wieder eine Zahl. 122.

Beweis: Unmittelbar aus 78 und 81, da 77 und 80 gilt.

Satz. Das Zufügen mehrziffriger Zahlen. Beim Zufügen mehrziffriger Zahlen zerlegt man jede Zahl in foviel Stücke, als fie geltende Ziffern (d. h. Ziffern ungleich Null) hat, fo dass jedes Stück nur eine geltende Ziffer hat, ordnet alle Ziffern gleicher Stellen zufammen und fügt nun von der untersten Stelle anfangend die Ziffern jeder Stelle für fich zu. Wenn die Summe Ziffern höherer Stellen ergiebt, fo fügt man diefe bei den betreffenden Stellen mit zu. 123.

Beweis: Unmittelbar aus 122.

Beispiel. Sei 325 + 287 zu nehmen, fo fetze man

$$\begin{aligned} 325 + 287 &= (300 + 20 + 5) + (200 + 80 + 7) \\ &= (300 + 200) + (20 + 80) + (5 + 7) \\ &= (300 + 200) + (20 + 80) + 12 \\ &= (300 + 200) + (20 + 80 + 10) + 2 \\ &= (300 + 200) + 110 + 2 \\ &= (300 + 200 + 100) + 10 + 2 \\ &= 600 + 10 + 2 = 612. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt fich unmittelbar folgende praktische Rechenregel.

124. **Satz. Rechenregel fürs Zufügen. Beim Zufügen mehrziffriger Zahlen schreibt man die Zahlen senkrecht unter einander, so dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, kurz die Ziffern der gleichen Stelle senkrecht unter einander kommen, und fügt dann, von der untersten Stelle anfangend, die Ziffern jeder Stelle für sich zu. Wenn die Summe Ziffern höherer Stellen ergiebt, so fügt man diese bei den betreffenden Stellen mit zu.**

Beispiel: 5832 + 7469

$$\begin{array}{r} 5832 \\ 7469 \\ \hline 13301 \end{array}$$

Das Zufügen unbenannter Zahlen ist nun bis zur grösten Sicherheit und Fertigkeit einzuüben. Der Rechnende hat zuletzt kurz zu rechnen, d. h. jedesmal nur die Summe zu sagen, ohne die Stücke zu nennen. Ist die Rechnung vollendet, so macht man nochmals die Probe, d. h. wenn zuerst von unten nach oben zugefügt war, so fügt man nun von oben nach unten zu und prüft, ob dieselbe Summe herauskommt. Geschieht dies, so kann man sicher sein, dass man richtig gerechnet hat.

Zahlreiche Uebungsbeispiele bietet das Rechenheft I des Verfassers. Die Anleitung zum Unterrichte und zu der notwendigen Stufenfolge der Uebungen ist in den Auflösungen und der Anleitung zum Unterrichte für das Rechenheft I vom Verfasser gegeben.

125. **Satz. Für das Zufügen der Zahlen gilt trennbare Knüpfung oder: Wenn $a + b = a + c$ (Annahme), so ist $b = c$ (Folgerung) oder: Je zwei Zahlen b und c, welche zu derselben Zahl a gefügt gleiche Summen liefern, sind einander gleich.**

Beweis: Soll es zwei Zahlen b und c geben, welche beide zu a gefügt die Summe $a + b = a + c$ geben, so muss entweder $b = c$ sein und dann gilt der Satz, oder es muss $b \gtrless c$ sein, d. h. es muss in der fortschreitenden Zahlenreihe die eine eine andre Zahl als die andre, die eine etwa c, also später sein als die andre b. Sei demnach $c = b + 1 + 1 + 1 + \cdots = b + (1 + 1 + 1 + \cdots) = b + d$ nach 122, so muss also auch $a + b = a + c = a + b + d$ sein, wo $d \gtrless 0$ ist. Dies aber ist unmöglich, da $a + b + d$ in der Zahlenreihe später ist als $a + b$ und also auch ungleich $a + b$ sein muss nach 114. Es kann also nicht $b \gtrless c$ sein, sondern es muss $b = c$ sein oder es giebt nur eine Zahl b, welche zu der Zahl a gefügt die Summe $a + b$ giebt, d. h. es gilt nach 45 trennbare Fügung.

Da es bei der Fügung, sofern nur endliche Grösen gefügt werden, keine unveränderliche Gröse giebt, so kann hier die Bedingung aus 45 und 46, dass a der unveränderlichen Gröse ungleich sein müsse, weggelassen werden.

B. Das Abziehen der Zahlen.

Erklärung. Das Abziehen der Zahlen oder das Subtrahiren (griech. hyphairêin, lat. subtraheri) heist die dem Zufügen der Zahlen entsprechende Trennung, wo die Summe $a = b + c$ oder $a = c + b$ und das eine Stück b gegeben ist und das andre Stück c gefucht wird. 126.

Die Summe a, von der abzuziehen ist, heist der Vorrat (der minuendus), das gegebene Stück b, das abgezogen wird, heist der Abzug (der subtractor), das Ergebniss des Abziehens heist der Rest (quod restat) oder der Unterschied (die differentia).

Das Abziehen der Zahlen ist die Trennung, welche dem Zufügen der Zahlen entspricht, da nun bei dem Zufügen der Zahlen Vertauschung der Zahlen gilt, fo gelten auch für das Abziehen die Gefetze der Abtrennung und nennt man daher die dem Zufügen entsprechende Trennung passend ein Abziehen.

Den Abzug nennt man gewöhnlich den subtrahendus, dies aber ist fehlerhaft und verwirrend. Beim Teilen nennt man die Gröse, welche geteilt werden foll, den dividendus, die Gröse, welche teilt, den divisor. Entsprechend müsste beim Abziehen die Gröse, von welcher abgezogen werden foll, der subtrahendus, die Gröse, welche abzieht, der subtractor heisen. Mag man nun auch die erste Gröse, den Vorrat, immerhin den minuendus nennen, fo darf man doch jedenfalls nicht den Abzug einen subtrahendus nennen, fondern muss ihn subtractor nennen.

Erklärung. Das Zeichen des Abziehens ist ein wagerechter Strich —, gelefen „strich", „ab" oder „minus". Z. B. $a - b$ gelefen a strich b, oder a ab b oder a minus b. Die Zeichen „plus +" und „strich —" heisen entgegengefetzte Zeichen. Eine Gröse mit einem Strich als Vorzeichen heist eine Strichgröse oder eine negative Gröse; eine Klammer, vor welcher der Strich steht, heist eine Strichklammer. Z. B. $-a$ ist eine Strichgröse, $-(a + b)$ ist eine Strichklammer. 127.

Erklärung. Ein Gliederausdruck (der polynómos) heist ein Ausdruck, in welchem die Grösen fortschreitend durch Plus oder Strich (minus) geknüpft find; jede Gröse mit ihrem Vorzeichen und ebenfo jede Klammer heist ein Glied (der nómos) des Ausdrucks. So z. B. hat der Gliederausdruck $a + (b - c) - d$ die drei Glieder a, $+(b - c)$ und $-d$. 128.

Satz. $$a = a + b - b = a - b + b$$ 129.

Zu einer Zahl eine zweite Zahl fortschreitend zufügen und abziehen oder fortschreitend abziehen und zufügen ändert die Zahl nicht.

Beweis: Unmittelbar aus 49.

130. **Satz. Das Abziehen einziffriger Zahlen oder das Eins von Eins. Aus dem Eins und Eins erhält man unmittelbar das Eins von Eins, indem man statt a + b = c nun c — a = b fetzt.**

Beispiel. Aus 8 + 2 = 10 erhält man 10 — 8 = 2, aus 8 + 3 = 11 erhält man 11 — 8 = 3 u. f. w. Das Eins von Eins ist demnächst wieder bis zu schlechthiniger Sicherheit, welche jeden Irrtum unmöglich macht, zu lernen.

Ganz ebenfo verfährt man beim Abziehen der Ziffern höherer Stellen, z. B. 8000 + 3000 = 11000; 11000 — 8000 = 3000 und übt auch diefe bis zu vollster Sicherheit ein.

131. **Gefetz der ersten Ordnung der Zahlenlehre. In jeder Verknüpfung von Zahlen durch Zufügen oder Abziehen (Addiren oder Subtrahiren) kann man ohne Aendrung des Wertes die Plusklammern ohne Weitres, die Strichklammer nach Entgegenfetzung der Zeichen aller Klammerglieder beliebig weglassen oder fetzen und die Ordnung der Glieder beliebig ändern. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahl.**

Beweis: Da für das Fügen Vertauschung gilt und die Fügung nach 125 eine trennbare Fügung ist, fo gilt nach 62 auch das Gefetz der Vertauschung und Abtrennung.

132. **Satz. Man kann jede durch Zufügen oder Abziehen (Addiren oder Subtrahiren) von Zahlen erzeugte Grösse, welche ungleich Null ist, als Einheit fetzen, und gelten dann für alle aus diefer und der entgegengefetzten Zahl erzeugten Zahlen alle Gefetze der ersten Ordnung der Zahlenlehre.**

Beweis: Unmittelbar aus 63.

133. **Satz.** $+(-a) = -(+a) = -a \qquad +(+a) = -(-a) = +a$

Eine Strichzahl fügt man zu, indem man die entsprechende Pluszahl abzieht und eine Strichzahl zieht man ab, indem man die entsprechende Pluszahl zufügt oder:

Statt „strich strich" kann man „plus" und statt „plus strich" oder statt „strich plus', kann man „strich" fetzen.

Beweis: Unmittelbar aus 131, indem man die Klammer auflöft.

134. **Satz.** $a + 0 = a - 0 = a$

Null zufügen oder abziehen ändert die Zahl nicht.

Beweis: Es ist a + 0 = a nach 116. a. Ebenfo ist aber auch

$$a - 0 = a + 0 - 0 \qquad \text{(nach 116. a)}$$
$$= a \qquad \text{(nach 129)}$$

135. **Satz.** $0 = a - a = -a + a$

Der Unterschied zweier gleichen Zahlen ist Null und wenn der Unterschied zweier Zahlen Null ist, fo find die Zahlen gleich.

Beweis: Nach 134 ist $b = b + 0$. Ebenſo ist nach 129
$b = b + a - a = b - a + a$, mithin nach 131
$= b + (a - a) = b + (-a + a)$. Alſo ist auch nach 18
$b + 0 = b + (a - a) = b + (-a + a)$.
Mithin ist nach 125, da in den gleichen Summen das erste Stück b gleich ist, auch das zweite Stück gleich, d. h. es ist $0 = a - a = -a + a$.

Satz. Das Abziehen mehrziffriger Zahlen. Beim Abziehen mehrziffriger Zahlen zerlegt man jede Zahl in ſoviel Stücke als ſie geltende Ziffern (d. h. Ziffern ungleich Null) hat, ordnet die beiden Ziffern gleicher Stellen zuſammen und zieht nun von der untersten Stelle anfangend die Ziffern jeder Stelle für ſich ab. Wenn auf einer Stelle der Abzug gröser ist als der Vorrat, ſo zieht man auf einer höhern Stelle des Vorrats eine Eins ab, fügt den Wert derſelben zur Ziffer der Stelle im Vorrat und zieht nun die Ziffer des Abzugs ab. 136.

Beweis: Unmittelbar aus 131.

Beispiel: $325 - 283 = (300 + 20 + 5) - (200 + 80 + 3)$
$= (300 - 200) + (20 - 80) + (5 - 3)$
$= (300 - 200) + (20 - 80) + 2$
$= (200 - 200) + (100 + 20 - 80) + 2$
$= (200 - 200) + 40 + 2$
$= 42.$

Hieraus ergiebt ſich unmittelbar folgende praktische Rechenregel.

Satz. Rechenregel fürs Abziehen. Beim Abziehen mehrziffriger Zahlen schreibt man die Ziffern der gleichen Stelle ſenkrecht unter einander und zieht, bei der untersten Stelle beginnend, die Ziffern jeder Stelle für ſich ab. 137.

Borgeregel. Wenn auf einer Stelle der Abzug gröser ist als der Vorrat, ſo borgt man eine Einheit auf der nächst höhern Stelle, gleich zehn Einheiten auf der folgenden Stelle, und zieht nun ab.

Höhere Borgeregel. Wenn die nächst höhere Stelle Null hat, ſo borgt man eine Einheit bei der nächsten höhern Stelle, welche nicht Null hat, ſetzt für jede folgende Null eine Neun und behält für die letzte Stelle eine Zehn beim Borgen übrig, oder kurz:
Eine Null, über welche weggeborgt wird, verwandelt ſich in Neun.

Beispiele: Die Aufgabe ſei 53 — 28; 3 — 8 kann ich nicht, ich borge mir einen Zehner und mache den Borgepunkt bei der 5, 13—8 ist 5, 40—20 ist 20, 5 + 20 ist 25, alſo ist 53 — 28 = 25.

203—57; 3—7 kann ich nicht, ich borge einen Zehner. Bei den Zehnern kann ich nicht borgen. Ich borge 1 Hundert und mache den Borgepunkt. Ein Hundert hat 10 Zehner; davon lasse ich 9 auf der Zehnerstelle und borge 1 Zehner für

die Einer, 13 — 7 = 6; 9 Z — 5 Z = 4 Z. 1 H — 0 = 1 H, 1 H + 4 Z + 6 E = 146, alſo u. ſ. w.

Das Abziehen unbenannter Zahlen ist nun bis zur grösten Sicherheit und Fertigkeit einzuüben. Der Rechnende muss namentlich das Abziehen, wo geborgt werden muss, bis zur grösten Sicherheit einüben, Die Probe wird hier ſo gemacht, dass die beiden Stücke (der Rest und der Abzug) gefügt werden; ſie müssen dann beide zugefügt den Vorrat geben.

Uebungsbeispiele und genauere Anleitung bietet das Rechenbuch vom Verfasser Heft I.

C. Die Vergleichung der Zahlen.

138. **Erklärung. Gleichartig heisen zwei Zahlen, wenn beide Pluszahlen (poſitive Zahlen) oder beide Strichzahlen (negative Zahlen) ſind, hingegen einander ungleichartig, wenn die eine eine Pluszahl, die andre eine Strichzahl ist.**

Gleichwertig heisen zwei Zahlen, wenn jeder Einheit der einen eine Einheit der andern entspricht. Unter dem Pluswerte einer Zahl wird die gleichwertige Pluszahl verstanden.

Entgegengeſetzt heisen zwei Zahlen, wenn ſie gleichwertig ſind und entgegengeſetzte Zeichen haben,

139. **Satz. Die Pluszahl $+a$ und die Strichzahl $-a$ ſind entgegengeſetzte Zahlen.**

Beweis: Sollen ſie entgegengeſetzte Zahlen ſein, ſo muss jeder Einheit der einen eine Einheit der andern entsprechen. Habe nun $+a$ n Einheiten, alſo $+a = 1_1 + 1_2 + \cdots + 1_n$, ſo ist

$$-a = -(+a) = -(1_1 + 1_2 + \cdots + 1_n) \quad \text{(nach 138 und Annahme)}$$
$$= -1_1 - 1_2 - \cdots - 1_n \quad \text{(nach 131)}$$

alſo entspricht jeder Einheit $+1$ der Pluszahl $+a$ auch eine Einheit -1 der Strichzahl $-a$.

140. **Satz. Jede Zahl ist entweder eine Pluszahl (poſitive Zahl) oder eine Strichzahl (negative Zahl) oder Null.**

Beweis: Jede Zahl ist eine Gröse, welche durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten entstanden ist. Enthält dieſelbe nur eine Art von Einheiten, ſo ist ſie entweder eine Plus- oder eine Strichzahl. Enthält ſie beide Arten der Einheiten, Pluseinheiten und Stricheinheiten, ſo kann man je eine Pluseinheit und eine Stricheinheit in eine Klammer schliesen (nach 131) und ſolange hiermit fortfahren, bis auser den Klammern nur noch eine Art der Einheiten bleibt. Jede Klammer hat dann die Form $(e + (-e))$ und ist (nach 133 und 135) Null. Null aber kann (nach 134) bei der Zufügung weggelassen werden.

Die Klammern können alſo ſämmtlich weggelassen werden. **Bleibt** nun auser den Klammern keine Einheit, ſo ist die Zahl **Null**, **bleiben** auser den Klammern nur Pluseinheiten, ſo ist die Zahl **eine** Pluszahl, bleiben nur Stricheinheiten, ſo ist ſie eine Strichzahl.

Satz. Die Summe mehrer Pluszahlen ist wieder eine Pluszahl, die mehrer Strichzahlen ist wieder eine Strichzahl. 141.

Beweis: Nach 114 ist jede Pluszahl durch fortgeſetztes Zufügen von Pluseinheiten entstanden; stellt man alſo jede Zahl als Summe ihrer Einheiten dar, und löst man die Plusklammer, ſo ist die Geſammtſumme mehrer Pluszahl eine Zahl, welche nur fortschreitend verknüpfte Pluseinheiten enthält, d. h. nach 114 eine Pluszahl.

Die Summe von Strichzahlen $(-a) + (-b) + (-c) + \cdots$ ist aber nach 131 $(-a) + (-b) + (-c) + \cdots = -(a + b + c + \cdots)$ und ist alſo nach 139 die entgegengeſetzte Zahl zu $a + b + c + \cdots$, alſo eine Strichzahl.

Erklärung. Eine Zahl a heist gröser, als eine andre b, und die zweite b heist kleiner als die erste, wenn $a - b$ eine Pluszahl ist. Das Zeichen ist $a > b$ (geleſen a gröser als b) oder $b < a$ (geleſen b kleiner als a). 142.

Die drei Ausdrücke $a > b$, $a = b$ und $a < b$ bilden die drei Arten der Vergleichung. Eine Zahl c, welche gröser als b und zugleich kleiner als a ist, heist ein ausschliesendes Mittel zwischen b und a. Das Zeichen des ausschliesenden Mittels ist c = Mitt (b [,] a).

Wenn die Zahl c gröser oder gleich b und zugleich kleiner oder gleich a ist, ſo heist das Mittel ein einschliesendes Mittel. Das Zeichen des einschliesenden Mittels ist c = Mitt [a,b].

Satz. Jede Zahl a ist jeder andern b aus derſelben Einheit, entweder gleich oder gröser oder kleiner. 143.

Beweis: Es ist $a - b$ eine Zahl, mithin nach 140 entweder Null oder eine Pluszahl oder eine Strichzahl.

1. Es ſei $a - b = 0$; dann ist

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{(nach 134)} \\ &= b + (a - b) && \text{(nach Annahme)} \\ &= a + (b - b) && \text{(nach 131)} \\ &= a + 0 && \text{(nach 135)} \\ &= a && \text{(nach 134)} \end{aligned}$$

d. h. $a = b$.

2. Es ſei $a - b$ eine Pluszahl, ſo ist $a > b$ (nach 142)
3. Es ſei $a - b$ eine Strichzahl, ſo ist die entgegengeſetzte

$-(a-b)$ eine Pluszahl, und diese ist (nach 131) $-(a-b)=-a+b=b-a$, d. h. $b>a$ oder $a<b$ nach 142.

144. **Satz. Wenn in einer Reihe von Zahlen jede vorhergehende gröser ist als die nächstfolgende, so ist auch die erste gröser als die letzte.**

Beweis: Es sei $a_1>a_2$, $a_2>a_3,\cdots a_{n-1}>a_n$, oder allgemein, es sei $a_a>a_{a+1}$, so ist nach 142 a_a-a_{a+1} eine Pluszahl, also auch die Summe

$$(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)=$$
$$a_1+(a_2-a_2)+(a_3-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-1})-a_n=a_1-a_n$$

eine Pluszahl, d. h. $a_1>a_n$.

Beispiel: In der Zahlenreihe 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3 ist jede vorhergehende gröser als die nächstfolgende, also ist auch 21 gröser als 3.

145. **Satz. Jede Pluszahl ist gröser als Null, jede Strichzahl ist kleiner als Null.**

Beweis: 1. Es sei a eine Pluszahl, so ist auch $a-0=a$ (nach 134) eine Pluszahl, d. h. nach 142 $a>0$.

2. Es sei a eine Strichzahl, $b=-a$ die entgegengesetzte Pluszahl, so ist $0-a=0+(-a)=0+b=b$ (nach 133 und 134), d. h. eine Pluszahl, also $a<0$ nach 142c.

Beispiel: $+1$ ist gröser als Null, -1 ist kleiner als Null.

146. **Satz. Die Summe zweier ungleichartiger Zahlen a und b ist demjenigen Stücke gleichartig, das den grösern Pluswert hat, und zwar findet man den Pluswert dieser Summe, wenn man unter den Pluswerten der Stücke den kleinern von dem grösern abzieht.**

Beweis: Es sei a die Zahl, deren Pluswert gröser ist als der von b. Da die beiden Zahlen ungleichartig sind, so ist entweder a eine Plus- und b eine Strichzahl, oder es ist a eine Strich- und b eine Pluszahl.

1. Es sei a eine Plus- und b eine Strichzahl, so setze $b=-b_1$, dann ist a der Pluswert von a, b_1 der von b. Da nun der Pluswert von a gröser ist als der von b, so ist $a>b_1$, oder $a-b_1$ eine Pluszahl (nach 142), mithin ist die Summe $a+b=a+(-b_1)=a-b_1$ dem a gleichartig und wird ihr Pluswert erhalten, wenn man unter den Pluswerten der Stücke den kleinern vom grösern abzieht.

2. Es sei a eine Strich- und b eine Pluszahl, so setze $a=-a_1$, dann sind a_1 und b die beiden Pluswerte und, da der von a gröser als der von b, so ist a_1-b eine Pluszahl (nach 142); mithin ist $a+b=-a_1+b=-(a_1-b)$ eine Strichzahl oder dem a gleich-

artig, und der Pluswert $a_1 - b$ wird erhalten, wenn man unter den Pluswerten der Stücke den kleinern von dem grösern abzieht.

Beispiel: $16 + (-13) = +3$; $13 + (-16) = -3$.

Satz. Die Vergleichung ändert ſich nicht, wenn man auf beiden Seiten Gleiches zufügt oder abzieht. 147.

Beweis: Es ſei $a > b$, d. h. nach 142 $a - b$ eine Pluszahl, dann ist auch

$$a \pm c - (b \pm c) = a - b \pm c \mp c \quad \text{(nach 131)}$$
$$= a - b \quad \text{(nach 129)}$$

eine Pluszahl, d. h. $a \pm c > b \pm c$, was zu beweiſen war.

Beispiel: Wenn $5 > 3$, ſo ist auch $5 + 4 > 3 + 4$.

Satz. Wächst in einer Summe zweier Zahlen das eine Stück, während das andre gleich bleibt, ſo wächst auch die Summe. 148.

Beispiel: Wachſe in $5 + 3 = 8$ die 3 zu 7, ſo wächst auch die Summe 8 zu 12.

Satz. Wachſen in einer Summe mehrer Zahlen ein oder mehre Stücke, während kein Stück kleiner wird, ſo wächst auch die Summe. 149.

Beweis: Lässt man zunächst nur ein Stück wachſen, während die andern gleich bleiben, ſo wächst die Summe nach 148. Lässt man jedesmal in der ſo erhaltenen Summe ein Stück wachſen, während die andern gleich bleiben, bis alle Stücke, welche wachſen ſollen, gröser geworden ſind, ſo wächst auch jedesmal die Summe, man erhält eine Reihe von Summen, in welcher jede nächstfolgende gröser als die vorhergehende ist, alſo ist nach 144 auch die letzte gröser als die erste.

Satz. Wächst in einem Unterschiede der Abzug (Subtractor), während der Vorrat (Minuend) gleich bleibt, ſo nimmt der Unterschied ab. 150.

Beweis: Es ſei $c > b$, d. h. $c - b$ eine Pluszahl, ſo ſoll bewieſen werden, dass $a - b > a - c$, d. h. dass $(a - b) - (a - c)$ eine Pluszahl ſei. Es ist aber

$$(a - b) - (a - c) = c - b + a - a \quad \text{(nach 131)}$$
$$= c - b \quad \text{(nach 129)}$$

d. h. nach der Vorausſetzung eine Pluszahl.

Beispiel: Wachſe in $18 - 7 = 11$ die 7 um 5, ſo nimmt der Unterschied um 5 ab, d. h. aus 11 wird 6; oder $18 - (7 + 5) = 6$.

D. Die Rechnung erster Ordnung mit benannten Zahlen.

Erklärung. Die benannte Zahl heist das Zeug oder Produkt einer reinen Zahl mit einer Einheit e. Die reine Zahl heist die Anzahl, die Einheit e heist der Name oder die Benennung. Gleich- 151.

benannte Zahlen heisen zwei Zahlen, welche den gleichen Namen haben.

Beispiel: In der benannten Zahl 7 Meter ist 7 die Anzahl, **Meter** der Name. In der benannten Zahl 12 Aepfel ist 12 die Anzahl, Apfel der Name. 5 Mark und 7 Mark ſind gleichbenannte Zahlen. Jede Einheit ist stets ungleich Null geſetzt, alſo auch der Name der benannten Zahl.

152. **Satz. In der Zahlenlehre werden nur gleichbenannte Zahlen zugefügt und abgezogen.**

153. **Satz. Gleichbenannte Zahlen fügt man zu oder zieht man ab, indem man die Anzahlen zufügt oder abzieht und der Summe, bezüglich dem Reste den gleichen Namen giebt.**

Beweis: 1. $ae + be + ce + de = (a + b + c + d)e$ (nach 90)

2. $ae - be = ae + (-be) = ae + (-b)e$

(nach 133) (nach 151)

$= (a + (-b))e = (a - b)e$

(nach $153_{,1}$) (nach 133)

154. **Satz. Alle Sätze der ersten Ordnung der Zahlenlehre gelten auch für die benannten Zahlen.**

Beweis: Alle Sätze der ersten Ordnung ſind aus den beiden Grundformeln $a + (b + 1) = a + b + 1$ und $1 + 1' = 1' + 1$ abgeleitet, wo $1' = 1$ geſetzt war und ſind für die Eins bewieſen. Nun ist aber

$$ae + (be + e) = ae + (be + 1e) = [a + (b + 1)]e = (a + b + 1)e$$
$$= ae + be + 1e$$
$$= ae + be + e$$

und ebenſo auch, wenn wir die gleichen e mit e und e' bezeichnen,

$$e + e' = 1e + 1'e = (1 + 1')e$$
$$= (1' + 1)e$$
$$= 1'e + 1e$$
$$= e' + e$$

alſo gelten die Grundformeln, alſo auch alle Sätze der ersten Ordnung für die benannten Zahlen.

Es ſind hier zahlreiche Uebungen im Zufügen und Abziehen einfach benannter Zahlen vorzunehmen. Anleitung und zahlreiche Uebungsbeispiele bietet das Rechenbuch des Verfassers Heft I.

7. Das Vervielfachen und das Teilen, der Bruch und die Eigenschaften der Zahlen und Brüche.

A. Das Vervielfachen der Zahlen.

155. **Erklärung. Das Vervielfachen, das Multipliziren (gr. pollaplasiázein, lat. multiplicare) heist das Weben zweier reinen Zahlen;**

die beiden Zahlen heisen die Fache oder Faktoren, das Zeug oder Produkt heist ein Vielfaches.

Will man in der Zahlenlehre alle Ordnungen der Grösenknüpfung haben, alſo auch das Höhen oder Potenziren, ſo muss für das Vervielfachen der Zahlen nach 82 Einigung der Fache oder Faktoren gelten. Man muss demnach, wenn man die Zahlenlehre voll entwickeln will, die Grundformel für Einigung der Fache oder Faktoren gelten lassen. Die Grundformel der Vertauschung $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ gilt ſelbstverständlich, da $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1$, wenn $1' = 1$ ist. Die Formel $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ folgt unmittelbar aus 98.

Grundformeln der Vervielfachung. 156.

$$(a + 1) \cdot b = ab + 1 \cdot b \qquad a(b + 1) = ab + a \cdot 1$$
$$1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Für die Vervielfachung der Zahlen gelten die Grundformeln des Einwebens und Verwebens oder der Einigung und Vertauschung der Fache oder Faktoren.

Aus der Grundformel des Vervielfachens folgt unmittelbar das Einmaleins $1 \cdot 2 = 2$.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 2 &= (1+1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 4\\
3 \cdot 2 &= (2+1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4 + 2 = 6\\
4 \cdot 2 &= (3+1) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6 + 2 = 8\\
5 \cdot 2 &= (4+1) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8 + 2 = 10\\
6 \cdot 2 &= (5+1) \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 10 + 2 = 12\\
7 \cdot 2 &= (6+1) \cdot 2 = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 12 + 2 = 14\\
8 \cdot 2 &= (7+1) \cdot 2 = 7 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 14 + 2 = 16\\
9 \cdot 2 &= (8+1) \cdot 2 = 8 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 16 + 2 = 18\\
10 \cdot 2 &= (9+1) \cdot 2 = 9 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 18 + 2 = 20
\end{aligned}
$$

Und in gleicher Weiſe das ganze Einmaleins.

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier Zahlen erhält ein Pluszeichen, wenn beide Zahlen gleiche Zeichen, ein Strichzeichen, wenn ſie entgegengeſetzte Zeichen haben oder 157.

$$(+ a)(+ b) = + ab = (- a)(- b)$$
$$(+ a)(- b) = - ab = (- a)(+ b)$$

Beweis: Die Zeichen der beiden Zahlen können ſein

1, + + 4, — — 2, + — 3, — +

dies giebt vier Fälle für den Beweis.

1. **Fall:** $(+ a)(+ b) = ab$ (nach 70)
$= + ab$ (nach 70)

2. **Fall:** $(+ a)(- b) = a(- b) + ab - ab$ (nach 70 und 129)
$= a(- b + b) - ab$ (nach 89)
$= a \cdot 0 - ab$ (nach 135)
$= - ab$ (nach 94)

3. Fall: $(-a)(+b) = -ab$ folgt ebenso wie 2. Fall.

4. Fall: $(-a)(-b) = ab - ab + (-a)(-b)$ (nach 129)

$= ab + (+a)(-b) + (-a)(-b)$ (nach 157,2)

$= ab + (+a + (-a))(-b)$ (nach 89)

$= ab + 0$ (nach 133 und 135)

$= ab$ (nach 134)

158. **Satz.** $(-1)a = -a$

Jede Zahl erhält mit der Stricheins vervielfacht entgegengesetztes Zeichen.

159. **Satz. Das Zeug oder Produkt mehrer Zahlen erhält ein Pluszeichen wenn 2a Fache oder Faktoren ein Strichzeichen enthalten, dagegen ein Strichzeichen, wenn 2a + 1 Fache ein Strichzeichen enthalten,**

Beweis: Fortleitend

1. Der Satz gilt nach 157, wenn das Zeug nur 2 Fache enthält.
2. Wenn der Satz für ein Zeug von n Fachen A_n gilt, so gilt er auch für das Zeug $A_n a_{n+1}$, welches ein Fach mehr enthält. Denn sei $a_{n+1} = +b$, d. h. enthalte es ein Pluszeichen, so gilt der Satz nach der Annahme. Enthalte dagegen $a_{n+1} = -b$ ein Strichzeichen und habe A_n 2a Fache mit Strichzeichen, so hat nach der Annahme A_n ein Pluszeichen, sei also in diesem Falle $A_n = +c$, so ist $A_n a_{n+1} = (+c)(-b) = -cb$, nach 157; dann hat also das Zeug $A_n a_{n+1}$ 2a + 1 Fache mit Strichzeichen und erhält ein Strichzeichen. Habe dagegen A_n 2a + 1 Fache mit Strichzeichen, so hat nach der Annahme A_n ein Strichzeichen, sei also in diesem Falle $A_n = -c$, so ist $A_n \cdot a_{n+1} = (-c)(-b) = +cb$ nach 157; dann hat also das Zeug $A_n a_{n+1}$ 2a + 2 Fache mit Strichzeichen und erhält ein Pluszeichen.
3. Also gilt der Satz nach 23 allgemein.

160. **Gesetz der Vervielfachung. In jeder Zahlenknüpfung durch Vervielfachen kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und die Malklammern beliebig setzen oder weglassen, die Ordnung der Fache (der Faktoren) beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Fachs (des einen Faktors) mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt. Das Zeug ist wieder eine Zahl. Jedes Zeug oder Produkt von mehren Fachen oder Faktoren erhält ein Pluszeichen, wenn 2 a Fache ein**

Strichzeichen enthalten, dagegen ein Strichzeichen, wenn 2 a + 1 Fache ein Strichzeichen enthalten.

Beweis: Da die Grundformeln des Einwebens und des Verwebens für das Vervielfachen nach 156 gelten, ſo folgt daraus unmittelbar das Geſetz des Verwebens nach 107. Da ferner für das Zufügen der Zahlen nach 125 und 122 die trennbare Einfügung gilt, ſo gilt nach 159 auch der zweite Teil des Satzes.

Satz. **Eine Ziffer n ter Stelle vervielfacht man mit einer Ziffer** 161.
m ter Stelle, indem man die beiden Ziffern nach dem Einmaleins vervielfacht und dem Ergebnisse die n + m te Stelle giebt.

Beweis: $(a \cdot \overbrace{100\cdots}^{n})\ (b \cdot \overbrace{10\cdot\cdot}^{m}) = (a \cdot b)\ (\overbrace{100\cdots}^{n} \cdot \overbrace{10\cdot\cdot}^{m})$ nach 160.

Es ist aber $\overbrace{100\cdots}^{n}$ gleich 1 auf der n ten Stelle nach 117,

ebenſo ist $\overbrace{100\cdots}^{n} \cdot \overbrace{10\cdot\cdot}^{m}$ gleich 1 auf der n + m ten Stelle nach 117;

alſo ist $(a \cdot \overbrace{100\cdots}^{n})\ (b \cdot \overbrace{10\cdot\cdot}^{m}) =$ ab auf der n + m ten Stelle.

Satz. **Das Vervielfachen einer einziffrigen mit einer mehr-** 162.
ziffrigen Zahl. Eine mehrziffrige Zahl vervielfacht man mit einer einziffrigen Zahl, indem man, mit der niedrigsten Stelle beginnend, die Ziffer jeder Stelle mit der Zahl vervielfacht, den Zeugen oder Produkten die entsprechende Stelle giebt und ſie zufügt.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 161.

Beispiel: $327 \times 8 =$

```
  7 × 8 =  56
 20 × 8 = 16
300 × 8 = 24
         ----
         2616
```

Satz. **Das Vervielfachen mehrziffriger Zahlen. Eine Zahl ver-** 163.
vielfacht man mit einer mehrziffrigen Zahl, indem man ſie mit der Ziffer jeder Stelle einzeln vervielfacht, die Zeuge um ſoviel Stellen erhöht, als die betreffende Ziffer rechts Stellen neben ſich hat und die Zeuge zufügt.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 161.

Beispiel: $3273 \times 725 =$

```
   3273
    725
  -----
  16365
  6546
 22911
 -------
 2372925
```

Wenn die eine der Zahlen in zwei einziffrige Fache oder Faktoren zerlegt werden kann, ſo kann man die andre Zahl erst mit dem einen, und das Ergebnis dann mit dem andern Fache vervielfachen; denn a (bc) = (ab) c. z. B. 54215 × 72 = (54215 × 8) × 9. Es ist dieſer Weg bisweilen bequemer.

164. **Satz. Für das Vervielfachen der Zahlen gilt trennbare Knüpfung oder: Wenn ac = bc (Annahme), ſo ist a = b (Folgerung) oder: je zwei Zahlen a und b, welche mit derſelben Zahl c vervielfacht, gleiche Zeuge oder Produkte geben, ſind einander gleich, ſofern die Gröse c ungleich Null ist.**

Beweis: 1. Das Zeug ac = bc ſei Null; dann ist, da c ungleich Null ist, nach 94 a = 0 und b = 0, d. h. a = b.

2. Das Zeug ac = bc ſei ungleich Null; dann nehme an a = b + d, ſo ist

$$bc = ac = (b + d)\ c \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= bc + dc \qquad \text{(nach 89)},$$

d. h. dc eine Gröse, welche zugefügt den Werth von bc nicht ändert, d. h. nach 72 ist dc = 0, und, da c ungleich Null ist, nach 94 d = 0, d. h. a = b.

Beispiel: Sei 7 a = 7 b, ſo ist a = b, ſei 8 (2 + 3) = 8 · 5 ſo ist 2 + 3 = 5.

B. Das Teilen der Zahlen.

a. Das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen.

165. **Erklärung. Das Teilen, das Dividiren, (gr. die parabolē, lat. die divisio) der Zahlen heist die dem Vervielfachen der Zahlen entsprechende Trennung, wo das Zeug (Produkt) a = bc oder a = cb und der eine Fach (der eine Faktor) b gegeben ist, und der andre Fach c geſucht wird. Der gegebene Fach oder Faktor muss stets ungleich Null ſein.**

Das Zeug oder Produkt a, welches geteilt werden ſoll, heist die zu teilende Gröse, (der dividendus), die teilende Gröse b heist der Teiler (der divisor), das Ergebniss des Teilens heist der Quote (der quotiens); den Quoten nennt man auch einen Bruch, die zu teilende Gröse den Zähler, den Teiler den Nenner des Bruches.

Der Fach (der Faktor) und der Teiler (der Divisor) heisen mit gemeinſamem Namen die Vorzahlen (die Koeffizienten) eines Gliedes.

166. **Erklärung. Das Zeichen des Teilens ist ein Doppelpunkt geleſen „durch“ oder auch ein wagerechter Teilstrich, über welchem die**

zu teilende Gröse und unter welchem der Teiler steht, z. B. a : b gelesen „a geteilt durch b", kurz „a durch b", oder auch $\frac{a}{b}$ gelesen „a durch b". Die Zeichen „mal" und „geteilt durch:" heisen umgekehrte Zeichen. Eine Gröse, welche ein Teilzeichen vor sich hat, heist eine Teilgröse; eine Klammer, vor welcher ein Teilzeichen steht, heist eine Teilklammer; der wagerechte Teilstrich gilt als Teilklammer für alle unter demselben stehenden Grösen. z. B. 1 : a oder $\frac{1}{a}$ ist eine Teilgröse; a : (bc) und a : (b + c) oder auch $\frac{a}{bc}$ und $\frac{a}{b+c}$ sind Teilklammern.

Bei dem Teilstriche muss man auf folgenden eigentümlichen Gebrauch achten. Es wird $\frac{ab}{c} = ab : c$, dagegen $a\frac{b}{c} = a\,(b : c)$ gesetzt.

Grundformel des Teilens: 167.

$$a = a \cdot b : b = \frac{ab}{b} \qquad a = a : b \cdot b = \frac{a}{b} \cdot b.$$

Mit derselben Gröse ungleich Null weben und teilen, bez. teilen und weben ändert die Gröse nicht.

Beweis: Unmittelbar aus 49.

Satz. $a \cdot (: b) = a : (\cdot b) = a : b$ und $a : (: b) = a \cdot (\cdot b) = a \cdot b$. 168.

Mit einer Teilgröse webt man, indem man durch die entsprechende Malgröse teilt und durch eine Teilgröse teilt man, indem man mit der entsprechenden Malgröse webt und statt mit einer Malgröse zu weben bez. zu teilen, kann man mit der Gröse ohne Vorzeichen weben bez. teilen.

Beweis: Unmittelbar aus 51.

Satz. $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) : b = a_1 : b + a_2 : b + a_3 : b + \cdots + a_n : b$. 169.

Einen Gliederausdruck (ein polynómos) teilt man durch eine Gröse, indem man jedes Glied durch die Gröse teilt und die entstandenen Quoten (Quotienten) einfügt.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) : b &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (: b) && \text{(nach 168)}\\ &= a_1 \cdot (: b) + a_2 \cdot (: b) + \cdots + a_n \cdot (: b) && \text{(nach 90)}\\ &= a_1 : b + a_2 : b + \cdots + a_n : b && \text{(nach 168)}\end{aligned}$$

Zu bemerken ist hier, dass man nie den Teiler in seine Glieder zerlegen

darf, fondern stets durch den ganzen Teiler teilen muss. Man muss auf diefe Regel genau achten, wenn man nicht in die gröbsten Fehler verfallen will.

170. **Satz.** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

Brüche mit gleichem Nenner fügt man zu oder zieht man ab, indem man die Zähler entsprechend zufügt oder abzieht und das Ergebnis durch den Nenner teilt.

Beweis: Unmittelbar aus 169.

171. **Satz:** $\cdot(:a) = :(\cdot a) = :a \qquad :(:a) = \cdot(\cdot a) = .a$ **wo** $a \gtrless 0$.
Mit einer Teilgröse vervielfacht man, indem man durch die entsprechende Malgröse teilt und durch eine Teilgröse teilt man, indem man mit der entsprechenden Malgröse vervielfacht oder Statt „geteilt durch geteilt durch“ kann man „mal“ und statt „mal geteilt durch“ oder statt „geteilt durch mal“ kann man „geteilt durch“ fetzen.

Beweis: Nach 168 ist

$$b \cdot (:a) = b : (\cdot a) = b : a \qquad b : (:a) = b \cdot a$$

Da nun nach 168 auch

$$b \cdot c = b \cdot (\cdot c) \qquad b : c = b \cdot (:c)$$

ist, fo kann man die obige Formel auch schreiben

$$b \cdot (\cdot (:a)) = b \cdot (:(\cdot a)) = b \cdot (:a) \qquad b \cdot (:(:a)) = b\,(\cdot a)$$

mithin ist nach 164, da in den gleichen Zeugen der erste Fach (Faktor) b gleich ist, auch der zweite Fach gleich, d. h. es ist $\cdot(:a) = :(\cdot a) = :a$ und $:(:a) = \cdot a$.

172. **Satz.** $a \cdot 1 = a : 1 = \frac{a}{1} = a$

Mit Eins vervielfachen oder durch Eins teilen, ändert die Zahl nicht.

Beweis: Es ist $a \cdot 1 = a$ nach 98. Ebenfo ist aber auch

$$a : 1 = a \cdot 1 : 1 \qquad \text{(nach 98)}$$
$$= a \qquad \text{(nach 167)}$$

Satz. $1 = a : a = :a \cdot a$ **wo** $a \gtrless 0$.

173. **Der Bruch zweier gleichen Zahlen ist Eins, und wenn der Bruch zweier Zahlen Eins ist, fo find die Zahlen gleich.**

Beweis: Nach 98 ist $b \cdot 1 = b$, nach 167 ist $b \cdot a : a = b$ und auch $b : a \cdot a = b$. Da nun nach 155 beim Vervielfachen Einigung gilt, fo ist auch

$b \cdot a : a = b \cdot (a : a) = b$ und ist $b : a \cdot a = b \cdot (:a \cdot a) = b$, alfo ist $b \cdot 1 = b \cdot (a : a) = b \cdot (:a \cdot a)$ mithin ist nach 164, da in den gleichen

Zeugen der erste Fach (Faktor) b gleich ist, auch der zweite Fach gleich, d. h. es ist $1 = a : a = : a \cdot a$.

Satz. $0 : a = 0$ 174.

Ein Bruch, in welchem die zu teilende Gröse Null ist, ist Null.

Beweis: $0 : a = 0 \cdot (1 : a) = 0 \cdot (: a)$ (nach 171)

$= 0$ (nach 94)

Satz. Wenn $a : b = 0$ ist oder wenn $a \cdot b = 0$ und $b \gtrless 0$ ist (Annahme), ſo ist $a = 0$ (Folgerung). In jedem Bruche, der Null ist, ist der Zähler Null und in jedem Zeuge oder Produkte zweier Grösen ist der eine Fach Null. 175.

Beweis: 1. Wenn $ab = 0$ ist und $b \gtrless 0$ ist, ſo ist $a = 0$ (nach 94)

2. Wenn $a : b = 0$, ſo ist $a = a : b \cdot b$ (nach 167)

$= 0 \cdot b$ (nach Annahme)

$= 0$ (nach 94)

Erklärung. Die Brucheinheit heist Eins geteilt durch eine Gröse a, welche ungleich Null ist. Das Zeichen der Brucheinheit ist 176.

$$\frac{1}{a} \text{ oder } 1 : a.$$

Dieſe Form der Teilgröse ist die übliche und durfte daher nicht übergangen werden, die Beweiſe werden allerdings viel leichter und mit den Sätzen der andern Rechnungsarten übereinstimmender, wenn man die von mir gewählte Form vorzieht.

Satz. $\frac{1}{a} = 1 : a = : a \qquad \frac{m}{a} = m \cdot \frac{1}{a}$ 177.

Die Brucheinheit „Eins durch a" ist gleich der Teilgröse „geteilt durch a". Alle Sätze, welche für die Teilgröse gelten, gelten alſo auch für die Brucheinheit.

Beweis: Es ist $b \cdot (: a) = b : a$ (nach 168)

$= b \cdot 1 : a = b \cdot 1 \cdot (: a)$ (nach 98 und 171)

$= b \cdot (1 \cdot (: a)) = b \cdot (1 : a)$ (nach 171 und 160)

mithin ist nach 164, da in den gleichen Zeugen der erste Fach (Faktor) b gleich ist, auch der zweite Fach gleich, d. h. es ist $: a = 1 : a = \frac{1}{a}$.

Satz. $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$ oder $1 : (-a) = -(1 : a)$. 178.

In einer Brucheinheit kann das Strichzeichen des Nenners vor die Brucheinheit ſelbst geſetzt werden.

Beweis: Es $1:(-a) = [(1:a)\cdot a]:(-a)$ (nach 165)

$= [-(1:a)\cdot(-a)]:(-a)$ (nach 157)

$= -(1:a)$ (nach 167)

179. **Satz.** $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

In jedem Bruche kann das Strichzeichen des Nenners vor den Bruch gefetzt werden oder Jeder Bruch lässt fich auf eine Form bringen, dass der Nenner eine Pluszahl ist.

Beweis: Unmittelbar nach 178.

180. **Gefetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre. In jeder Knüpfung von Zahlen durch Vervielfachung und Teilung (Multiplikation und Division) kann man ohne Aenderung des Wertes die Malklammer ohne Weiteres, die Teilklammer nach Umkehr aller Mal- und Teilzeichen in der Teilklammer beliebig weg lassen oder fetzen und die Ordnung der Fache und Nenner beliebig ändern. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahl, und zwar hat dieselbe ein Pluszeichen, wenn 2a Fache oder Nenner ein Strichzeichen enthielten, dagegen ein Strichzeichen, wenn 2a + 1 Fache oder Nenner ein Strichzeichen enthielten.**

Beweis: Der erste Teil folgt unmittelbar aus 62. Der zweite Teil, dass das Ergebniss der Knüpfung eine Einfachgröse ist, folgt aus 109, wenn man nach 171 statt jedes Nenners mit der umgekehrten Gröse vervielfacht. Der letzte Teil des Satzes folgt ebenfo aus 160 und 171.

Beispiele: $5\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5\cdot3}{8}+\frac{5\cdot2}{7}=\frac{15}{8}+\frac{10}{7}.$

$7\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)=\frac{7\cdot2}{3}-\frac{7\cdot5}{9}=\frac{14}{3}-\frac{35}{9}.$

$3:\frac{2}{5+3}=3\,\frac{5+3}{2}=\frac{3\cdot5}{2}+\frac{3\cdot3}{2};$ $3\cdot\left(\frac{1}{5+3}\right)=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$

$7:\frac{3}{7-3}=7\cdot\frac{7-3}{3}=\frac{7\cdot7}{3}-7\cdot\frac{3}{3};$ $7\cdot\frac{3}{7-3}=\frac{7\cdot3}{7-3}=\frac{7\cdot3}{4}$

181. **Satz.** $a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}$

Durch einen Bruch teilt man, indem man den Bruch umkehrt und vervielfacht.

Beweis: Unmittelbar aus 180.

Beispiele: $5 : \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)\left(8 \cdot \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = 4.$

$$5 \cdot \frac{1}{4} : \left(\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{8 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{7}$$

$$7 \cdot \frac{1}{8} \cdot 5 \cdot 12 : \left(4 \cdot 21 \cdot \frac{2}{5}\right) = 5 \cdot 7 \cdot 12 : \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 12}{21 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{8}$$
$$= \frac{25}{16}$$

Satz. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ 182.

Man kann einen Bruch ohne Aendrung seines Wertes erweitern und heben, d. h. Zähler und Nenner mit derselben Zahl ungleich Null vervielfachen und teilen.

Beweis: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1$ (nach 172)

$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$ (nach 173)

$= \frac{ac}{bc}$ (nach 180)

Beziehungsgesetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre. 183.
In jedem Zeuge von Fachen und Nennern (oder in jedem Produkte von Faktoren und Divisoren) kann man ohne Aendrung des Wertes jedes Stück des einen Fachs mit jedem des andern vervielfachen und durch jeden ganzen Nenner teilen und die erhaltenen Zeuge zufügen.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 180.

Anm. Dagegen darf man nicht durch die Stücke des Nenners teilen.

Rechenregel fürs Teilen. Beim Teilen der Zahlen nimmt man 184.
den Nenner sovielmal, als er in den höchsten Stellen des Zählers enthalten ist, der Quote (Quotient) erhält die niedrigste von diesen Stellen.

Das Zeug zieht man von den genannten Stellen des Zählers ab, fügt zu dem Reste die nächst niedere Stelle des Zählers, teilt wieder durch den ganzen Nenner und fährt so fort bis zur niedrigsten Stelle des Zählers. Was dann übrig bleibt, schreibt man als Bruch.

Beweis: Unmittelbar nach 183 und 169.

Beispiel: $\frac{3527}{15} = 15 \; 3527 = 235^{2}/_{15}$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 52 \\ 45 \\ \hline 77 \\ 75 \\ \hline 2 \end{array}$$

An dieſem Punkte ist wieder eine reiche Uebung im Rechnen dringend geboten, wenn man die Zahlenlehre wirklich praktisch verwerten und für das Leben fruchtbar machen will. Das Uebungsheft zur Zahlenlehre bietet dazu reiche Gelegenheit: weitere Uebungen bietet das Rechenbuch des Verfassers.

185. **Gemeinnenner. Jede gegebene Reihe von Brüchen kann man auf einen Gemeinnenner bringen, welcher das Zeug oder Produkt der bisherigen Nenner ist, indem man jeden Bruch im Zähler wie im Nenner mit dem Zeuge der Nenner aller andern Brüche vervielfacht und teilt.**

Beweis: Fortleitend oder induktorisch:

1. Der Satz gilt für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, denn es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \qquad \text{(nach 182)}$$

und ebenſo $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

2. Wenn der Satz für n Brüche gilt, ſo dass

$$\frac{A}{B} = \frac{b_1\, b_2 \cdot\cdot b_{a-1}\, a_a\, b_{a+1} \cdot b_n}{b_1\, b_2 \cdot\cdot b_{a-1}\, b_a\, b_{a+1} \cdot b_n}$$ ist, ſo gilt er auch für n + 1 Brüche;

denn es ist

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B} \cdot 1 = \frac{A}{B} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot\cdot b_{a-1}\, a_a\, b_{a+1} \cdot b_n \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot\cdot b_{a-1} \cdot b_a\, b_{a+1} \cdot b_n\, b_{n+1}}$$

(nach 182)

und ebenſo ist

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 1 \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{B}{B} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_1\, b_2 \cdots b_n}{b_1\, b_2 \cdots b_n} \, \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

(nach 182)

3. Alſo gilt der Satz nach 23 ganz allgemein.

Beispiel: $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$; $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$

$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$; $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$

186. **Zufügen und Abziehen der Brüche. Mehre Brüche kann man zufügen oder abziehen (addiren oder subtrahiren), indem man**

ſie auf gleichen Nenner bringt, dann die Zähler zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch den Nenner teilt, oder

Mehre Brüche von ungleichem Nenner kann man zufügen oder abziehen, indem man jeden Zähler mit dem Zeuge (Produkte) aus den Nennern aller andern Brüche vervielfacht, die erhaltenen Zeuge entsprechend zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch das Zeug ſämmtlicher Nenner teilt, oder

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \cdots \pm \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_1 \pm P_2 \pm \cdots \pm P_n}{P}, \text{ wo}$$

$P_a = b_1 b_2 \cdots b_{a-1} a_a b_{a+1} \cdots b_n$ $\quad P = b_1 b_2 \cdots b_n$ **geſetzt ist.**

Beweis: Unmittelbar nach 185.

Beispiel:

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{168 + 160 - 105}{280} = \frac{223}{280}$$

Satz. Man kann jede durch Zufügen und Abziehen, Verviel- 187.
fachen und Teilen von Zahlen erzeugte Gröse, welche ungleich Null ist, als Einheit ſetzen, und gelten dann für alle aus dieſer erzeugten Zahlen alle Geſetze der ersten und zweiten Ordnung der Zahlenlehre

Beweis: Unmittelbar nach 180 und 63.

b. Das Rechnen mit Zehntbrüchen (Dezimalbrüchen.)

Erklärung. Die Namen und Zeichen der Zehntbrüche 188.
(der Dezimalbrüche). Um auch die Brüche durch die Ziffern einfach bezeichnen zu können, ſetzt man rechts neben der nullten Stelle, wo die Einer stehen, ein Komma. Die Stelle rechts neben dem Komma heist die erste Bruchstelle, die ate Stelle rechts neben dem Komma heist die ate Bruchstelle. Jede Ziffer hat auf der a + 1ten Bruchstelle ein zehntel ſoviel Wert als auf der aten Bruchstelle.

Die ate Bruchstelle heist auch die — ate Stelle.

Die Eins heist auf der ersten Bruchstelle ein Zehntel, (Zeichen $0_{,1}$), auf der zweiten Bruchstelle ein Hundertel (Zeichen $0_{,01}$), auf der dritten Bruchstelle ein Tauſendtel (Zeichen $0_{,001}$), auf der vierten Bruchstelle ein Zehntauſendtel (Zeichen $0_{,0001}$), auf der fünften Bruchstelle ein Hunderttauſendtel (Zeichen $0_{,00001}$), und auf der ſechsten Bruchstelle ein Milliontel (Zeichen $0_{,000001}$).

Beim Leſen der Zehntbrüche lieſ't man die Zahl rechts vom Komma als ganze Zahl und giebt ihr den Namen der letzten Bruchstelle.

Zwei Zehntbrüche heisen gleichnamig, wenn ihre letzten Ziffern auf der gleichen Bruchstelle stehen.

Beispiele: $0_{,347}$ gelesen dreihundert vierzig und sieben Tausendtel.
$0_{,0025}$ gelesen zwanzig und fünf Zehntausendtel.
$0_{,0508}$ gelesen fünfhundert und acht Zehntausendtel.
$0_{,000008}$ gelesen acht Milliontel.

Es sind $0_{,253}$ und $0_{,008}$ gleichnamig. Ebenso sind $0_{,80}$ und $0_{,25}$ gleichnamig.

189. **Satz. In jedem Zehntbruche (Dezimalbruche) kann man, wenn das Komma seine Stelle behält, rechts und links beliebig viele Nullen anhängen ohne Aendrung des Wertes.**

Beweis: Unmittelbar aus 188.

Beispiel: Es ist $0_{,8} = 0_{,800} = 000_{,8} = 0_{,80000}$.

190. **Satz. Mehre Zehntbrüche (Dezimalbrüche) macht man gleichnamig, indem man allen durch Anhängen von Nullen gleich viel Stellen rechts vom Komma giebt.**

Beweis: Unmittelbar aus 189.

Beispiele: $3_{,23}$ $52_{,756}$ $6_{,8273}$ und $0_{,00562}$ werden gleichnamig $3_{,23000}$ $52_{,75600}$ $6_{,82730}$ und $0_{,00562}$.

191. **Satz. Zufügen der Zehntbrüche (Dezimalbrüche). Zehntbrüche (Dezimalbrüche) fügt man zu, indem man sie gleichnamig macht, sie wie ganze Zahlen zufügt und der Summe den gleichen Namen giebt, wie den Stücken.**

Beweis: Unmittelbar aus 153.

Beispiel: Es sei zu fügen $8_{,5} + 7_{,306} + 0_{,2253}$, so ergiebt sich

$8_{,5000}$	Ebenso	$3_{,0800}$	Ebenso	$8_{,3567}$
$7_{,3060}$		$27_{,4020}$		$0_{,2378}$
$0_{,2253}$		$8_{,0637}$		$5_{,0236}$
$16_{,0313}$		$38_{,5457}$		$13_{,6181}$

Es empfiehlt sich hier eine reiche Uebung im Zufügen. Der geübte Rechner darf beim Zufügen nicht mehr die Stücke nennen, welche er zufügt, sondern muss kurz rechnen, d. h. gleich die Summe nennen, welche herauskommt, also z. B. im letzten Beispiele fügt er die Zehntausendtel also zu: 6, 14, 21, 1 hin; 2, 5, 12, 18, 8 hin; 1, 3. 6, 11, 1 hin; 1, 3, 6, 6 hin; 5, 13, 13 hin. Er lernt dies, indem er ganze Seiten eines Buches aufrechnet. Beim Buchführen wird jede Seite von unten nach oben aufgerechnet, dann nochmals zur Probe, ob richtig gerechnet ist, von oben nach unten durchgerechnet, und, wenn die Summe stimmt, diese als Uebertrag auf die folgende Seite vorgetragen und beim Zufügen mitgerechnet. Jeder Gebildete soll dies mit gröster Leichtigkeit ausführen können. Das Uebungsbuch zur Zahlenlehre und das Rechenheft II des Verfassers bieten zahlreiche Gelegenheit zur Uebung.

192. **Satz, Abziehen der Zehntbrüche (Dezimalbrüche). Zehntbrüche (Dezimalbrüche) zieht man ab, indem man sie gleichnamig macht, sie wie ganze Zahlen abzieht und dem Reste den gleichen Namen giebt, wie dem Vorrate und Abzug.**

Beweis: Unmittelbar aus 153.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 28_{,0250} \\ 3_{,7806} \\ \hline 24_{,2444} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12_{,08526} \\ 8_{,92000} \\ \hline 3_{,16526} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25_{,54000} \\ 8_{,59378} \\ \hline 16_{,94622} \end{array}$$

Auch hier darf der geübte Rechner beim Abziehen nicht erst den Vorrat und Abzug nennen, fondern muss kurz rechnen, d. h. jedesmal nur den Rest nennen, der herauskommt.

Satz. Vervielfachen mit zehn, hundert, taufend, Million. Eine Zahl vervielfacht man mit zehn, indem man das Komma eine Stelle nach rechts rückt, mit hundert, indem man es zwei Stellen, mit taufend, indem man es drei Stellen, mit Million, indem man es fechs Stellen nach rechts rückt. 193.

Beweis: Unmittelbar aus 188.

Beispiele: $8_{,56} \times 10 = 85_{,6}$ $\quad 3_{,56} \times 100 = 356,$
$2_{,37} \times 1000 = 2370$ $\quad 0_{,0034567} \times 1000000 = 3456_{,7}$.

Satz. Teilen durch zehn, hundert, taufend, Million. Eine Zahl teilt man durch zehn, indem man das Komma eine Stelle nach links rückt, durch hundert, indem man es zwei Stellen, durch taufend, indem man es drei Stellen, durch Million, indem man es fechs Stellen nach links rückt. 194.

Beweis: Unmittelbar aus 188.

Beispiele: $7 : 10 = 0_{,7}$ $\quad 8 : 100 = 0_{,08}$ $\quad 5_{,36} : 1000 = 0_{,00536}$
$233_{,45} : 1000000 = 0_{,00023345}$.

Satz. Eine Zahl vervielfacht man mit $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ u. f. w., indem man das Komma um foviel Stellen nach links rückt, als die Eins im Nenner Nullen rechts neben fich hat. 195.

Beweis: Unmittelbar aus 194.

Beispiele: $8 \cdot \frac{1}{10} = 0_{,8}$ $\quad 253 \times \frac{1}{100} = 2_{,53}$
$38 \times \frac{1}{1000} = 0_{,038}$ $\quad 5 \cdot \frac{1}{1000000} \times 0_{,000005}$

Satz. Eine Zahl teilt man durch $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ u. f. w., indem man fie mit 10, 100, 1000 u. f. w. vervielfacht, oder indem man das Komma um foviel Stellen nach rechts rückt, als die Eins im Nenner Nullen rechts neben fich hat. 196.

Beweis: Unmittelbar nach 181.

Beispiele: $8 : {^1/_{10}} = 80$ $\quad 25 : {^1/_{100}} = 2500$
$0_{,03} : {^1/_{1000}} = 30$ $\quad 32_{,5} : {^1/_{1000000}} = 32500000.$

Satz. Vervielfachen eines Zehntbruches (Dezimalbruches). Einen Zehntbruch (Dezimalbruch) vervielfacht man mit einer ganzen Zahl, indem man beide Zahlen als ganze Zahlen ver- 197.

vielfacht und dem Zeuge oder Produkte dann foviel Stellen rechts vom Komma giebt, als der Dezimalbruch hatte.

Beweis: Der Zehntbruch ist nach 188 das Zeug oder Produkt der Zahl als ganzen-Zahl und der Brucheinheit des Zehntbruches (Dezimalbruches). Nach 180 kann man die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändern. Man kann alfo zunächst die beiden Zahlen als ganze Zahlen vervielfachen und dann das Zeug mit der Brucheinheit des Zehntbruches (Dezimalbruches) vervielfachen.

Beispiel: $287 \times 51{,}_{36} = 287 \times 5136 \times {}^{1}/_{100} = 1473032 \cdot {}^{1}/_{100}$.
$= 14730{,}_{32}$.

198. **Satz. Vervielfachung zweier Zehntbrüche (Dezimalbrüche.) Zwei Zehntbrüche (Dezimalbrüche) vervielfacht man, indem man fie als ganze Zahlen vervielfacht und dem Zeuge oder Produkte foviel Stellen rechts vom Komma giebt, als beide Dezimalbrüche zufammen hatten.**

Beweis: Die beiden Zehntbrüche schreibe man als Zeuge oder Produkte einer ganzen Zahl des Zählers mit der Brucheinheit des Nenners. Dann vervielfache man nach 180 die beiden ganzen Zahlen, da die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ist. Demnächst vervielfache man das Zeug mit der ersten Brucheinheit nach 195, indem man das Komma um foviel Stellen nach links rückt, als die Eins im Nenner Nullen rechts neben fich hat. Endlich vervielfache man das hierdurch erhaltene Zeug mit der zweiten Brucheinheit nach 195, indem man das Komma abermals um foviel Stellen nach links rückt, als nunmehr die Eins im Nenner Nullen rechts neben fich hat; dann hat alfo das Zeug oder Produkt der beiden ganzen Zahlen foviel Stellen rechts vom Komma, als beide Zehntbrüche zufammen hatten.

Beispiele: $5{,}_{27} \times 8{,}_{363} = 527 \times {}^{1}/_{100} \times 8363 \times {}^{1}/_{1000}$
$= 527 \times 8363 \times {}^{1}/_{100} \cdot {}^{1}/_{1000} = 4407301 \cdot {}^{1}/_{100} \cdot {}^{1}/_{1000}$
$= 44073{,}_{01} \times {}^{1}/_{1000} = 44{,}_{07301}$.

199. **Satz. Teilen durch Zehntbrüche (Dezimalbrüche). Eine Zahl teilt man durch einen Dezimalbruch, indem man ihr foviel Stellen rechts vom Komma giebt, als der Zehntbruch Stellen rechts vom Komma hat und fie dann wie ganze Zahlen teilt.**

Beweis: Habe der Zehntbruch n Stellen rechts vom Komma, fo giebt man der Zahl nach 189 auch n Stellen rechts vom Komma. Da nun die Ordnung der Fache oder Faktoren und der Nenner nach 180 beliebig ist, fo kann man erst die ganzen Zahlen durch einander

teilen und dann die beiden Nenner durch einander teilen, da aber die letztern beide gleich ſind, ſo geben die beiden Nenner, der eine durch den andern geteilt, nach 173 Eins.

Beispiel: $1652 : 2{,}_{36} = 1652{,}_{00} : 2{,}_{36}$
$= 165200 : 236$
$= 700.$

Satz. Einen Zehntbruch (Dezimalbruch) teilt man durch einen Zehntbruch, indem man beiden gleichviel Stellen rechts vom Komma giebt und ſie wie ganze Zahlen teilt. 200.

Beweis: Unmittelbar nach 199.

Beispiel: $3{,}_{07} : 5{,}_{6} = 3{,}_{07} : 5{,}_{60} = 307 : 560 = 0{,}_{548214}$.

Alle dieſe Rechnungen mit Zehntbrüchen (Dezimalbrüchen) ſind bis zur vollsten Geläufigkeit einzuüben. Es empfiehlt ſich dazu des Verfassers Uebungsheft zur Zahlenlehre, bezüglich ſein Rechenheft II.

C. Die Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Satz. Eine Vergleichung ändert ſich nicht, wenn man auf beiden Seiten mit gleichen Pluszahlen vervielfacht oder teilt; ſie wird aber entgegengeſetzt, wenn man auf beiden Seiten mit gleichen Strichzahlen vervielfacht oder teilt. 201.

Beweis: 1. Es ſei $a > b$, d. h. $a - b$ eine Pluszahl nach 142 und ſei c eine Pluszahl, ſo ist nach 180 $(a-b)\,c = ac - bc$ eine Pluszahl, mithin $ac > bc$. Ebenſo ist nach 183 und 180 $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ eine Pluszahl, mithin $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

2. Es ſei $a > b$, d. h. $a - b$ eine Pluszahl, dagegen c eine Strichzahl; dann ist nach 157 $(a - b)\,c = ac - bc$ eine Strichzahl, d. h. $bc - ac$ eine Pluszahl und nach 142 $ac < bc$. Ebenſo ist dann $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ nach 180 eine Strichzahl, d. h. $\frac{b}{c} - \frac{a}{c}$ eine Pluszahl und $ac < bc$.

Beispiel: Da $\frac{5}{3} > \frac{3}{4}$ ist, ſo ist auch $\frac{5 \cdot 7}{3} > \frac{3 \cdot 7}{4}$; dagegen ist $\frac{5}{3} \cdot (-3) < \frac{3}{4} \cdot (-3)$ d. h. es ist $-5 < -\frac{9}{4}$.

Satz. Wächst in einem Zeuge oder Produkte zweier Zahlgrösen die eine der Grösen, während die andre gleich bleibt und eine Pluszahl ist, so wächst auch das Zeug, und umgekehrt 202.

Wenn ein Zeug oder Produkt zweier Zahlgrösen wächst, während die eine der Grösen gleich bleibt und eine Plusgröse ist, ſo wächst auch die andre der Grösen.

Beweis: Unmittelbar nach 201.

Beispiele: Es ist $(7+1)\,3 > 7 \cdot 3$.

Es ist $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) 7 > \frac{1}{3} \cdot 7$.

203. **Satz. Wachſen in einem Zeuge oder Produkte mehrer Plusgrösen eine oder mehre der Grösen, während keine kleiner wird, ſo wächst auch das Zeug.**

Beweis: Lässt man zunächst nur eine Gröse wachſen, während die andern gleich bleiben, ſo wächst auch nach 202 das Zeug. Lässt man jedesmal in dem ſo erhaltenen Zeuge die eine Gröse wachſen, während die andern gleich bleiben, bis alle Grösen, welche wachſen ſollen, gröser geworden ſind, ſo wächst auch jedesmal das Zeug, und man erhält eine Reihe von Zeugen, in welcher jedes nächstfolgende gröser als das vorhergehende ist, alſo ist nach 144 auch das letzte gröser als das erste.

Beispiel: $(3+2)(5+3)\,7 > 3 \cdot 5 \cdot 7$.

204. **Satz. Das Zeug oder Produkt mehrer Pluszahlen, ist, wenn die einzelnen Zahlen kleiner als Eins ſind, auch kleiner als Eins, wenn die einzelnen Zahlen gröser als Eins ſind, auch gröser als Eins.**

Beweis: Unmittelbar aus 203.

Beispiele: $3 \cdot 2 > 1$ und $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} < 1$.

205. **Erklärung. Eine echte Bruchzahl heist ein Bruch von Pluszahlen, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner.**

206. **Satz. Jede echte Bruchzahl $\frac{a}{b}$ ist kleiner als Eins, und jede Zahl welche kleiner ist als Eins, ist eine echte Bruchzahl.**

Beweis: 1. Es ſei $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, d. h. a und b Pluszahlen und $b > a$, ſo ist $b - a$ eine Pluszahl, alſo auch $\frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$ (nach 180) eine Pluszahl d. h. $\frac{a}{b} < 1$.

2. Es ſei a kleiner als 1, ſo ist $a = \frac{a}{1}$, nach 205 ein echter Bruch.

Beispiele: $\frac{7}{8} < 1$; $\frac{3}{4} < 1$; $\frac{5}{12} < 1$.

207. **Satz. Das Zeug oder Produkt echter Bruchzahlen ist wieder eine echte Bruchzahl.**

Beweis: Unmittelbar aus 204.

Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28} < 1$.

Satz. Wächst in einem Bruche von Plusgrösen, während der Zähler gleich bleibt, der Nenner, ſo nimmt der Bruch ab, und umgekehrt. 208.

Nimmt ein Bruch von Plusgrösen ab, dessen Zähler gleich bleibt, ſo wächst der Nenner.

Beweis: 1. Wenn a, b und c Plusgrösen ſind und $c > b$, d. h. $c - b$ eine Plusgröse, ſo ist $\frac{a(c-b)}{bc} = \frac{ac - ab}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ (nach 180) eine Plusgröse, alſo der Bruch $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$.

2. Wenn a, b und c Plusgrösen ſind und $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$, ſo ist $\frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ eine Plusgröse, alſo ist auch $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{ac - ab}{bc} = \frac{a(c-b)}{bc}$ eine Plusgröse und, da a, b und c Plusgrösen, auch $c - b$ eine Plusgröse (nach 180) d. h. $c > b$.

Beispiele: $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$; $\frac{3}{9} < \frac{3}{8}$.

a. Die Eigenschaften ganzer Pluszahlen.

Erklärung. Das Aufgehen: Man ſagt, eine ganze Zahl a gehe in eine andre b auf, wenn es eine ganze Zahl c giebt, welche mit der ersten a vervielfacht die zweite b giebt, oder wenn $b = ac$, und zwar ſagt man dann, a gehe in b cmal auf. 209.

Beispiel: 8 geht in 56 ſiebenmal auf, 9 geht in 72 achtmal auf.

Satz. Eins geht in jede Zahl auf, und jede Zahl geht in ſich ſelbst auf. 210.

Beweis: Es ſei a eine beliebige Zahl, dann ist $a = 1 \cdot a$, alſo u. ſ. w.

Satz. Eine Zahl a, welche in b aufgeht, ist nicht gröser als b. 211.

Beweis: Es ſeien a, b und c ganze Pluszahlen, d. h. jede Eins oder gröser als Eins, und $b = ac$. Angenommen nun, dass $a > b$ wäre, ſo wäre auch $a - b$ eine Pluszahl, alſo auch $(a - b)c = ac - bc = b - bc$ eine Pluszahl.

Dies ist aber unmöglich, denn ist $c = 1$, ſo ist $b - bc = b - b = 0$, alſo keine Pluszahl, und ist $c > 1$, ſo ist nach 202 auch $bc > b$, mithin $b - bc$ eine Strichzahl, d. h. keine Pluszahl, alſo ist auch die Annahme unmöglich.

Satz. Zwei ganze Pluszahlen, welche gegenseitig in einander aufgehen, ſind einander gleich. 212.

Beweis: Da a in b aufgeht, ſo ist nach 211 a nicht $>$ b, und da b in a aufgeht, ſo ist nach 211 auch a nicht $<$ b, alſo ist nach 143 $a = b$.

213. **Satz. Wenn eine Zahl a in eine zweite b $\mathfrak{a}$mal aufgeht und die zweite b in eine dritte c $\mathfrak{b}$mal aufgeht, ſo geht auch die erste in die dritte, und zwar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$mal auf.**

Beweis: Da a in b $\mathfrak{a}$mal aufgeht, und da b in c $\mathfrak{b}$mal aufgeht, ſo ist $b = a\mathfrak{a}$ und $c = b\mathfrak{b}$, alſo ist $c = b\mathfrak{b} = a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, d. h. a geht in c $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$mal auf.

Beispiel: 5 geht in 40 achtmal, 40 geht in 280 ſiebenmal auf, alſo geht 5 in 280 auch 8×7 mal auf.

214. **Erklärung. Das Gemeinmas oder das gemeinschaftliche Mas zweier Zahlen heist eine Zahl, welche in die beiden Zahlen aufgeht.**

Einander fremd oder primär heisen zwei Zahlen, deren gröstes Gemeinmas eins ist.

Beispiele: Für 36 und 30 ist 6 das Gemeinmas; dagegen ſind 6 und 7 einander fremd.

215. **Satz. Das Gemeinmas zweier Zahlen ist auch ein Gemeinmas ihrer Summe, ihres Unterschiedes und jedes Gliederausdruckes dieſer Zahlen, in dem nur ganze Zahlen als Fache oder Faktoren vorkommen.**

Beweis: Es ſei c das Gemeinmas von a und b und gehe in a $\mathfrak{a}$mal, in b $\mathfrak{b}$mal auf, d. h. es ſei $a = \mathfrak{a}c$ und $b = \mathfrak{b}c$, ſo ist

1. $a + b = \mathfrak{a}c + \mathfrak{b}c = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,c$.
2. $a - b = \mathfrak{a}c - \mathfrak{b}c = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\,c$.
3. Ein beliebiger Gliederausdruck der Zahlen a und b lässt ſich ausdrücken durch die Form $S(\pm a d_m \pm b e_n)$, wo d_m und e_n ganze Zahlen ſind; es ist aber

$$S(\pm a d_m \pm b e_n) = S(\pm (\mathfrak{a}c)\, d_m \pm (\mathfrak{b}c)\, e_n)$$
$$= S(\pm c\,(\mathfrak{a} d_m) \pm c\,(\mathfrak{b} e_n)) \qquad \text{(nach 180)}$$
$$= c\,(S(\pm \mathfrak{a} d_m \pm \mathfrak{b} e_n)) \qquad \text{(nach 183)}$$

wo $S(\pm \mathfrak{a} d_m \pm \mathfrak{b} e_n)$ eine Summe ganzer Zahlen, alſo nach 131 wieder eine ganze Zahl, mithin c das Gemeinmas des gegebenen Gliederausdruckes.

Beispiele: 9 ist Gemeinmas von 63 und 72, alſo auch von $63 + 72 = 135$, von $72 - 63 = 9$, von $5 \cdot 63 - 2 \cdot 72 = 171$.

216. **Satz. Wenn man aus einem gegebenen Pare von Pluszahlen a und b ein zweites Par dadurch ableitet, dass man die kleinere von der grösern abzieht und die kleinere und den Unterschied als zweites**

Par fetzt; wenn man auf gleiche Weife aus dem zweiten Pare ein drittes Zahlenpar ableitet und hiermit fo lange fortfährt, als die beiden Zahlen eines Pares noch verschieden find, fo muss man zuletzt zu einem Pare gleicher Zahlen gelangen und jede derfelben ist das gröste Gemeinmas der gegebenen Zahlen, und jedes Gemeinmas von a und b geht auch in dies gröste Gemeinmas auf.

Beweis: Es gehe c in a und in b auf, fo geht es nach 215 auch in a — b auf, dann auch in b — (a — b) = 2 b — a, dann auch in a — b — (2b — a) = 2a — 3b, und fofort bis man zuletzt zu einem Pare gleicher Zahlen d gelangt. Dann geht nach 215 auch c in d auf. Es geht dann alfo jedes Gemeinmas von a und b auch in d auf. Andrerfeits ist aber auch jede Zahl eines vorhergehenden Pares eine Summe aus den Zahlen des folgenden, da die kleinere bleibt, und die grösere die Summe ist aus der kleinern und dem Unterschiede, alfo find auch die gegebenen Zahlen a und b Summen der beiden gleichen p und p; alfo ist auch jedes Gemeinmas von p und p ein Gemeinmas von a und b, d. h. da p Gemeinmas von p und p ist auch p das Gemeinmas von a und b, und zwar, da kein Gemeinmas von a und b gröser als p fein kann, das gröste.

Beispiel: Es feien gegeben 315 und 84. Dann ist 315 — 84 = 231, 231 — 84 = 157, 157 — 84 = 63, 84 — 63 = 21, 63 — 21 = 42, 42 — 21 = 21; alfo ist 21 das gröste Gemeinmas von 315 und 84 und gehen die andern Gemeinmase 3 und 7 fämmtlich in 21 auf.

Satz. Wenn m das gröste Gemeinmas von a und b ist, so ist mc das gröste Gemeinmas von ac und bc. 217.

Beweis: Das gröste Gemeinmas von a und b findet man, indem man jedesmal die kleinere Gröse von der grösern abzieht und aus der kleinern und dem Unterschiede ein neues Par bildet. Sei b die kleinere, fo erhält man alfo aus a und b das neue Par a — b und b. Ganz auf gleiche Weife erhält man aus dem Pare ac und bc das neue Par ac — bc = (a — b) c und bc. Das entsprechende neue Par aus ac und bc ist alfo c mal fo gros als das aus a und b. Ganz auf gleiche Weife verhält es fich aber mit jedem neuen Pare, welches durch Abziehen der kleinern von der grösern Zahl gebildet wird. Auch das letzte Par gleicher Zahlen, welches aus ac und bc gewonnen wird, ist alfo c mal fo gros, als das letzte Par gleicher Zahlen, welches aus a und b gewonnen wird, d. h. da dies m und m ist, fo ist jenes mc und mc, und ist dies nach 216 ebenfo das gröste Gemeinmas von ac und bc, wie m das ist von a und b.

Beispiel: 9 ist das gröste Gemeinmas von 63 und 54, alſo ist auch $5 \cdot 9 = 45$ das gröste Gemeinmas von $5 \cdot 63 = 315$ und $5 \cdot 54 = 270$.

218. **Satz. Wenn eine Zahl c in ein Zeug oder Produkt zweier Zahlen ab aufgeht und dem einen Fache oder Faktor a fremd ist, so geht ſie in den andern auf.**

Beweis: Es geht c in ab auf (Vorausſetzung) und ebenſo in cb. Da aber a und c einander fremde ſind, ſo ist ihr grōstes Gemeinmas 1 (nach 214) mithin ist das gröste Gemeinmas von ab und cb nach 217 die Zahl $1\,b = b$. Die Zahl c geht, da ſie in ab und cb aufgeht, auch nach 217 in deren grōstes Gemeinmas, d. h. in b auf.

Beispiel: 11 geht in $1001 = 7 \cdot 143$ auf; es ist 7 fremd alſo geht es in 143 auf.

219. **Erklärung: Eine Primzahl heist eine Zahl, in welche auser Eins und der Zahl ſelbst keine andre Zahl aufgeht.**

Eine zuſammengesetzte Zahl heist eine Zahl, welche nicht Primzahl ist, d. h. in welche auser der Eins und der Zahl ſelbst mindestens noch eine Zahl aufgeht.

Primfache oder Primfaktoren heisen die Fache oder Faktoren, welche Primzahlen ungleich Eins ſind.

Beispiele: Primzahlen: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
Zuſammengeſetzte Zahlen: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20.
Primfache: In 6 ſind 2, 3, in 15 ſind 3, 5, in 18 ſind 2, 3, 3.

220. **Satz. Eine Primzahl a, welche in eine andre Zahl b nicht aufgeht, ist ihr fremd oder primär.**

Beweis: Da a eine Primzahl ist, ſo geht in ſie auser a und 1 keine Zahl auf nach 219, da aber a in b nicht aufgeht, ſo geht in a und b nur 1 auf, d. h. a ist der b fremd oder primär (nach 214).

221. **Satz. Eine Primzahl a, welche in 2 Zahlen b und c nicht aufgeht, geht auch nicht in das Zeug oder Produkt derſelben bc auf.**

Beweis (trennend oder indirekt): Angenommen, es ginge a in bc auf, ſo müsste, da a Primzahl ist und in b nicht aufgeht, d. h. da a dem b fremde oder primär ist (nach 220), a in c aufgehen (nach 218). Nach dem Satze darf aber a nicht in c aufgehen, alſo ist die Annahme unmöglich.

Beispiele: Da 9 in 7 und 8 nicht aufgeht, ſo geht es auch nicht in $7 \cdot 8 = 56$ auf. Da 11 in 9 und 8 nicht aufgeht, ſo geht es auch nicht in $9 \cdot 8 = 72$ auf.

222. **Satz. Wenn eine Primzahl a in mehre Zahlen nicht aufgeht, ſo geht ſie auch nicht in ihr Zeug (Produkt) auf.**

Beweis (fortleitend in Bezug auf die Anzahl der Zahlen $b_1, b_2 \cdots b_n$). Angenommen, der Satz gelte für a Zahlen (dass

nämlich, wenn die Primzahl a in b_1, $b_2 \cdots b_a$ nicht aufgeht, ſie auch nicht in das Zeug derſelben $b_1 b_2 \cdots b_a$ aufgeht), ſo beweiſe ich, dass er auch für $a + 1$ Zahlen b_1, $b_2 \cdots b_{a+1}$ gelte. Nach der Vorausſetzung geht nämlich die Primzahl a nicht in die Zahlen b_1, $b_2 \cdots b_a$ auf, mithin nach der Annahme auch nicht in deren Zeug $b_1 b_2 \cdots b_a$, aber nach der Vorausſetzung geht ſie auch nicht in b_{a+1} auf, mithin nach 221 auch nicht in das Zeug der beiden Zahlen, d. h. nicht in $b_1 b_2 \cdots b_{a+1}$.

Wenn alſo der Satz für eine beliebige Reihe von Zahlen gilt, ſo gilt er auch für die Reihe, welche eine Zahl mehr enthält. Nun gilt er nach 221 für zwei Zahlen, alſo auch allgemein für beliebig viele Zahlen.

Satz. Jede zuſammengeſetzte Zahl a lässt ſich in Primfache (Primfaktoren) zerlegen. 223.

Beweis: 1. Da a eine zuſammengeſetzte Zahl, ſo muss nach 219 wenigstens eine von 1 und a verschiedene Zahl in ſie aufgehen, dies ſei b, und es gehe b in ſie c mal auf, ſo muss $c \gtrless 1$ ſein, denn ſonst wäre $a = 1 \cdot b = b$ wider die Annahme, aber auch $c \gtrless a$, denn ſonst wäre $a = a \cdot b$, d. h. $b = 1$ wider die Annahme. Es lässt ſich alſo jede zuſammengeſetzte Zahl in zwei von 1 und a verschiedene Fache oder Faktoren zerlegen, und dieſe beiden Fache können nach 211 nicht gröser als a, aber, wie eben bewieſen, auch nicht gleich a ſein, ſie müssen alſo kleiner ſein als a.

2. Ist von den beiden Fachen oder Faktoren b und c, in welche a zerlegt wurde, der eine noch eine zuſammengeſetze Zahl, ſo kann man dieſe (nach Beweis 1) wieder in zwei kleinere, von 1 verschiedene Fache zerlegen u. ſ. w. Jedes Fach wird hiebei mindestens um 1 kleiner, alſo muss das Zerlegen in kleinere Fache eine Grenze haben, d. h. die Fache können nicht zuſammengeſetzte Zahlen bleiben, ſondern werden zuletzt lauter Primzahlen.

Satz. Wenn zwei Zeuge A und B von Primfachen oder Primfaktoren gleich ſind, ſo können ſich beide nur durch die Ordnung ihrer Fache unterscheiden. 224.

Beweis (fortleitend in Bezug auf die Anzahl der Primfache von A).

1. Angenommen, der Satz gelte, wenn A ein Zeug von n Primfachen $a_1 a_2 \cdots a$ ist, ſo beweiſe ich, dass er auch gelte, wenn A ein Zeug von $n + 1$ Primfachen $a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ ist. Nach der Vorausſetzung ſind A und B gleich, alſo muss a_{n+1} in $B = A$ aufgehen, mithin muss es nach 221 auch in ein Fach von B aufgehen, dies ſei

x. Da aber die Fache von B nach der Vorausſetzung Primfache ſind, ſo geht in x nur 1 und x auf, und da a_{n+1} als Primfach $\gtrless 1$ ist nach 219, ſo muss alſo $a_{n+1} = x$ ſein. Da ferner die Ordnung der Fache nach 180 beliebig ist, ſo ſetze in B das Fach x auf die letzte Stelle, und ſei das Zeug der übrigen Fache C, ſo ist

$$Ca_{n+1} = Cx = B = A = a_1a_2 \cdots a_na_{n+1},$$

mithin nach 164

$$C = a_1a_2 \cdots a_n.$$

Nach der Annahme gilt nun der Satz für n Fache; es können ſich mithin die Fache von C von den Fachen $a_1a_2 \cdots a_n$ nur durch die Ordnung unterscheiden, alſo können ſich auch die Fache von B von den Fachen $a_1a_2 \cdots a_na_{n+1}$ von A nur durch die Ordnung unterscheiden, d. h. wenn der Satz für n Fache gilt, ſo gilt er auch für n + 1 Fache.

2. Nun gilt er aber, wenn A nur 2 Fache a_1a_2 enthält; denn (nach Beweis 1) muss a_2 eins der Fache von B ſein. Es ſei $B = Ca_2$, ſo ist

$$Ca_2 = B = A = a_1a_2, \qquad \text{alſo nach 164 } C = a_1,$$

mithin $B = a_1a_2$, d. h. der Satz gilt für zwei Fache, mithin nach Beweis 1 fortleitend auch für beliebig viele Fache.

225. **Satz. In eine Zahl A können auser 1 keine andern Zahlen als die Primfache von A und deren Zeuge aufgehen.**

Beweis: Es ſeien a_1, $a_2 \cdots a_n$ die Primfache von A, d. h. $A = a_1a_2 \cdots a$, und es gehe eine beliebige Zahl $B \gtrless 1$ in A und zwar C mal auf, ſo ist auch A = BC. Nun zerlege man BC in ſeine Primfache, ſo müssen dieſe den Primfachen $a_1a_2 \cdots a_n$ gleich ſein (nach 224), mithin ist B entweder gleich einem dieſer Fache oder gleich einem Zeuge derſelben.

Beispiele: Es ist $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ alſo gehen in 420 die Zahlen auf $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $4 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 5 = 10$, $3 \cdot 5 = 15$, $4 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2 \cdot 7 = 14$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 7 = 28$, $5 \cdot 7 = 35$, $6 \cdot 7 = 42$, $12 \cdot 7 = 84$, $20 \cdot 7 = 140$, $30 \cdot 7 = 210$.

226. **Satz. Das gröste Gemeinmas. Das gröste Gemeinmas von n Zahlen erhält man, wenn man jede dieſer Zahlen in ihre Primfache (Primfaktoren) zerlegt und das Zeug oder Produkt derjenigen Primfache bildet, welche allen n Zahlen gemeinſam ſind.**

Beweis: Es ſeien die gegebenen Zahlen a_1, $a_2 \cdots a_n$, und ſeien die allen n Zahlen gemeinſamen Primfache b_1, $b_2 \cdots b_m$, ſo will ich beweiſen, dass $b_1b_2 \cdots b_m$ das gröste Gemeinmas dieſer n Zahlen ist. Es können nach 225 in jede Zahl nur die Primfache derſelben

und deren Zeuge oder Produkte aufgehen; es können mithin in alle n Zahlen nur diejenigen Primfache und ihre Zeuge aufgehen, welche allen n Zahlen gemeinſam ſind, d. h. nach der Vorausſetzung nur $b_1, b_2 \cdots b_m$. Von dieſen Fachen und ihren Zeugen oder Produkten ist aber das Zeug aller dieſer Fache $b_1 b_2 \cdots b_m$ das gröste; denn alle andern Zeuge dieſer Fache, welche weniger Fache enthalten, gehen in dasſelbe auf und ſind mithin nach 211 mindestens nicht gröser.

Beispiele: Von $48 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$, $56 = 2\cdot2\cdot2\cdot7$ und $72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$ ist das gröste Gemeinmas $2\cdot2\cdot2 = 8$.

Von $60 = 2\cdot2\cdot3\cdot5$, $72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$ und $96 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$ ist das gröste Gemeinmas $2\cdot2\cdot3 = 12$.

Erklärung. Ein kurzer oder reducirter Bruch heist ein 227.
Bruch, dessen Zähler und Nenner einander fremde oder primär ſind.

Satz. Wenn in eine Zahl a, welche kleiner ist als bb, die 228.
Primzahlen, welche kleiner als b ſind, nicht aufgehen, ſo ist ſie ſelbst eine Primzahl.

Beweis (trennend): Angenommen, a ſei keine Primzahl, ſo müssten nach 223 mindestens zwei von 1 und a verschiedene Primzahlen in ſie aufgehen, dies ſeien c und d, alſo $a = cd$. Da aber nach der Vorausſetzung die Primzahlen, welche kleiner als b ſind, nicht in a aufgehen, ſo müssen c und d gröser als b ſein, dann aber müsste nach 203 auch das Zeug $a = cd$ gröser als bb ſein. Dies ist aber gegen die Vorausſetzung, alſo kann auch nicht a eine zuſammengeſetzte Zahl ſein, ſondern ist eine Primzahl.

Beispiele: In 113 gehen weder 2, noch 3, 5 und 7 auf, da nun $113 < 121 = 11\cdot11$ ist, ſo ist 113 eine Primzahl.

Wir wollen nach dieſem Satze die Aufgabe löſen, alle Primzahlen von 1 bis 10000 aufzufinden. Da $100 \cdot 100 = 10000$ ist, ſo haben wir nur die Vielfachen der kleineren Primzahlen aufzuſuchen. Alle geraden Zahlen ſind Vielfache von 2; die ungeraden, deren letzte Stelle 5 ist, ſind Vielfache von 5 und können alſo auser Betracht bleiben. Die Zahlen zwischen Null und 300, in welche 3 aufgeht, ſind dieſelben, wie die zwischen 300 und 600 und zwischen $a \cdot 300$ und $a \cdot 300 + 300$ und können alſo fortgelassen werden. Wir haben nun noch die Vielfachen der 7, der 11, 13, 17, 19, 23, 29 u. ſ. w. jedesmal mit den andern Primzahlen zu berechnen; die Zahlen die dann nicht Vielfache ſind, ſind Primzahlen. Es ergiebt ſich demnach die folgende Tafel.

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 1 bis 1000.

Z.	0	300	600	900	Z.	100	400	700	Z.	200	500	800
1	……	7……43	……	17……53	1	……	……	……	3	7……29	……	11……73
7	……	……	……	……	3	……	13……31	19……37	9	11……19	……	……
11	……	……	13……47	……	7	……	11……37	7……101	11	……	7……73	……
13	……	……	……	11……83	9	……	……	……	17	7……31	11……47	19……43
17	……	……	……	7……131	13	……	7……59	23……31	21	13……17	……	……
19	……	11……29	……	……	19	7……17	……	……	23	……	……	……
23	……	17……19	7……89	13……71	21	11……11	……	7……103	27	……	17……31	……
29	……	7……47	17……37	……	27	……	7……61	……	29	……	23……23	……
31	……	……	……	7…7…19	31	……	……	17……43	33	……	13……41	7…7…17
37	……	……	7…7…13	……	33	7……19	……	……	39	……	7…7…11	……
41	……	11……31	……	……	37	……	19……23	11……67	41	……	……	29……29
43	……	7…7…7	……	23……41	39	……	……	……	47	13……19	……	7…11…11
47	……	……	……	……	43	11……13	……	……	51	……	19……29	23……37
49	7……7	……	11……59	13……73	49	……	……	7……107	53	11……23	7……79	……
					51	……	11……41	……				
53	……	……	……	……	57	……	……	……	57	……	……	……
59	……	……	……	7……137	61	7……23	……	……	59	7……37	13……43	……
61	……	19……19	……	31……31	63	……	……	7……109	63	……	……	……
67	……	……	23……29	……	67	……	……	13……59	69	……	……	11……79
					69	13……13	7……67	……				
71	……	7……53	11……61	……	73	……	11……43	……	71	……	……	13……67
73	……	……	……	7……139	79	……	……	19……41	77	……	……	……
77	7……11	13……29	……	……	81	……	13……37	11……71	81	……	7……83	……
79	……	……	7……97	11……89	87	11……17	……	……	83	……	11……53	……
83	……	……	……	……	91	……	……	7……113	87	7……41	……	……
89	……	……	13……53	23……43	93	……	17……29	13……61	89	17……17	19……31	7……127
91	7……13	17……23	……	……	97	……	7……71	……	93	……	……	19……47
97	……	……	17……41	……	99	……	……	17……47	99	13……23	……	29……31

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 1000 bis 2000.

Z.	1000	1300	1600	1900	Z.	1100	1400	1700	Z.	1200	1500	1800
1	7..11..13	...	...	...	3	...	23....61	13...131	1	...	19....79	...
3	17....59	...	7....229	11...173	9	...	...	...	7	17....71	11...137	13...139
7	19....53	...	...	...	11	11...101	17....83	29....59	11	7....173	...	...
9	...	7..11..17	...	23....83	17	...	13...109	17...101	13	...	17....89	7...7..37
13	...	13...101	...	...	21	19....59	7...7..29	...	17	...	37....41	23....79
19	...	...	...	19...101	23	...	...	...	19	23....53	7...7..31	17...107
21	...	...	...	17...113	27	7...7..23	...	11...157	23	...	...	...
27	13....79	...	...	41....47	29	...	...	7..13..19	29	...	11...139	31....59
31	...	11..11.11	7....233	...	33	11...103	...	...	31	...	...	...
33	...	31....43	23....71	...	39	17....67	...	37....47	37	...	29....53	11...167
37	17....61	7....191	...	13...149	41	7....163	11...131	...	41	17....73	23....67	7....263
39	...	13...103	11...149	7....277	47	31....37	...	...	43	11...113	...	19....97
43	7....149	17....79	31....53	29....67	51	...	...	17...103	47	29....43	7..13..17	...
49	...	19....71	17....97	...	53	...	...	...	49	...	...	43....43
51	...	7....193	13...127	...								
57	7....151	23....59	...	19...103	57	13....89	31....47	7....251	53	7....179	...	17...109
61	...	...	11...151	37....53	59	19....61	...	...	59	...	...	11..13.13
63	...	29....47	...	13...151	63	...	7..11..19	41....43	61	13....97	7....223	...
67	11....97	...	...	7....281	69	7....167	13...113	29....61	67	7....181	...	...
69	...	37....37	...	11...179								
73	29....37	...	7....239	...	71	...	...	7..11..23	71	31....41	...	...
79	13....83	7....197	23....73	...	77	11...107	7....211	...	73	19....67	11..11.13	...
81	23....47	...	41....41	7....283	81	...	...	13...137	77	...	19....83	...
87	...	19....73	7....241	...	83	7..13..13	...	...	79	...	...	...
91	...	13...107	19....89	11...181	87	...	...	...	83	...	...	7....269
97	...	7....199	...	...	89	29....41	...	...	89	...	7....227	...
99	...	11...127	...	...	93	...	...	11...163	91	...	37....43	31....61
39	7....157	...	...	...	99	11...109	...	7....257	97	...	...	7....271

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 2000 bis 3000.

Z.	2000	2300	2600	2900
3	....	7..7..47	19...137	....
9	7...7..41	....	....	....
11	....	....	7....373	41....71
17	....	7....331	....	....
21	43....47	11...211	....	23...127
23	7..17..17	23....101	43.....61	37.....79
27	....	13...179	37....71	....
29	....	17...137	11...239	29...101
33	19...107	....	....	7....419
39	....	....	7..13. 29	....
41	13...157	....	19...139	17...173
47	23....89	....	....	7.... 421
51	7....293	....	11...241	13...227
53	....	13...181	7....379	....
57	11..11.17	....	....	....
59	29.....71	7....337	....	11...269
63	....	17...139	....	....
69	....	23...103	17...157	....
71	19...109	....	....	....
77	31.....67	....	....	13...229
81	....	....	7....383	11...271
83	....	....	....	19...157
87	....	7..11..31	....	.9...103
89	....	....	....	7..7...61
93	7..13..23	....	....	41....73
99	....	....	....	....

Z.	2100	2400	2700
1	11...191	7..7..7.7	37.....73
7	7..7..43	29....83	....
11	....	....	....
13	....	19...127	....
17	29....73	....	11..13.19
19	13...163	41.....59	....
23	11...193	....	7....389
29	....	7....347	....
31	....	11..13.17	....
37	....	....	7..17..23
41	....	....	....
43	....	7....349	13...211
47	19...113	....	41....67
49	7....307	31....79	....
53	....	11...223	....
59	17...127	....	31....89
61	....	23...107	11...251
67	11...197	....	....
71	13...167	7....353	17...163
73	41....53	....	47....59
77	7....311	....	....
79	....	37.....67	7....397
83	37....59	13...191	11..11.23
89	11...199	19...131	....
91	7....313	47....53	....
97	13..13.13	11...227	....

Z.	2200	2500	2800
1	31.....71	41.....61	....
3	....	....	....
7	....	23...109	7....401
9	47....47	13...193	53....53
13	....	7....359	29....97
19	7....317	11...229	....
21	....	....	7..13..31
27	17...131	7..19..19	11...257
31	23....97	....	19...149
33	7..11..29	17...149	....
37	....	43....59	....
39	....	....	17...167
43	....	....	....
49	13...173	....	7...11.37
51	....	....	....
57	37....61	....	....
61	7..17..19	13...197	....
63	31....73	11...233	7.....409
67	....	17...151	47.....61
69	....	7....367	19...151
73	....	31.....83	13..13.17
79	43....53	....	....
81	....	29....89	43.....67
87	....	13...199	....
91	29....79	....	7...7..59
93	....	....	11...263
97	....	7...7..53	....
99	11..11.19	23...113	13...223

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 3000 bis 4000.

Z.	3000	3300	3600	3900
1			13...277	47....83
7	31....97			
11		7..11..43	23...157	
13	23...131			7..13..43
17	7....431	31...107		
19			7..11..47	
23				
29	13...233		19...191	
31	7....433			
37		47....71		31...127
41		13...257	11...331	7....563
43	17...179			
47	11...277		7....521	
49		17...197	41....89	11...359
53	43....71	7....479	13...281	59....67
59	7..19..23			37...107
61			7....523	17...233
67		7..13..37	19...193	
71	37....83			11..19.19
73	7....439			29...137
77	17...181	11...307		41....97
79		31...109	13...283	23...173
83		17...199	29...127	7....569
89			7..17..31	
91	11...281			13...307
97	19...163	43....79		7....571

Z.	3100	3400	3700
1	7....443	19...179	
3	29...107	41....83	7..23..23
7	13...239		11...337
9		7....487	
13	11...283		47....79
19		13...263	
21		11...311	61....61
27	53....59	23...149	
31	31...101	47....73	7..13..41
33	13...241		
37		7....491	37...101
39	43....73	19...181	
43	7....449	11...313	19...197
49	47....67		23...163
51	23...137	7..17..29	11..11.31
57	7..11..41		13..17.17
61	29...109		
63			53....71
67			
69			
73	19...167	23...151	7..7.7.11
79	11..17.17	7..7..71	
81		59....59	19...199
87		11...317	7....541
91			17...223
93	31...103	7....499	
97	23...139	13...269	
99	7....457		29...131

Z.	3200	3500	3800
3		31...113	
9		11..11.29	13...293
11	13..13.19		37...103
17			11...347
21		7....503	
23	11...293	13...271	
27	7....461		43....89
29			7....547
33	53....61		
39	41....79		11...349
41	7....463		23...167
47	17...191		
51		53....67	
53		11..17.19	
57			7..19..29
59			17...227
63	13...251	7....509	
69	7....467	43....83	53....73
71			7...7..79
77	29...113	7...7..73	
81	17...193		
83	7...7..67		11...353
87	19...173	17...211	13..13.23
89	11..13.23	37....97	
93	37....89		17...229
99		59....61	7....557

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 4000 bis 5000.

Z.	4000	4300	4600	4900	Z.	4100	4400	4700	Z.	4200	4500	4800
1	....	11..17.23	43....107	13..13.29	3	11...373	7..17..37	....	1	....	7....643	....
3	....	13...331	....	....	9	7....587	....	17...277	7	7....601	....	11..19.23
7	....	59....73	17...271	7....701	11	....	11...401	7....673	11	....	13...347	17...283
9	19...211	31...139	11...419	....	17	23...179	7....631	53....89	13	11...383	....	....
13	....	19...227	7....659	17..17.17	21	13...317	....	....	17	....	....	....
19	....	7....617	31...149	....	23	7..19..31	....	....	19	....	....	61....79
21	....	29...149	....	7..19..37	27	....	19...233	29...163	23	41...103	....	7..13..53
27	....	....	7...661	13...379	29	....	43...103	....	29	....	7....647	11...439
31	29...139	61....71	11...421	....	33	....	11..13.31	....	31	....	23...197	....
33	37...109	7....619	41...113	....	39	....	23...193	7....677	37	19...223	13...349	7....691
37	11...367	....	....	....	41	41...101	....	11...431	41	....	19...239	47...103
39	7....577	....	....	11...449	47	11..13.29	....	47...101	43	....	7..11..59	29...167
43	13...311	43...101	....	....	51	7....593	....	....	47	31...137	....	37...131
49	....	....	....	7...7.101	53	....	61....73	7...7..97	49	7....607	....	13...373
51	....	19...229	....	....								
57	....	....	....	....	57	....	....	67....71	53	....	29...157	23...211
61	31...131	7...7..89	59....79	11..11.41	59	....	7..7.7.13	....	59	....	47....97	43...113
63	17...239	....	....	7....709	63	23...181	....	11...433	61	....	....	....
67	7...7..83	11...397	13...359	....	69	11...379	41...109	19...251	67	17...251	....	31...157
69	13...313	17...257	7..23..29	....								
73	....	....	....	....	71	43....97	17...263	13...367	71	....	7....653	....
79	....	29...151	....	13...383	77	....	11..11.37	17...281	73	....	17...269	11...443
81	7..11..53	13...337	31...151	17...293	81	37...113	....	7....683	77	7..13..47	23...199	....
87	61....67	41...107	43...109	....	83	47....89	....	....	79	11...389	19...241	7..17..41
91	....	....	....	7..23..31	87	53....79	7....641	....	83	....	....	19...257
93	....	23...191	13..19.19	....	89	59....71	67....67	....	89	....	13...353	....
97	17...241	....	7..11..61	19...263	93	7....599	....	....	91	7....613	....	67....73
99	....	53....83	37...127	....	99	13..17.19	11...409	....	97	....	....	59....83

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 5000 bis 6000.

Z.	5000	5300	5600	5900
3	....	....	13...431	....
9	....	....	71....79	19...311
11	....	47...113	31...181	23...257
17	29...173	13...409	41...137	61....97
21	....	17...313	7..11..73	31...191
23	....	....	....	....
27	11...457	7....761	17...331	....
29	47...107	73....73	13...433	7.7.11.11
33	7....719	....	43...131	17...349
39	....	19...281	....	....
41	71....71	7..7..109	....	13...457
47	7..7..103	....	....	19...313
51	....	....	....	11...541
53	31...163	53...101	....	....
57	13...389	11...487	....	7..23..37
59	....	23...233	....	59...101
63	61....83	31...173	7....809	67....89
69	37...137	7..13..59	....	47...127
71	11...461	41...131	53...107	7....853
77	....	19...283	7....811	43...139
81	....	....	13..19.23	....
83	13..17.23	7....769	....	31...193
87	....	....	11..11.47	....
89	7....727	17...317	....	53...113
93	11...463	....	....	13...461
99	....	....	41...139	7....857

Z.	5100	5400	5700
1	....	11...491	....
7	....	....	13...439
11	19...269	7....773	....
13	....	....	29...197
17	7..17..43	....	....
19	....	....	7..19..43
23	47...109	11..17.29	59....97
29	23...223	61....89	17...337
31	7....733	....	11...521
37	11...467	....	....
41	53....97	....	....
43	37...139	....	....
47	....	13...419	7....821
49	19...271	....	....
53	....	7..19..41	11...523
59	7..11..67	53...103	13...443
61	13...397	43...127	7....823
67	....	7..11..71	73....79
71	....	....	29...199
73	7....739	13...421	23...251
77	31...167	....	53...109
79	....	....	....
83	71....73	....	....
89	....	11...499	7....827
91	29...179	17..17.19	....
97	....	23...239	11..17.31

Z.	5200	5500	5800
1	7....743	....	....
3	11..11.43	....	7....829
7	41...127	....	....
9	....	7....787	37...157
13	13...401	37...149	....
19	17...307	....	11..23.23
21	23...227	....	....
27	....	....	....
31	....	....	7..7.7.17
33	....	11...503	19...307
37	....	7..7..113	13...449
39	13..13.31	29...191	....
43	7..7..107	23...241	....
49	29...181	31...179	....
51	59....89	7..13..61	....
57	7....751	....	....
61	....	67....83	....
63	19...277	....	11..13.41
67	23...229	19...293	....
69	11...479	....	....
73	....	....	7....839
79	....	7....797	....
81	....	....	....
87	17...311	37...151	7..29..29
91	11..13.37	....	43...137
93	67....79	7..17..47	71....83
97	....	29...193	....
99	7....757	11...509	17...347

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 6000 bis 7000.

Z.	6000	6300	6600	6900	Z.	6100	6400	6700	Z.	6200	6500	6800
1	17...353	....	7..23..41	67...103	1	....	37...173	....	3	....	7....929	....
7	....	7..17..53	....	....	3	17...359	19...337	....	9	7....887	23...283	11...619
11	....	....	11...601	....	7	31...197	43...149	19...353	11	....	17...383	7..7..139
13	7....859	59...107	17...389	31...223	9	41...149	13..17.29	....	17	....	7..7.7.19	17...401
17	11...547	....	13...509	....	13	....	11..11.53	7..7..137	21	....	....	19...359
19	13...463	71....89	....	11..17.37	19	29...211	7..7..131	....	23	7..7..127	11...593	....
23	19...317	....	37...179	7..23..43	21	....	....	11..13.47	27	13...479	61...107	....
29	....	....	7....947	13..13.41	27	11...557	....	7..31..31	29	....	....	....
31	37...163	13...487	19...349	29...239	31	....	59...109	53...127	33	23...271	47...139	....
37	....	....	....	7....991	33	....	7....919	....	39	17...367	13...503	7....977
41	7....863	17...373	29...229	11...631	37	17..19.19	41...157	....	41	79....79	31...211	....
43	....	....	7..13..73	53...131	39	7....877	47...137	23...293	47	....	....	41...167
47	....	11...577	17..17.23	....	43	....	17...379	11...613	51	7..19..47	....	13..17.31
49	23...263	7....907	61...109	....	49	11..13.43	....	17...397	53	13..13.37	....	7..11..89
					51	....	....	43...157				
53	....	....	....	17...409	57	47...131	11...587	29...233	57	....	79....83	....
59	73....83	....	....	....	61	61...101	7..13..71	....	59	11...569	7....937	19..19.19
61	11..19.29	....	....	....	63	....	23...281	....	63	....	....	....
67	....	....	59...113	....	67	7....881	29...223	67...101	69	....	....	....
					69	31...199	....	7....967				
71	13...467	23...277	7....953	....	73	....	....	13...521	71	....	....	....
73	....	....	....	19...367	79	37...167	11..19.31	....	77	....	....	13..23.23
77	59...103	7....911	11...607	....	81	7....883	....	....	81	11...571	....	7....983
79	....	....	....	7....997	87	23...269	13...499	11...617	83	61...103	29...227	....
83	7..11..79	13...491	41...163	....	91	41...151	....	....	87	....	7....941	71....97
89	....	....	....	29...241	93	11...563	43...151	....	89	19...331	11...599	83....83
91	....	7..11..83	....	....	97	....	73....89	7....971	93	7..29..31	19...347	61...113
97	7..13..67	....	37...181	....	99	....	67....97	13...523	99	....	....	....

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 7000 bis 8000.

Z.	7000	7300	7600	7900	Z.	7100	7400	7700	Z.	7200	7500	7800
1	....	7..7..149	11....691	....	3	....	11....673	....	1	19....379	13....577	29....269
3	47....149	67....109	....	7....1129	9	....	31....239	13....593	7	....	....	37....211
7	7.7.11.13	....	....	....	11	13....547	....	11....701	11	....	7..29..37	73....107
9	43....163	....	7....1087	11....719	17	11....647	....	....	13	....	11....683	13....601
13	....	71....103	23....331	41....193	21	....	41....181	7....1103	17	7....1031	....	....
19	....	13....563	19....401	....	23	17....419	13....571	....	19	....	73....103	7....1117
21	7..17..59	....	....	89....89	27	....	7....1061	....	23	31....233	....	....
27	....	17....431	29....263	....	29	....	17..19.23	59....131	29	....	....	....
31	79....89	....	13....587	7..11.103	33	7....1019	....	11..19.37	31	7....1033	17....443	41....191
33	13....541	....	17....449	....	39	11..11.59	43....173	71....109	37	....	....	17....461
37	31....227	11..23.29	7....1091	....	41	37....193	7....1063	....	41	13....557	....	....
39	....	41....179	....	17....467	47	7....1021	11....677	61....127	43	....	19....397	11..23.31
43	....	7....1049	....	13..13.47	51	....	....	23....337	47	....	....	7..19..59
49	7..19..53	....	....	....	53	23....311	29....257	....	49	11....659	....	47....167
51	11....641	....	7....1093	....								
57	....	7....1051	13..19.31	73....109	57	17....421	....	....	53	....	7..13..83	....
61	23....307	17....433	47....163	19....419	59	....	....	....	59	7..17..61	....	29....271
63	7....1009	37....199	79....97	....	63	13..19.29	17....439	7....1109	61	53....137	....	7....1123
67	37....191	53....139	11..17.41	31....257	69	67....107	7..11..97	17....457	67	13..13.43	7..23..47	....
69	....	....	....	13....613								
73	11....643	73....101	....	7..17..67	71	71....101	31....241	19....409	71	11....661	67....113	17....463
79	....	47....157	7....1097	79....101	77	....	....	7..11.101	73	7....1039	....	....
81	73....97	11..11.61	....	23....347	81	43....167	....	31....251	77	19....383	....	....
87	19....373	83....89	....	7..7..163	83	11..653	7....1069	43....181	79	29....251	11..13.53	....
91	7..1013	19....389	....	61....131	87	....	....	13....599	83	....	....	....
93	41....173	....	7..7..157	....	89	7..13..79	....	....	89	37....197	....	7..7.7.23
97	47....151	13....569	43....179	11....727	93	....	59....127	....	91	23....317	....	13....607
99	31....229	7..7..151	....	19....421	99	23....313	....	11....709	97	....	71....107	53....149

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 8000 bis 9000.

Z.	8000	8300	8600	8900
3	53...151	19..19.23	7...1229	29...307
9	....	7...1187	....	59...151
11	....	....	79...109	7..19..67
17	....	....	7...1231	37...241
21	13...617	53...157	37...233	11...811
23	71...113	7..29..41	....	....
27	23...349	11...757	....	79...113
29	7..31..37	....	....	....
33	29...277	13...641	89...97	....
39	....	31...269	53...163	7...1277
41	11..17.43	19...439	....	....
47	13...619	17...491	....	23...389
51	83...97	7...1193	41...211	....
53	....	....	17...509	7...1279
57	7...1151	61...137	11...787	13..13.53
59	....	13...643	7...1237	17..17.31
63	11...733	....	....	....
69	....	....	....	....
71	7...1153	11...761	13..23.29	....
77	41...197	....	....	47...191
81	....	17..17.29	....	7...1283
83	59...137	83...101	19...457	13...691
87	....	....	7..17..73	11..19.43
89	....	....	....	89...101
93	....	7..11.109	....	17..23.23
99	7..13..89	87...227	....	....

Z.	8100	8400	8700
1	....	31...271	7..11.113
7	11..11.67	7...1201	....
11	....	13...647	31...281
13	7..19..61	47...179	....
17	....	19...443	23...379
19	23...353	....	....
23	....	....	11..13.61
29	11...739	....	7..29..43
31	47...173	....	....
37	79...103	11..13.59	....
41	7...1163	23...367	....
43	17...479	....	7...1249
47	....	....	....
49	29...281	7..17..71	13...673
53	31...263	79...107	....
59	41...199	11...769	19...461
61	....	....	....
67	....	....	11...797
71	....	43...197	7..7..179
73	11...743	37...229	31...283
77	13..17.37	7..7..173	67...131
79	....	61...139	....
83	7..7..167	17...499	....
89	19...431	13...653	11..17.47
91	....	7...1213	59...149
97	7...1171	29...293	19...463

Z.	8200	8500	8800
1	59...139	....	13...677
3	13...631	11...773	....
7	29...283	47...181	....
9	....	67...127	23...383
13	43...191	....	7...1259
19	....	7...1217	....
21	....	....	....
27	19...433	....	7..13..97
31	....	19...449	....
33	....	7..23..53	11..11.73
37	....	....	....
39	7..11.107	....	....
43	....	....	37...239
49	73...113	83...103	....
51	37...223	17...503	53...167
57	23...359	43...199	17...521
61	11...751	7...1223	....
63	....	....	....
67	7...1181	13...659	....
69	....	11..19.41	7..7..181
73	....	....	19...467
79	17...487	23...373	13...683
81	7.7.13.13	....	83...107
87	....	31...277	....
91	....	11..11.71	17...523
93	....	13...661	....
97	....	....	7..31..41
99	43...193	....	11...809

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 9000 bis 10000.

Z.	9000	9300	9600	9900
1	....	71...131	....	....
7	....	41...227	13...739	....
11	....	....	7...1373	11..17.53
13	....	67...139	....	23...431
17	71...127	7.11.11.11	59...163	47...211
19	29...311	....	....	7..13.109
23	7...1289	....	....	....
29	....	19...491	....	....
31	11...821	7..31..43	....	....
37	7...1291	....	23...419	19...523
41	....	....	31...311	....
43	....	....	....	61...163
47	83...109	13...719	11...877	7..7.7.29
49	....	....	....	....
53	11...823	47...199	7..7..197	37...269
59	....	7..7..191	13...743	23...433
61	13..17.41	11..23.37	....	7...1423
67	....	17..19.29	7...1381	....
71	47...193	....	19...509	13..13.59
73	43...211	7..13.103	17...569	....
77	29...313	....	....	11...907
79	7...1297	83...113	....	17...587
83	31...293	11...853	23...421	67...149
89	61...149	41...229	....	7...1427
91	....	....	11...881	97...103
97	11...827	....	....	13...769

Z.	9100	9400	9700
1	19...479	7..17..79	89...109
3	....	....	31...313
7	7...1301	23...409	17...571
9	....	97...97	7..19..73
13	13...701	....	11...883
19	11...829	....	....
21	7...1303	....	....
27	....	11...857	71...137
31	23...397	....	37...263
33	....	....	....
37	....	....	7..13.107
39	13..19.37	....	....
43	41...223	7..19..71	....
49	7...1307	11...859	....
51	....	13...727	7..7..199
57	....	7..7..193	11...887
61	....	....	43...227
63	7.7.11.17	....	13...751
67	89...103	....	....
69	53...173	17...557	....
73	....	....	29...337
79	67...137	....	7..11.127
81	....	19...499	....
87	....	53...179	....
91	7..31.101	....	....
93	29...317	11...863	7...1399
97	17...541	....	97...101
99	....	7..23..59	41...239

Z.	9200	9500	9800
3	....	13..17.43	....
9	....	37...257	17...577
11	61...151	....	....
17	13...709	31...307	....
21	....	....	7..23..61
23	23...401	89...107	11..19.47
27	....	7...1361	31...317
29	11...839	13...733	....
33	7...1319	....	....
39	....	....	....
41	....	7..29..47	13...757
47	7...1321	....	43...229
51	11..29.29	....	....
53	19...487	41...233	59...167
57	....	19...503	....
59	47...197	11..11.79	....
63	59...157	73...131	7...1409
69	13..23.31	7...1367	71...139
71	73...127	17...563	....
77	....	61...157	7..17..83
81	....	11..13.67	41...241
83	....	7..37..37	....
87	37...251	....	....
89	7...1327	43...223	11..29.31
93	....	53...181	13...761
99	17...547	29...331	19...521

229. **Satz. Zwei geht in eine Zahl a auf, wenn ſie in die letzte Stelle derſelben aufgeht.**

Vier geht in eine Zahl a auf, wenn ſie in die beiden letzten Stellen derſelben aufgeht.

Acht geht in eine Zahl a auf, wenn ſie in die drei letzten Stellen derſelben aufgeht.

Beweis: 1. Man zerlege die Zahl a in zwei Stücke $b \cdot 10 + d$ wo d die Einer der Zahl a darstelle und b und d ganze Zahlen. Wenn nun zwei in d aufgeht, d. h. wenn $d = c \cdot 2$, wo c eine ganze Zahl, ſo ist

$$a = b \cdot 10 + c \cdot 2 = b \cdot 5 \cdot 2 + c \cdot 2 = (b \cdot 5 + c)\,2.$$

Hier ſind b, 5 und c ganze Zahlen, alſo geht 2 in a auf.

2. Für den zweiten Teil des Satzes zerlege man die Zahl a in zwei Stücke $b \cdot 100 + d$, wo d die Zehner und Einer der Zahl a umfasst und b und d ganze Zahlen ſind. Wenn nun vier in d aufgeht, d. h. wenn $d = c \cdot 4$, wo c eine ganze Zahl, ſo ist

$$a = b \cdot 100 + c \cdot 4 = b \cdot 25 \cdot 4 + c \cdot 4 = (b \cdot 25 + c)\,4.$$

Hier ſind b, 25 und c ganze Zahlen, alſo geht 4 in a auf.

3. Ganz entsprechend folgt der Satz für 8.

Beispiele: 2 geht auf in 3728 , 5714,
4 „ „ 2536 , 8912,
8 „ „ 5728 , 9312.

230. **Erklärung. Gerade Zahlen heisen die Vielfachen von zwei. Ungerade Zahlen heisen die Zahlen, in welche zwei nicht aufgeht.**

231. **Satz. Fünf geht in eine Zahl auf, wenn die letzte Ziffer fünf oder null ist.**

Beispiele: 5 geht auf in 3710 , 8915 , 9335.

232. **Erklärung. Die Querſumme einer Zahl ist die Summe der Ziffern, wenn man die Ziffern ohne Rückſicht auf die Stelle als Einer zufügt.**

Beispiele: Die Querſumme von 5754 ist $5 + 7 + 5 + 4 = 21$, die Querſumme von 8259 ist $8 + 2 + 5 + 9 = 24$.

233. **Satz. Drei und neun gehen in eine Zahl a auf, wenn ſie in ihre Querſumme aufgehen.**

Beweis: Man zerlege die Zahl a in ſo viel Stücke als ſie Stellen hat und ſei

$$a = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 100 + b_3 \cdot 1000 + b_4 \cdot 10000 + \cdots$$

Nun kann man $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, $10000 = 9999 + 1$ u. ſ. w. jede in 2 Stücke zerlegen, dann erhält man

$$a = b_0 + b_1(9+1) + b_2(99+1) + b_3(999+1) + b_4(9999+1) + \cdots$$
$$= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_1 \cdot 9 + b_2 \cdot 99 + b_3 \cdot 999 + b_4 \cdot 9999 + \cdot$$
$$= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + 9(b_1 + b_2 \cdot 11 + b_3 \cdot 111 + b_4 \cdot 1111 + \cdots)$$

Hier ist $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$ die Querſumme von a. Gehen alſo 3 oder 9 in dieſe Querſumme auf, ſo gehen ſie, da ſie auch in 9 aufgehen, nach 215 auch in a auf.

Beispiele: 3 geht auf in 2715; 88103; 52725.
9 geht auf in 37521; 82575; 71856.

Erklärung. Der Neunerrest heist der Rest, welcher übrig bleibt, wenn man die Querſumme einer Zahl durch neun teilt. Gleich heisen zwei Neunerreste, wenn die Reste nur um ein Vielfaches von neun verschieden ſind. 234.

Beispiel: Bei 86572 ist der Neunerrest gleich 1; denn 8+6+5+7+2=28 giebt durch 9 geteilt den Rest 1. Als Neunerrest ist 21=12=3.

Satz. Probe beim Zufügen: der Neunerrest der Summe ist gleich der Summe der Neunerreste aus den Stücken. 235.

Beweis: Seien a_1, a_2 und $a_3 \cdots$ die zu fügenden Zahlen. Man kann nun nach 234 jede dieſer Zahlen gleich einem Vielfachen von neun plus einem Neunerreste ſetzen. Sei alſo

$$a_1 = 9 \cdot b_1 + c_1 \qquad a_2 = 9b_2 + c_2 \qquad a_3 = 9b_3 + c_3 \cdots$$

wo c_1, c_2 und $c_3 \cdots$ die Neunerreste der Zahlen $a_1, a_2\ a_3 \cdots$ ſind, ſo ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = (9b_1 + c_1) + (9b_2 + c_2) + (9b_3 + c_3) + \cdots$$
$$= 9(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

Beispiel: 879563 = 527836 + 351727,
Neunerrest 2 = 4 + 7 = 9 + 2.

Satz. Probe beim Abziehen. Der Neunerrest des Vorrats ist gleich der Summe aus den Neunerresten des Abzugs und des Restes. 236.

Beweis: Unmittelbar nach 235.

Beispiel: 7957 — 4268 = 3689,
Neunerrest 1 = 2 + 8 = 9 + 1.

Satz. Probe beim Vervielfachen. Der Neunerrest des Zeuges oder Produktes ist gleich dem Zeuge der Neunerreste aus den Fachen oder Faktoren. 237.

Beweis: 1. Für 2 Fache oder Faktoren. Seien a_1 und a_2 die Fache, ſo kann man nach 234 jede dieſer Zahlen $a_1 = 9b_1 + c_1$ und $a_2 = 9b_2 + c_2$ ſetzen, wo c_1 und c_2 die Neunerreste der Zahlen a_1 und a_2 ſind; dann ist

$$a_1 \cdot a_2 = (9b_1 + c_1)(9b_2 + c_2) = 9b_1(9b_2 + c_2) + c_1 \cdot 9b_2 + c_1 \cdot c_2$$

alſo ist $c_1 c_2$ der Neunerrest von $a_1 a_2$.

2. Wenn der Satz für n Fache gilt, ſo gilt er auch für $n + 1$ Fache.

Denn es ſeien $a_\alpha = 9b_\alpha + c_\alpha$ wo c_α der Neunerrest von a_α ist, und es ſei $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 9A + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_n$ (Annahme), ſo ist

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n a_{n+1} = (9A + c_1 c_2 c_3 \cdots c_n)(9b_{n+1} + c_{n+1})$$
$$= 9A(9b_{n+1} + c_{n+1}) + (c_1 c_2 c_3 \cdots c_n)\, 9b_{n+1} + c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdot c_{n+1}$$

alſo auch $c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdot c_{n+1}$ der Neunerrest von $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot a_{n+1}$

5. Nun gilt der Satz für 2 Fache oder Faktoren, alſo gilt er nach 23 allgemein.

Beispiel: $8367 \times 7526 = 62970042$,
Neunerrest $6 \times 2 = 9 + 3 = 3$.

238. **Satz. Probe beim Teilen ohne Rest. Der Neunerrest der zu teilenden Gröse ist gleich dem Zeuge oder Produkte aus den Neunerresten des Teilers und des Quoten (Quotienten).**

Beweis: Unmittelbar nach 237.

Beispiel: $6291984 : 752 = 8367$,
Neunerrest $3 = 5 \times 6 = 27 + 3$.

239. **Satz. Probe beim Teilen mit Rest. Der Neunerrest der zu teilenden Gröse weniger dem Neunerreste aus dem bei der Teilung verbleibenden Reste ist gleich dem Zeuge aus den Neunerresten des Teilers und des Quoten, ſoweit dieſer eine ganze Zahl ist.**

Beweis: Sei die Aufgabe $a : b$ und gehe b c mal in a auf und verbleibe d bei der Teilung als Rest, ſo ist $a = bc + d$ oder es ist $a - d = bc$. Alſo folgt der Satz unmittelbar aus 238.

Beispiel: $14323 : 416$. Es ist $14323 = 416 \cdot 34 + 179$ oder
$14323 - 179 = 416 \cdot 34$
Neunerprobe $13 - 8 = 5 = 2 \cdot 7 = 9 + 5$.

240. **Satz. Elf geht in eine Zahl a auf, wenn die Querſumme der ungeraden Stellen abgezogen von der Querſumme der geraden Stellen (bez. umgekehrt die der geraden abgezogen von der der ungeraden Stellen) ein Vielfaches von elf ist.**

Beweis: Es ſei

$$a = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 100 + b_3 \cdot 1000 + b_4 \cdot 10000 + b_5 \cdot 100000 + \cdot$$
$$= b_1 \cdot 11 + b_0 - b_1 + b_3 \cdot 1100 + (b_2 - b_3)\, 100$$
$$+ b_5 \cdot 110000 + (b_4 - b_5)\, 10000 + \cdot \cdot$$
$$= 11 \cdot (b_1 + 100 \cdot b_3 + 10000 \cdot b_5 + \cdot \cdot) + [b_0 - b_1 + (b_2 - b_3) \cdot 100$$
$$+ (b_4 - b_5)\, 10000 + \cdot \cdot]$$

Es geht alſo 11 in die Zahl auf, wenn es in die letzte Summe aufgeht. Nun ist aber

$$b_0 - b_1 + (b_2 - b_3)\,100 + (b_4 - b_5)\,10000 + \cdots = b_0 - b_1 + b_2 - b_3$$
$$+ b_4 - b_5 + \cdots + (b_2 - b_3)\,99 + (b_4 - b_5)\,9999 + \cdots$$
$$= b_0 + b_2 + b_4 + \cdots - (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots)$$
$$+ 11\,[(b_2 - b_3)\,9 + (b_4 - b_5)\,909 + \cdots]$$

Hier geht 11 in die Zahl auf, wenn es in

$$b_0 + b_2 + b_4 + \cdots - (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots)$$

aufgeht; alſo geht 11 dann auch in a auf.

Beispiele: 11 geht auf in 8547638, 9586857.

Satz. Sieben und zehndrei gehen in eine Zahl a auf, wenn die Summe aus der Zahl der Tauſende und aus der Zahl der Tauſendmillionen abgezogen von der Summe aus der Zahl der Ganzen unter Tauſend und aus der Zahl der Millionen unter Tauſendmillionen ein Vielfaches von 7 bezüglich von 13 ergiebt. 241.

Beweis: Es ſei

$$a = b_0 + 1000 \cdot b_1 \cdot 1000000 \cdot b_2 + 1000'000000 \cdot b_3 + \cdots$$
$$= 1001\,b_1 + b_0 - b_1 + 1000000\,(1001 \cdot b_3 + b_2 - b_3) + \cdots$$
$$= 1001\,(b_1 + 1000000\,b_3 + \cdots) + b_0 - b_1 + 1000000\,(b_2 - b_3) + \cdots$$

Hier ist $1001 = 7 \cdot 13 \cdot 11$ und

$1000000 = 1 + 999999 = 1 + 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17$ alſo ist

$$a = 7 \cdot 13 \cdot 11\,(b_1 + 1000000\,b_3 + \cdots) + 7 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17\,(b_2 - b_3)$$
$$+ (b_0 + b_2 + \cdots) - (b_1 + b_3 + \cdots)$$

d. h. 7 und 13 gehen in a auf, wenn ſie in $(b_0 + b_2 + \cdots) - (b_1 + b_3 + \cdots)$ aufgehen.

Beispiele: 7 geht auf in 586735826971; denn

$$\begin{array}{r} 735 \\ 971 \\ \hline 1706 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 586 \\ 826 \\ \hline -1412 \end{array} = 294 = 7 \cdot 42$$

13 geht auf in 823789574855; denn

$$\begin{array}{r} 789 \\ 855 \\ \hline 1644 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 823 \\ 574 \\ \hline -1397 \end{array} = 247 = 13 \cdot 19.$$

Erklärung. Der kleinste Gemeinnenner oder Dividuus für mehre gegebene Zahlen ist die kleinste Zahl, in welche dieſe Zahlen aufgehen. 242.

Beispiele: Für 48, 32 und 72 ist 288 der kleinste Gemeinnenner.

Satz. Der kleinste Gemeinnenner oder Dividuus zweier gegebener Zahlen ist das Zeug (Produkt) aus der ersten Zahl und denjenigen Primfachen der zweiten Zahl, welche der ersten Zahl fehlen, und geht dieſer Gemeinnenner in jede Zahl auf, in welche die gegebenen Zahlen aufgehen. 243.

Beweis: Es ſeien die gegebenen Zahlen a und b, und ſeien von a die Primfache $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$, die dem b eigentümlichen Primfache,

welche dem a fehlen, aber $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_m$, ſo will ich beweiſen, dass $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_m$ der kleinste Gemeinnenner von a und b ſei.

Da nach 225 in jede Zahl nur die Primfache derſelben und deren Zeuge aufgehen, ſo muss jede Zahl c, in welche a aufgehen ſoll, auch ſämmtliche Primfache $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$ von a als Fache enthalten, und jede Zahl, in welche b aufgehen ſoll, auser den mit a gemeinſameu Fachen auch mindestens ſämmtliche dem b eigentümliche Primzahlen $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_m$ als Fache enthalten, mithin jede Zahl, in welche a und b zugleich aufgehen ſollen, ſämmtliche Primfache $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_m$ als Fache enthalten.

2. In jede beliebige Zahl c, in welche a und b aufgehen, gehen alſo die Zahlen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_m$ als Primfache, mithin nach 225 auch deren Zeug oder Produkt auf. Da aber eine Zahl, welche in eine andre aufgeht, nach 211 nicht gröser ſein kann als letztere, ſo giebt es keine Zahl, in die a und b aufgehen, welche kleiner ist als das Zeug $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_m$, d. h. dies Zeug ist der kleinste Gemeinnenner jener Zahlen.

Beispiele: Von $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ und von $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ist der kleinste Gemeinnenner $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11 = 2310$. Von $8 \cdot 7$ und von $4 \cdot 3$ ist der kleinste Gemeinner $8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$.

244. **Satz. Den kleinsten Gemeinnenner mehrer Zahlen erhält man, wenn man den kleinsten Gemeinnenner b von 2 Zahlen mit denjenigen Primfachen der dritten Zahl vervielfacht, welche jenem Gemeinnenner b noch fehlen, und ſofort den kleinsten Gemeinnenner c von n — 1 Zahlen mit denjenigen Primfachen der nten Zahl vervielfacht, welche jenem Gemeinnenner c noch fehlen; der kleinste Gemeinnenner geht in jede Zahl auf, in welche die gegebenen Zahlen aufgehen.**

Beweis: 1. Der Gemeinnenner d erhält durch das angegebene Verfahren von jeder Zahl p nur diejenigen Primfache, welche dem Gemeinnenner bis dahin noch fehlen, ſollte aber einer dieſer Fache fehlen, ſo würde die betreffende Zahl in die Zahl d nach 225 nicht aufgehen, die Zahl d wäre alſo kein Gemeinnenner; der Gemeinnenner muss mithin alle dieſe Primfache enthalten.

2. In jede Zahl, in welche die ſämmtlichen gegebenen Zahlen aufgehen, müssen alſo auch ſämmtliche Primfache des erhaltenen Gemeinnenners, mithin auch das Zeug derſelben oder der Gemeinnenner ſelbst nach 225 aufgehen. Da aber eine Zahl, welche in eine andre aufgeht, nicht gröser ſein kann als letztere (nach 211), ſo ist auch

der erhaltene Gemeinnenner der kleinste Gemeinnenner der gegebenen Zahlen.

Beispiel: Von 8, 12, 15, 20, 24, 36, 48 und 72 ist der kleinste Gemeinnenner $2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$.

b. Die Zahlenreihe ersten Ranges.

Erklärung. Eine Zahlenreihe ersten Ranges (eine arith- 245.
metische Reihe ersten Ranges) heist eine Reihe von Zahlen, wenn in ihr jede Zahl von der nächstfolgenden Zahl abgezogen denfelben Unterschied giebt.

Es bezeichnet in der Zahlenreihe ersten Ranges $\mathfrak{a}$ das erste, $\mathfrak{t}$ das $\mathfrak{n}$te Glied, $\mathfrak{d}$ den Unterschied zweier folgender Glieder, $\mathfrak{S}$ die Summe der $\mathfrak{n}$ ersten Glieder.

Beispiel: Zahlenreihe ersten Ranges: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

Satz. Für die Zahlenreihe (arithmetische Reihe) ersten 246.
Ranges gelten folgende Formeln

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{n} - 1)\mathfrak{d} \qquad \mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{a} + \mathfrak{t})}{2} \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{n}\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n} - 1)}{2}\mathfrak{d}.$$

Die Summe einer Zahlenreihe ersten Ranges erhält man, indem man die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl fämmtlicher Glieder vervielfacht.

Beweis; 1. Die erste Formel folgt unmittelbar aus der Erklärung 245.

2. Um die Summe zu finden, schreibt man die Reihe zweimal in entgegengefetzter Folge auf und fügt die unter einander stehenden Glieder einander zu, dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{d}) + (\mathfrak{a} + 2\mathfrak{d}) + \cdots + (\mathfrak{t} - \mathfrak{d}) + \mathfrak{t} \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{t} + (\mathfrak{t} - \mathfrak{d}) + (\mathfrak{t} - 2\mathfrak{d}) + \cdots + (\mathfrak{a} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{a} \\ \hline 2\mathfrak{S} &= (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + \cdots + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{t}) = \mathfrak{n}(\mathfrak{a}+\mathfrak{t}), \end{aligned}$$

d. h. $$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{a} + \mathfrak{t})}{2},$$

und führt man den Wert von $\mathfrak{t}$ aus der ersten Formel ein, fo erhält man die dritte.

Satz. Die Summe fämmtlicher ganzen Zahlen von 1 bis 247.
$\mathfrak{n}$ ist $\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n} + 1)}{2}$.

Beweis: Unmittelbar aus 246, da $\mathfrak{t} = \mathfrak{n}$ die Anzahl der Glieder ist.

Satz. Die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2\mathfrak{n}-1)$ ist $\mathfrak{n}^2$. 248.

Beweis: $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{a} + \mathfrak{t})}{2} = \frac{\mathfrak{n}(1 + 2\mathfrak{n} - 1)}{2} = \mathfrak{n}^2$.

249. **Erklärung. Das Zahlenmittel (das arithmetische Mittel) von n Zahlen heist die Summe der n Zahlen geteilt durch n.**

Beispiel: Das Zahlenmittel von 1, 5, 7, 11, 14, 17, 20 ist $75:7 = 10^5/_7$.

D. Die Eigenschaften der Brüche.

a. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Zehntbrüche

250. **Satz. Einen gewöhnlichen Bruch verwandelt man in einen Zehntbruch (Dezimalbruch), indem man dem Zähler ein Komma giebt, Nullen anhängt und dann den Zähler durch den Nenner teilt.**

Beweis: Nachdem das Komma gesetzt ist, kann man nach 189 rechts beliebig Nullen anhängen und teilt dann nach 184.

Beispiele: $^3/_8 = 3,_{000} : 8 = 0,_{375}$

$^5/_9 = 5,_{000000} : 9 = 0,_{555556}$.

251. **Erklärung. Endlich heist der Zehntbruch (Dezimalbruch), wenn er nur eine endliche Zahl von Stellen hat; unendlich heist der Zehntbruch, wenn er unendlich viele Stellen hat.**

Gekürzt heist der Zehntbruch (Dezimalbruch), wenn in demſelben die folgenden Stellen wegen ihrer Kleinheit weggelassen werden. Die letzte Stelle des gekürzten Zehntbruches heist die Kürzungsstelle. Die Ziffer derſelben wird um 1 erhöht, wenn die nächstfolgende Stelle 5 oder eine grösere Ziffer enthält.

Beispiel: Ein endlicher Bruch ist $^3/_{40} = 0,_{075}$. Ein gekürzter Bruch ist $^5/_9 = 0,_{555556}$, die letzte Stelle ist um 1 erhöht, weil die folgende Stelle 5 hat.

252. **Erklärung. Eine Wiederkehr oder Periode heist die regelmäsige Wiederkehr derſelben Ziffern in der Zahl.**

Ein rein wiederkehrender oder rein periodischer Bruch heist ein Bruch, welcher nur Ziffern der Wiederkehr enthält.

Ein gemischter oder gemischt-periodischer Bruch heist ein Bruch, welcher auser der Wiederkehr noch nicht wiederkehrende Ziffern enthält. Die gemischte Wiederkehr heisen die nicht wiederkehrenden Ziffern mit einer Wiederkehr.

Beispiel: In $0,_{135135135}\cdots$ ist die Wiederkehr 135.

Ein rein wiederkehrender Bruch ist $^4/_{11} = 0,_{36363636}$.

Ein gemischter Bruch ist $^7/_{36} = 0{,}19444444$. Hier ſind die nicht wiederkehrenden Ziffern 19, die gemischte Wiederkehr ist 194.

253. **Satz. Ein Bruch, dessen Nenner nur 2 und 5 als Fache oder Faktoren enthält, giebt einen endlichen Zehntbruch.**

Beweis: Man hänge an den Zähler ſoviel Nullen, als 2 bez. 5 im Nenner als Fach oder Faktor enthalten ist; dann hat der Zähler ſovielmal 10 als der Zähler 2 bez. 5 als Fach enthält. Der Nenner geht dann alſo in den Zähler auf.

Beispiel: $^3/_4 = 0,_{75}$ $^7/_8 = 0,_{875}$ $^3/_5 = 0,_6$.

Satz. Ein Bruch, dessen Nenner nur andre Fache oder Faktoren als 2 und 5 enthält, giebt einen rein wiederkehrenden Zehntbruch. 254.

Beweis: Die andern Primzahlen auser 2 und 5 gehen nicht in 2 und 5, alſo nach 221 auch nicht in deren Vielfaches, d. h. nicht in den Nenner auf. Sei nun die Primzahl n, ſo kann bei der jedesmaligen Teilung nur eine Zahl übrig bleiben, welche kleiner als n ist und muss demnach mindestens bei der (n—1)ten Teilung wieder dieſelbe Zahl übrig bleiben, d. h. es muss die Wiederkehr derſelben Zahlen (der Periode) eintreten.

Die Wiederkehr (die Periode) hat, wenn das Primfach im Nenner 3 ist, eine Stelle, wenn es 11 ist, zwei, wenn 37 drei, wenn 101 vier Stellen, wenn es 41 oder 271 ist, fünf, wenn es 7 oder 13 ist sechs Stellen.

Beispiel: $^5/_{21} = 0{,}238095238095$ $\quad ^7/_9 = 0{,}777777$

Satz. Ein Bruch dessen Nenner 2, 5 und noch andre Zahlen als Fache oder Faktoren erhält, giebt einen gemischten Zehntbruch. 255.

Beispiel: $^7/_{45} = 0{,}1555555$ $\quad ^5/_{36} = 0{,}13888888.$

$^7/_{44} = 0{,}15909090$ $\quad ^8/_{35} = 0{,}2285714285714.$

b. Die Verwandlung der Zehntbrüche (Dezimalbrüche) in gewöhnliche Brüche.

Satz. Einen endlichen Zehntbruch (Dezimalbruch) verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man den Nenner unter den Zähler schreibt und hebt. 256.

Beweis: Nach 253 ist der endliche Reihenbruch einem Bruche gleich, der nur 2 oder 5 im Nenner als Fache hat, da nun im Nenner die Zahl 10 oder 2 mal 5 beliebig oft als Fach enthalten ist, ſo muss der Bruch durch Heben erhalten werden.

Beispiel: $0{,}925 = \frac{925}{1000} = \frac{37}{40}$ $\qquad 0{,}4176 = \frac{4176}{10000} = \frac{261}{625}.$

Satz. Einen rein wiederkehrenden Zehntbruch (einen rein periodischen Dezimalbruch) verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man unter jede Ziffer der ersten Wiederkehr eine Neun schreibt, und nun hebt. 257.

Beweis: Es ſei die Wiederkehr abc··n, wo jeder Buchstabe eine beliebige Ziffer der Stelle bezeichnet und habe $\overbrace{1000\cdot\cdot0}^{n}$, bez. $\overbrace{999\cdot\cdot9}^{n}$ n Nullen bezüglich Neunen, ſo ist der rein wiederkehrende Bruch gleich $0{,}a_1a_2a_3\cdot\cdot a_na_1a_2a_3\cdot\cdot a_n\cdots$ und ist demnach

$$\overbrace{1000\cdots0}^{n}\times 0{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = a_1a_2a_3\cdots a_n{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

davon abgezogen

$$1\times 0{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = \qquad 0{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

bleibt

$$\overbrace{999\cdots}^{n}\,9\times 0{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = a_1a_2a_3\cdots a_n$$ und auf beiden Seiten durch $\overbrace{999\cdots9}^{n}$ geteilt

giebt $$0{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = \frac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{999\cdots9}.$$

Beispiel: $0{,}243243243 = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}$.

Um die Brüche leicht heben zu können, ist es wünschenswert die Zahlen zu kennen, welche in die Nenner 9, 99 u. s. w. aufgehen. Ich füge deshalb hinzu. Es ist

99 = 9·11
999 = 9·3·37
9'999 = 9·11·101
99'999 = 9·41·271
999'999 = 9·3·7·11·13·37
9'999'999 = 9·1'111'111
99'999'999 = 9·11·73·101·137
999'999'999 = 9·9·37·333·667
9'999'999'999 = 9·11·41·271·9091
99'999'999'999 = 9·11'111'111'111
999'999'999'999 = 9·3·7·13·37·9901.

258. **Satz. Einen gemischten Zehntbruch (einen gemischt-periodischen Dezimalbruch) verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man die nicht wiederkehrenden Ziffern von der gemischten Wiederkehr abzieht und im Nenner für jede wiederkehrende Ziffer der Wiederkehr eine Neun, für jede nicht wiederkehrende Ziffer eine Null setzt, und nun hebt.**

Beweis: Es seien $b_1b_2\cdots b_m$ die nicht wiederkehrenden Ziffern $a_1a_2a_3\cdots a_n$ die wiederkehrenden, also $b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_n$ die gemischte Wiederkehr, so ist der gemischte Bruch gleich

$0{,}b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ und ist demnach

$$\overbrace{100\cdots0000\cdots0}^{m+n}\times 0{,}b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$
$$= b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_n{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdot a_n\cdots$$

minus $$\overbrace{100\cdots0}^{m}\times 0{,}b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$
$$= \qquad b_1b_2\cdots b_m{,}a_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

$$\overbrace{999\cdots9}^{n}\,\overbrace{00\cdots0}^{m}\times 0{,}b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_na_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$
$$= b_1b_2\cdots b_ma_1a_2a_3\cdots a_n - b_1b_2\cdots b_m$$

und auf beiden Seiten durch $\overbrace{999\cdots9}^{n}\,\overbrace{00\cdots0}^{m}$ geteilt, giebt.

$$0{,}b_1b_2\cdots b_m a_1a_2a_3\cdots a_n a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = \frac{b_1b_2\cdots b_m a_1a_2a_3\cdots a_n - b_1b_2\cdots b_m}{\underbrace{999\cdots9}_{n}\;\underbrace{00\cdots0}_{m}}$$

Beispiel: 0,68939393 = (6893—68) : 9900 = 6825 : 9900 = $^{91}/_{132}$.

8. Das Rechnen mit benannten Zahlen oder die Rechnungen des gewöhnlichen Lebens.

Der vorliegende Abschnitt bietet uns die Anwendung der gewonnenen Sätze auf das praktische Leben, zunächst die abgekürzte Rechnung, dann das Rechnen mit benannten Zahlen und die Bruchgleichung oder die Regeldetri, dann die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten und endlich die Gleichung ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten. Für das praktische Leben ist gerade dieſer Abschnitt von der grösten Bedeutung.

A. Das abgekürzte Rechnen.

Erklärung. Abgekürzt heist die Rechnung, wenn man 259.
die Rechnung nur auf die Stellen beschränkt, auf welche es dem Rechnenden ankommt. Die niedrigste dieſer Stellen heist die Kürzungsstelle. Die auf die Kürzungsstelle folgende Stelle, wird nur ſoweit mit berechnet, als dies noch auf die Kürzungsstelle Einfluss hat; steht auf der folgenden Stelle noch eine der Zahl 5 bis 9, ſo wird zu der Ziffer der Kürzungsstelle noch eins hinzugefügt.

Beim praktischen Rechnen kommt es immer nur auf bestimmte Stellen an und genügen meist 5 bis 6 Stellen. So kann man die Brüche von Pfennigen stets weglassen, und ähnlich in den meisten Fällen. Die auf die Kürzungsstelle folgende Stelle berückſichtigt man ſoweit, dass der Fehler möglichst gering wird; ſo kürzt man 84625,$_{836}$ in 84626, da dies genauer ist, als wollte man es in 84625 kürzen und beobachtet die in der Erklärung gegebene Regel.

Satz. Beim abgekürzten Zufügen und Abziehen berechnet 260.
man noch die auf die Kürzungsstelle folgende Stelle mit, und kürzt dann.

Beispiel:		
25,$_{7824}$'$_{275}$	+ 0,$_{8725}$'$_{367}$	= 26,$_{6550}$
81,$_{2783}$'$_{4566}$	— 23,$_{53297}$'$_{823}$	= 57,$_{7453}$.

Satz. Beim abgekürzten Vervielfachen kürzt man zunächst 261.
den einen Fach bis auf die folgende Stelle nach der Kürzungsstelle und vervielfacht ihn mit den Einern des andern Faches. Bei jeder nächst höhern Stelle des zweiten Faches nimmt man noch die nächst folgende Stelle des ersten Faches für die Berechnung mit und schreibt die Ziffern gleicher Stellen und alſo auch die Komma ſenkrecht unter

einander; bei jeder nächst niedern Stelle des zweiten Faches streicht man eine Stelle des andern Faches. Alle Zeuge oder Produkte fügt man sodann zu und kürzt die Summe um eine Stelle.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 161.

Beispiel: 523,783636·· × 38,3789·

			523,783636··
			38,3789
8	× $523{,}7836_3$	=	4190,2690
30	× $523{,}78363_6$	=	15713,5091
0,8	× $523{,}783_6$	=	157,1351
0,07	× $523{,}78_3$	=	36,6648
0,008	× $523{,}7_8$	=	4,1903
0,0009	× $523{,}_7$	=	0,4713
			20102,2396

Anm. Man schreibt die Produkte senkrecht unter einander und zieht von Anfang einen senkrechten Strich für das Komma. Hat der Multiplikandus nicht soviel Stellen, als erforderlich, so hängt man die entsprechenden Nullen an.

262. **Satz. Beim abgekürzten Teilen kürzt man die zu teilende Gröse und den Teiler so, dass die niedrigsten Stellen in beiden gleich weit rechts, bez. links vom Komma stehen und rückt nun das Komma in beiden Zahlen gleich weit und zwar soweit nach rechts bez. links, dass die letzte Ziffer in beiden Zahlen Einer bezeichnen. Nun teilt man solange mit dem ganzen Teiler in die zu teilende Zahl, als es geht, ohne Nullen anzuhängen. Dann aber teilt man, indem man vor jeder folgenden Teilung eine und zwar die letzte Stelle des Teilers streicht und nur noch in Gedanken mitrechnet, um die Zehner zu berücksichtigen.**

Beweis; Unmittelbar nach 184.

Beispiel: 84,3627 : 7,9234.

79234	843627	10,6473
	79234	
$7923{,}_4$	51287	
	47540	
$792{,}_3$	3747	
	3169	
$79{,}_2$	578	
	554	
$7{,}_9$	24	
	24	

Reiche Uebungen für das Rechnen mit gekürzten Rechnungen bieten das Uebungsheft und das Rechenheft III des Verfassers.

Die Kettenbrüche bilden das Mittel, um bei den Brüchen die Näherungswerte zu finden. Da sie eine weitere Bedeutung nicht haben, lasse ich sie im Texte fort und gebe hier nur eine kurze Entwicklung derselben in den folgenden Bemerkungen.

1) Kettenbruch heist ein Bruch, dessen Nenner eine gemischte Zahl ist, z. B. $\frac{1}{2+\frac{2}{3}}$, jeder von den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ heist ein Teilbruch.

Echter Kettenbruch heist ein Kettenbruch, in dem alle Zähler 1 find, z. B. $\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}$.

2) Einen echten Bruch verwandelt man in einen echten Kettenbruch, indem man den Nenner durch den Zähler teilt und jedesmal den vorigen Nenner oder Divifor durch den letzten Rest teilt, z. B. $\frac{7}{31}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$.

Beweis: $\frac{7}{31}=\frac{1}{\frac{31}{7}}=\frac{1}{4+\frac{3}{7}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{7}{3}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$.

3) Einen Kettenbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man von unten beginnend jedesmal die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und diefen umkehrt, z. B. $\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{9}{2}}}=\frac{1}{3+\frac{2}{9}}=\frac{9}{29}$.

Beweis: $\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{8+1}{2}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{9}{2}}}=\frac{1}{3+\frac{2}{9}}=\frac{1}{\frac{27+2}{9}}$

$=\frac{1}{\frac{29}{9}}=\frac{9}{29}$.

4) In jedem Kettenbruch bilden der erste Teilbruch den ersten Näherungswert, die beiden ersten den zweiten, die drei ersten Teilbrüche den dritten Näherungswert, z. B. in $\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}}$ ist $\frac{1}{3}$ der erste, $\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=\frac{2}{7}$ der zweite,

$\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}=\frac{11}{38}$ der dritte Näherungswert.

5) Der ungerade (erste, dritte, fünfte) Näherungswert ist gröser, der gerade (zweite, vierte, fechste) ist kleiner als der gegebene Bruch; denn im

ersten Näherungswerte wird, indem man den Rest weglässt, der Nenner kleiner. im zweiten der Zähler kleiner als im gegebenen Bruche, z. B. $^1/_3$ gröser als $\frac{1}{3+\frac{1}{2}} = {}^2/_7$; $\frac{1}{3+\frac{1}{2}} = {}^2/_7$ kleiner als $\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}} = {}^{11}/_{38}$.

6) Der Unterschied zweier auf einander folgender Näherungswerte ist ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt aus den Nennern der beiden Näherungswerte ist, z. B. bei $^1/_3$ und $^2/_7$ ist der Unterschied $^1/_{21}$.

7) Die Kettenbrüche sind das Mittel, um für Brüche mit grosen Ziffern die nächsten Annäherungswerte in kleinen Zahlen zu finden.

Die Zahl Pi (π) giebt an, wievielmal der Durchmesser eines Kreises im Kreisumfange enthalten ist, sie ist, 3,1415926536. Dafür erhält man durch Kettenbrüche die Näherungswerte: $3^1/_7$, $3^{15}/_{106}$, $3^{16}/_{113}$, $3^{4687}/_{33102}$. Diese Andeutungen über die Kettenbrüche mögen hier genügen.

B. Das Rechnen mit benannten Zahlen.

1. Auflösen und Zurückführen.

263. **Erklärung. Die Wertzahl eines Mases heist die Zahl, welche angiebt, wieviel Einheiten des niedern Mases auf eine Einheit des höhern gehen.**

Beispiel: Die Wertzahl des Monats ist 30 Tage, die des Jahres 12 Monate bez. 360 Tage, die des Kilometers ist 1000 Meter, die der Mark 100 Pfennige.

264. **Satz. Das höhere Mas lö'st man in das niedere Mas auf (resolvirt man), indem man die Anzahl des höhern Mases mit seiner Wertzahl vervielfacht.**

Beispiel: 7 Monate = 7 × 30 = 210 Tage, 5 Jahre = 5 × 360 = 1800 Tage, 9 Kilometer = 9 × 1000 = 9000 Meter, 25 Mark = 2500 Pfennige.

265. **Satz. Das niedere Mas führt man auf das höhere zurück (reduzirt man), indem man die Anzahl des niedern Mases durch die Wertzahl des höhern teilt.**

Beispiel: 95 Tage = 95 : 30 = 3 Monate 5 Tage. Bei diesen Rechnungen mit der Wertzahl muss man sich gewöhnen kurz zu rechnen, d. h. blos das Ergebniss hinzuschreiben. Dazu ist allerdings Uebung erforderlich, für welche die Uebungshefte reichlich Gelegenheit bieten.

266. **Satz. Einnamig macht man eine mehrfach benannte Zahl indem man das höchste Mas ins nächst niedere auflös't und so fort bis zum niedrigsten.**

Beispiel: 3 Monate 27 Tage 5 Stunden = (3·30 + 27) Tage 5 Stunden = 117 Tage 5 Stunden = (117 × 24 + 5) Stunden = 2813 Stunden.

267. **Satz. Mehrfach benannt macht man eine einnamige Zahl, indem man das niedrigste Mas aufs nächst höhere zurückführt und so fort bis zum höchsten.**

Beispiel: 70328 Stunden = 70328 : 24 Tage = 2930 Tage 8 Stunden = 2930 : 30 Monate 8 Stunden = 97 Monate 20 Tage 8 Stunden.

2. Das Zufügen und Abziehen mehrfach benannter Zahlen.

Satz. Mehrfach benannte Zahlen fügt man zu, indem man die Zahlen desselben Mases senkrecht unter einander schreibt, dann zunächst die Zahlen des niedrigsten Mases für sich zufügt, die Summe aufs höhere Mas zurückführt und dies Ergebniss zu den Zahlen dieses Mases zufügt, und entsprechend der Reihe nach mit den höhern Masen fortfährt. 268.

Beweis: Unmittelbar nach 124 und 265.

Beispiel:

83 ℳ	75 ₰
42 ℳ	88 ₰
1	
126 ℳ	63 ₰

Satz. Mehrfach benannte Zahlen der zehnteiligen Masteilung fügt man auch zu, indem man sie einnamig macht und dann zufügt. 269.

Beweis: Unmittelbar nach 264.

Beispiel:

37 Kilometer	315 Meter	37315,000
213 Meter	715 Millimeter	213,715
		37528,715

Der geübte Rechner darf beim Zufügen nicht mehr die Stücke nennen, sondern muss kurz rechnen, d. h. darf jedesmal nur die Summe aussprechen, die heraus kommt, so fügt er z. B. 9 + 7 + 8 + 3 + 5 so zu, dass er nur die Summen ausspricht 9, 16, 24, 27, 32.

Das Aufrechnen ganzer Seiten in den Büchern bildet eine ausgezeichnete Uebung fürs Kurzrechnen.

Beim Buchführen wird jede Seite von unten nach oben aufgerechnet, dann nochmals zur Probe, ob richtig gerechnet ist, von oben nach unten durchgerechnet, und wenn die Summe stimmt, diese als Uebertrag auf die folgende Seite vorgetragen und beim Zufügen mitgerechnet.

Beim Rechnungsabschlusse schreibt man auf die linke Seite die Einnahmen, auf die rechte die Ausgaben und macht beide gleich, indem man auf der kleinern Seite den Uebertrag zufügt, und nach dem Abschlusse auf der andern Seite der neuen Rechnung vorträgt.

Beispiel:

Einnahme.	ℳ	₰	Ausgabe.	ℳ	₰
Bestand	1013	13	Wochenlohn	297	54
196 Scheffel Weizen	1764	—	50 Scheffel Saatkorn	600	—
83 Scheffel Roggen	622	50	300 Ctr. Heu	750	—
2055 Liter Milch	205	50	90 Ctr. Düngstoffe	270	—
			Uebertrag	1687	59
Summa	3605	13	Summa	3605	13
Vortrag	1687	59			

270. **Satz. Mehrfach benannte Zahlen zieht man ab, indem man die Zahlen desselben Mases senkrecht unter einander schreibt, dann zunächst die Zahlen des niedrigsten Mases abzieht, und sofern dies nötig ist, eine Einheit des nächst höhern Mases borgt und entsprechend der Reihe nach mit den höhern Masen fortfährt.**

Beweis: Unmittelbar nach 260 und 264.

Beispiel:

	25 Ries	12 Buch	7 Bogen
—	12 „	13 „	8 „
Rest	12 Ries	19 Buch	4 Bogen.

271. **Satz. Mehrfach benannte Zahlen der zehnteiligen Masteilung zieht man auch ab, indem man sie gleichnamig macht und dann abzieht.**

Beweis: Unmittelbar nach 264 und 260.

Beispiel: Aufgabe: 53 Kgr. 350 gr. — 17 „ 725 „

Rechnung: 53350 gr. — 17725 gr. Rest 35625 gr.

Der geübte Rechner darf beim Abziehen nicht erst den Vorrat und Abzug nennen, sondern muss kurz rechnen, d. h. jedesmal nur den Rest nennen, der herauskommt.

3. Das Vervielfachen einer benannten Zahl.

272. **Erklärung. Das Vervielfachen einer benannten Zahl heist die Rechnung, wenn eine benannte Zahl mit einer oder mehren reinen Zahlen verwebt oder vervielfacht wird.**

Das Zeug oder Produkt zweier benannter Zahlen darf in der Zahlenlehre nie vorkommen.

Es ist dies eine Beschränkung, welche sich alle Lehrer der Zahlenlehre auferlegt haben und welche man daher stets beobachten muss.

273. **Satz. Alle Gesetze der Vervielfachung reiner Zahlen gelten auch für die Vervielfachung benannter Zahlen; das Zeug oder Produkt der letztern hat den Namen der benannten Zahl.**

Beweis: Sei b eine reine, ae die benannte Zahl, so ist nach 105 $b \cdot (ae) = (ba)e$, wo ba ein Zeug oder Produkt reiner Zahlen ist. Alle Gesetze der Vervielfachung, welche also für die reinen Zahlen b und a gelten, gelten auch für die benannte Zahl ae.

Beispiel: 7 mal 8 Ellen ist gleich $7 \cdot 8 = 56$ Ellen.

274. **Satz. Eine einfach benannte Zahl vervielfacht man mit einer reinen Zahl, indem man die beiden reinen Zahlen mit einander vervielfacht und dem Zeuge oder Produkte den Namen der benannten Zahl giebt.**

Beweis: Unmittelbar nach 273.

Satz. Eine mehrfach benannte Zahl vervielfacht man mit einer Zahl, indem man fie einnamig macht und dann vervielfacht. 275.

Beweis: Unmittelbar nach 264 und 274.

Beispiel: (52 Tonnen 716 Kgr. 315 gr.) × 12 = 52'716315 gr. × 12 = 632'595780 gr. = 632 Tonnen 595 Kgr. 780 gr.

Satz, Eine mehrfach benannte Zahl kann man auch mit einer Zahl vervielfachen, indem man die Zahl jedes Mases für fich vervielfacht, die Zeuge aufs höhere Mas zurückführt und dann zufügt. 276.

Beweis: Unmittelbar nach 93, 274 und 265.

4. Das Teilen benannter Zahlen.

Erklärung. Das Teilen benannter Zahlen heist die dem Vervielfachen benannter Zahlen entsprechende Trennung, wo zu dem Zeuge oder Produkte einer benannten und einer reinen Zahl bae der eine Fach oder Faktor gegeben ist und der andere gefucht wird 277.

Beim Teilen benannter Zahlen unterscheidet man zwei Fälle. Ist der benannte Fach oder Faktor ae gegeben, fo heist das Teilen ein Messen (gr. metrêin), ist der unbenannte Fach oder Faktor b gegeben, fo heist das Teilen ein Schneiden oder reines Teilen (gr. metrízein).

Beispiel: 3 Meter geteilt durch 100 ist ein Schneiden oder reines Teilen und giebt 3 Centimeter. 56 Meter geteilt durch 8 Meter ist ein Messen und giebt 7.

Satz des reinen Teilens. Alle Gefetze der Teilung reiner Zahlen gelten auch für die Teilung der benannten Zahl durch ein reine Zahl. Der Quote oder Quotient hat den Namen der benannten Zahl. 278.

Beweis: Unmittelbar nach 62; denn nach 62 ist ae : b = (a : b)e wo a : b eine Teilung reiner Zahlen ist. Alle Gefetze der Teilung, welche alfo für die reinen Zahlen a und b gelten, gelten auch für die Teilung der benannten Zahl ae durch b, und der Quote (a : b)e hat den Namen der benannten Zahl ae.

Satz. Eine einfach benannte Zahl ae teilt man durch eine reine Zahl b, indem man die Anzahl a der benannten Zahl durch die reine Zahl teilt und dem Quoten den Namen der benannten Zahl giebt 279.

Beweis: Unmittelbar nach 278.

Beispiel: (423 Mark) : 9 = (423 : 9) Mark = 47 Mark.

Satz. Eine mehrfach benannte Zahl teilt man durch eine Zahl, indem man fie einnamig macht und teilt. 280.

Beweis: Unmittelbar nach 266 und 279.

Beispiel: (713 Km. 320 m 720 mm) : 28 = 713'320720 mm : 28 = 25'975740 mm = 25 Km. 475 m 740 mm.

281. **Satz: Eine mehrfach benannte Zahl kann man auch durch eine Zahl teilen, indem man zuerst die Zahl des höchsten Mases teilt, den Rest ins nächste Mas auflöſt und dazu die Zahl dieſes Mases fügt, dann dieſe teilt und ſo fort.**

Beweis: Unmittelbar nach 278, nach 184 und nach 264.

Beispiel: (37 Ries 12 Buch) : 8 = 37 Ries : 8 + 12 Buch : 8
= 4 Ries + 5 Ries : 8 + 12 Buch : 8 = 4 Ries + (5 Ries + 12 Buch) : 8
= 4 Ries + (5.20 + 12) Buch : 8 = 4 Ries 14 Buch.

282. **Satz des Messens. Alle Geſetze der Teilung reiner Zahlen gelten auch für die Teilung einer benannten Zahl durch eine gleich benannte Zahl. Der Quote oder Quotient ist eine reine Zahl.**

Beweis: Unmittelbar nach 62; denn nach 62 ist ae : be und dies nach 180 = (a : b) (e : e) = (a : b) 1 = a : b nach 173 und 172.

283. **Satz. Eine einfach benannte Zahl teilt man durch eine gleichbenannte Zahl, indem man ſie wie reine Zahlen teilt.**

Beweis: Unmittelbar nach 282.

284. **Satz. Eine mehrfach benannte Zahl teilt man durch eine mehrfach benannte Zahl, indem man beide gleichnamig macht und dann wie reine Zahlen teilt.**

Beweis: Unmittelbar nach 264 und 283.

Beispiel: (101 ℳ 40 ₰) : (1 ℳ 30 ₰) = 10140 ₰ : 130 ₰
= 10140 : 130 = 78.

Bemerkt möge hier noch ausdrücklich werden, dass man nie zwei benannte Zahlen durch einander teilen kann, wenn man ſie nicht gleichnamig machen kann.

Es ist notwendig, dass ſich jeder Gebildete reiche Uebung im Rechnen mit benannten Zahlen schaffe. Das Uebungsheft und das Rechenheft II des Verfassers bieten dazu reiche Gelegenheit.

C. Die Bruchgleichung oder Proportion und der Dreiſatz oder die Regeldetri,

1. Die Bruchgleichung oder die Proportion.

285. **Erklärung. Eine Bruchgleichung oder eine Proportion, heist eine Gleichung, in welcher jede Seite ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner ungleich Null ist. Jeder ſolcher Bruch heist ein Verhältniss, der erste Zähler und der zweite Nenner heisen die äusern Grösen, der erste Nenner und der zweite Zähler heisen die innern Grösen.**

Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oder a : b = c : d hier ſind a und d die äusern, b und c die innern Grösen, $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, ſind die beiden Verhältnisse.

Satz. In der Bruchgleichung ist das Zeug (das Produkt) der äusern Grösen gleich dem der innern Grösen oder 286.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Annahme), so ist ad = bc (Folgerung).

Beweis: Man vervielfache die gegebene Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit db, so ist (nach 180) $\frac{adb}{b} = \frac{dbc}{d}$, d. h. (nach 182) ad = bc.

Beispiele: $^{12}/_{16} = {}^{15}/_{20}$ also $16 \cdot 15 = 12 \cdot 20$.

Satz. Wenn zwei Zeuge oder Produkte einander gleich, aber ungleich Null sind, so erhält man eine richtige Bruchgleichung, wenn man die beiden Fache oder Faktoren des einen Zeuges als äusere, die des andern als innere Grösen setzt, oder 287.

Wenn ad = bc (Annahme), so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Folgerung).

Beweis: Da ad und bc ungleich Null sind, so ist (nach 175) auch b und d, also (nach 175) auch bd ungleich Null. Man teile die gegebene Gleichung durch bd, so ist (nach 180)

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \text{ und (nach 182) gehoben } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Beispiel: Es ist $12 \cdot 15 = 10 \cdot 18$, also ist auch $12 : 18 = 10 : 15$.

Satz. In einer Bruchgleichung kann man zwei äusere Grösen gegenseitig vertauschen, und ebenso zwei innere Grösen. 288.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also ist (nach 286) ad = bc, mithin ist (nach 287) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ und $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

Beispiel: Da $6 : 15 = 8 : 20$ so ist auch $6 : 8 = 15 : 20$, ferner $15 : 6 = 20 : 8$ und $15 : 20 = 6 : 8$.

Satz. Wenn in einer Bruchgleichung eine innere und eine äusere Gröse einander gleich sind, so sind auch die beiden andern Grösen einander gleich. 289.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also (nach 286) ad = bc und es sei a = c (Voraussetzung), so ist auch ad = bc = ba, mithin (nach 46) auch b = d.

Satz. Eine äusere Gröse einer Bruchgleichung erhält man, indem man das Zeug oder Produkt der innern Grösen durch die andre äusere Gröse teilt, und entsprechend erhält man eine innere Gröse u. s. w. 290.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist (nach 286) $ad = bc$, also (nach 287 und 167)

$$a = \frac{bc}{d} \text{ und } d = \frac{bc}{a}; \text{ auch } b = \frac{ad}{c} \text{ und } c = \frac{ad}{b}.$$

Beispiele: $\frac{x}{3} = \frac{8}{5}$, also $x = \frac{3 \cdot 8}{5}$; $\frac{3}{x} = \frac{7}{5}$ also $x = \frac{3 \cdot 5}{7}$.

291. Satz. **Eine Bruchgleichung bleibt richtig, wenn man in dem einen Bruche statt des Zählers eine beliebige Vielfachensumme der beiden Zähler, welche ungleich Null ist, und statt des Nenners die entsprechende Vielfachensumme der beiden Nenner setzt.**

Beweis: Es sei die gegebene Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist (nach 290) $a = \frac{b}{d}c$. Sei nun $\mathfrak{a}a + \mathfrak{c}c$ eine beliebige Vielfachensumme $\gtrless$ Null von den Zählern a und c, so ist

$$\mathfrak{a}a + \mathfrak{c}c = \mathfrak{a}\frac{b}{d}c + \mathfrak{c}c = \left(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c}\right)c$$

und (nach 175) $\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c} \gtrless 0$, also ist auch die entsprechende Vielfachensumme der Nenner b und d

$$\mathfrak{a}b + \mathfrak{c}d = \mathfrak{a}\frac{b}{d}d + \mathfrak{c}d = \left(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c}\right)d,$$

d. h. da $\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c} \gtrless 0$ und $d \gtrless 0$, auch dieser Ausdruck $\gtrless 0$ (nach 175). Mithin ist

$$\frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{c}c}{\mathfrak{a}b + \mathfrak{c}d} = \frac{(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c})\,c}{(\mathfrak{a}\frac{b}{d} + \mathfrak{c})\,d} = \frac{c}{d} \qquad \text{(nach 182).}$$

Beispiel: $\frac{5}{7} = \frac{15}{21} = \frac{5(3 \cdot 8 + 4)}{7(3 \cdot 8 + 4)} = \frac{140}{196} = \frac{5(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4)}{7(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4)} = \frac{35}{49}$.

292. Satz. **Wenn mehre Brüche einander gleich sind, so bleibt die Gleichung richtig, wenn man in dem einen Bruche statt des Zählers eine beliebige Vielfachensumme $\gtrless$ 0 der sämmtlichen Zähler und statt des Nenners die entsprechende Vielfachensumme der Nenner setzt.**

Beweis: Seien die gegebenen Brüche $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \cdots$ und sei $\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots \gtrless 0$, so ist, da $a_1 = a\frac{a_1}{a}$, $b_1 = b\frac{a_1}{a}$, $c_1 = c\frac{a_1}{a} \cdots$ ist, auch

$$\mathfrak{a}a_1 + \mathfrak{b}b_1 + \mathfrak{c}c_1 + \cdots = \mathfrak{a}a\frac{a_1}{a} + \mathfrak{b}b\frac{a_1}{a} + \mathfrak{c}c\frac{a_1}{a} + \cdots$$
$$= (\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots)\frac{a_1}{a},$$

mithin (nach 175) $\gtrless 0$, da $\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots \gtrless 0$ ist und auch a_1 und $a \gtrless 0$ ſind. Es ist alſo

$$\frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots}{\mathfrak{a}a_1 + \mathfrak{b}b_1 + \mathfrak{c}c_1 + \cdots} = \frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots}{(\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \cdots)\frac{a_1}{a}}$$
$$= \frac{1}{\frac{a_1}{a}} = \frac{a}{a_1} \quad \text{(nach 182 und 181).}$$

Beispiele: $\frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{21}{28} = \frac{9 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 21 \cdot 7}{12 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 28 \cdot 7} = \frac{204}{272}$

$$= \frac{9 \cdot {}^1/_2 - 15 \cdot {}^1/_3 + 21 \cdot 2}{12 \cdot {}^1/_2 - 20 \cdot {}^1/_3 + 28 \cdot 2} = \frac{41^1/_2}{55^1/_3}.$$

Satz. Eine beliebige Vielfachenſumme ungleich Null aus dem Zähler und Nenner des einen Bruches verhält ſich zur entsprechenden Vielfachenſumme aus dem Zähler und Nenner jedes gleichen Bruches, wie der Zähler oder Nenner des ersten Bruches zu dem des zweiten. 293.

Beweis: Man vertausche in $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nach 288 die innern Grösen, ſo erhält man $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und hat man für jede beliebige Vielfachenſumme $\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b$ die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b}{\mathfrak{a}c + \mathfrak{b}d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{(nach 291).}$$

Satz. Wenn in zwei Bruchgleichungen drei entsprechende Grösen gleich ſind, ſo ſind auch die vierten gleich. 294.

Beweis: Es ſei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{b} = \frac{c}{d}$, ſo ist $\frac{a}{b} = \frac{e}{b}$ mithin (nach 289) $a = e$.

Satz. Zwei und mehre Bruchgleichungen geben zuſammengeſetzt, (d. h. wenn man die entsprechenden Grösen mit einander vervielfacht) wieder eine richtige Bruchgleichung. 295.

Beweis: Es ſei gegeben $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$ .... $\frac{a_n}{b^n} = \frac{c_n}{d_n}$, ſo ist auch (nach 17)

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_1}{d_1} \cdot \frac{c_2}{d_2} \cdots \frac{c_n}{d_n}, \text{ mithin (nach 180)}$$
$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{c_1 c_2 \cdots c_n}{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

Beispiele: $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ und $\frac{8}{10} = \frac{12}{15}$; alſo ist auch $\frac{9 \cdot 8}{12 \cdot 10} = \frac{12 \cdot 12}{16 \cdot 15}$.

2. Der Dreiſatz oder die Regeldetri.

Es bildet der Satz 290 das Geſetz der Regeldetri (der regula de tribus) wo drei Grösen gegeben ſind und die vierte geſucht wird. Es ist dies Geſetz das wichtigste fürs praktische Rechnen und bedarf daher noch einer Besprechung. Das Geſetz macht den Kindern bei der verschiedenen Stellung welche das x einnehmen kann, Schwierigkeiten. Um dieſe zu beſeitigen, giebt man der Bruchgleichung für das praktische Rechnen die Form des Bruchkreuzes.

296. **Erklärung. Das Bruchkreuz $\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline b & d \end{array}$ geleſen a durch b, wie c durch d ist die Form der Bruchgleichung fürs praktische Rechnen. Die Zeuge der Scheitel ad und bc heisen die Scheitelzeuge.**

297. **Satz. In jedem Bruchkreuze ſind die Scheitelzeuge gleich und kann man die beiden Grösen desſelben Scheitelzeuges mit einander vertauschen.**

Beweis: Unmittelbar nach 286 und 288.

Beispiele: In $\begin{array}{c|c} 8 & 12 \\ \hline 14 & 21 \end{array}$ ist $8 \cdot 21 = 14 \cdot 12$ und ist alſo auch $\begin{array}{c|c} 8 & 14 \\ \hline 12 & 21 \end{array}$.

298. **Erklärung. Der Dreiſatz, die Regeldetri ist eine Bruchgleichung, in welcher drei Grösen gegeben ſind und die vierte x geſucht wird.**

Beispiele: $\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline x & 9 \end{array}$ alſo $7\,x = 3 \cdot 9$; $\begin{array}{c|c} 8 & x \\ \hline 5 & 12 \end{array}$ alſo $5\,x = 8 \cdot 12$.

299. **Satz. Im Dreiſatze, in der Regeldetri findet man die Unbekannte x, indem man das vollständige Scheitelzeug durch das unvollständige teilt.**

Beweis: Unmittelbar nach 290.

Beispiel: $\begin{array}{c|c} 7 & 8 \\ \hline 12 & x \end{array}$ $x = \frac{12 \cdot 8}{7}$ $\begin{array}{c|c} 9 & 10 \\ \hline x & 11 \end{array}$ $x = \frac{9 \cdot 11}{10}$.

Bemerkt möge hier noch werden, dass man ſenkrecht, wie wagerecht heben darf, dagegen nicht über Kreuz.

Beispiel: $\begin{array}{c|c} 10 \cdot 8 \cdot 12 & 18 \cdot 20 \\ \hline 4 \cdot 5 \cdot 27 & x \cdot 9 \end{array}$. Hier kann man ſenkrecht heben 10 und 5, 8 und 4, 12 und 27, 18 und 9 oder wagerecht 10 und 20, 12 und 18, 27 und 9; aber nicht über Kreuz 4 und 20, 5 und 20, 27 und 18 oder 12 und 9.

300. **Satz. Bei benannten Zahlen muss man die mehrfach benannten in einnamige verwandeln, beim Anſatze die gleich benannten unter einander schreiben und die gleichen Namen im Zähler und Nenner heben. Demnächst findet man die Unbekannte nach 299.**

Beweis. Da man nach 297 die Grösen desſelben Scheitelzeuges mit einander vertauschen kann, ſo kann man stets die gleichbenannten

unter einander schreiben, dann kann man die gleichen Namen im Zähler und Nenner nach 182 heben und nun die Unbekannte nach 299 finden.

Beispiel: Wenn 8 Ell. 7 Mark kosten, was kosten 9 Ell.

Anſatz $\frac{8 \text{ Ell.}}{9 \text{ Ell.}} \Big| \frac{7 \text{ ℳ}}{x}$ oder $\frac{8}{9} \Big| \frac{7 \text{ ℳ}}{x}$ alſo $x = \frac{9 \cdot 7 \text{ ℳ}}{8}$.

Wenn die entsprechenden Zahlen verschieden benannt ſind, ſo muss man ſie erst gleichnamig machen, z. B. Ein Zentner kostet 115 ℳ, wie viel kosten 27 kgr.? der Zentner hat 50 kgr., alſo Anſatz

$\frac{50 \text{ kgr.}}{27 \text{ kgr.}} \Big| \frac{115 \text{ ℳ}}{x}$ oder $\frac{50}{27} \Big| \frac{115 \text{ ℳ}}{x}$ alſo $x = \frac{27 \cdot 115 \text{ ℳ}}{50}$

Satz. des erweiterten Dreiſatzes. Wenn mehr als drei Grösen gegeben ſind, ſo muss man ſie stets auf drei Grösen zurückführen, indem man die Zeuge oder Produkte der Grösen einführt. 301.

Beispiel: 20 Arbeiter arbeiten 30 Tage an einem Graben von 250 m Länge, 6 m Breite und 2 m Tiefe. Wieviel Arbeiter ſind zu einem Graben von 300 m Länge, 8 m Breite und $1,_5$ m Tiefe erforderlich, wenn der Graben in 78 Tagen fertig ſein ſoll?

Anſatz: $\frac{20 \cdot 30 \text{ Tage}}{x \cdot 78 \text{ Tage}} \Big| \frac{250 \cdot 6 \cdot 2 \text{ m}}{300 \cdot 8 \cdot 1,_5 \text{ m}}$ oder $\frac{20 \cdot 30}{x \cdot 78} \Big| \frac{250 \cdot 6 \cdot 2}{300 \cdot 8 \cdot 1,_5}$.

$$x = \frac{20 \cdot 30 \cdot 300 \cdot 8 \cdot 1,_5}{78 \cdot 250 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{120}{13} = 9^3/_{13}.$$

Der Dreiſatz bietet hiernach keinerlei Schwierigkeiten mehr und findet die reichste Anwendung im praktischen Leben. Das dritte und das vierte Heft des Verfassers bieten die zahlreichsten Beispiele aus dem praktischen Leben und ſollte ſich jeder darin die gröste Gewandtheit aneignen,

D. Die Gleichungen ersten Grades.

Erklärung. Die Unbekannte x einer Gleichung heist die Gröse, deren Wert geſucht werden ſoll. 302.

Eine Wurzel der Gleichung heist jeder bestimmte Wert, welcher statt der Unbekannten eingeführt der Gleichung genügt.

Aufgelöſ't heist die Gleichung, wenn man die Wurzel der Gleichung gefunden hat.

Satz. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen auf gleiche Weiſe knüpft, namentlich, wenn man auf beiden Seiten Gleiches zufügt, Gleiches abzieht, mit Gleichem vervielfacht, durch Gleiches (ungleich Null) teilt. 303.

Beweis: Unmittelbar nach 17.

Satz. Statt auf einer Seite der Gleichung ein Stück zuzufügen oder einen Abzug abzuziehen, kann man auf der andern Seite das Stück abziehen, oder den Abzug zufügen, und 304.

Statt eine Seite mit einem Fache zu vervielfachen oder durch einen Nenner zu teilen, kann man die andere Seite durch den Fach teilen, oder mit dem Nenner vervielfachen, d. h.

wenn $a + c = b$, ſo ist $a = b - c$,

wenn $a - c = b$, ſo ist $a = b + c$,

wenn $ac = b$, ſo ist $a = \frac{b}{c}$,

wenn $\frac{a}{b} = c$, ſo ist $a = bc$.

Beweis: Unmittelbar aus 303.

Beispiele:

Wenn $x + c = b$, ſo ist $x = b - c$. Wenn $x - c = b$, ſo ist $x = b + c$.

Wenn $ax = b$, ſo ist $x = \frac{b}{a}$. Wenn $\frac{x}{a} = b$, ſo ist $x = ab$.

Wenn $ax + b = c$, ſo ist $ax = c - b$ und $x = \frac{c-b}{a}$ u. ſ. w. Und in Zahlen

Wenn $x + 12 = 27$, ſo ist $x = 27 - 12$. Wenn $x - 5 = 12$, ſo ist $x = 12 + 5$.

Wenn $7 \cdot x = 15$, ſo ist $x = \frac{15}{7}$. Wenn $\frac{1}{7} x = 15$, ſo ist $x = 15 \cdot 7$.

Wenn $7x + 5 = 12$ ſo ist $7 \cdot x = 12 - 5$ und $x = \frac{12-5}{7}$ u. ſ. w.

305. **Satz. Ein Glied schafft man von einer Seite weg, indem man es mit dem entgegengeſetzten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung stellt.**

Einen Fach oder einen Nenner eines Gliedes schafft man weg, indem man alle andern Glieder durch den Fach teilt, oder mit dem Nenner vervielfacht.

Beweis: Unmittelbar aus 304.

Beispiele: $x + c = m$, $x = m - c$ | $x\frac{a}{c} = m$, $x = \frac{mc}{a}$

$x + (c - b) = m$, $x = m - c + b$ | $x : \frac{a}{c} = m$, $x = \frac{ma}{c}$

306. **Satz. Man kann die Vorzeichen aller Glieder einer Gleichung entgegengeſetzt nehmen.**

Beweis: Man kann beide Seiten der Gleichung mit -1 vervielfachen, dann aber werden alle Zeichen entgegengeſetzt (nach 158).

Beispiele: $a - x = b - c$, $x - a = c - b$.

307. **Satz. Wenn beide Seiten der Gleichung Brüche ſind, deren Zähler ungleich Null, ſo kann man beide Brüche umkehren.**

Beweis: Es ſei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſo ist $1 : \frac{a}{b} = 1 : \frac{c}{d}$ (nach 303)

d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (nach 181), was zu beweiſen war.

Beispiele: $\frac{a}{x} = c$; $\frac{x}{a} = \frac{1}{c}$; $\frac{a+b}{x} = \frac{m-c}{l}$; $\frac{x}{a+b} = \frac{l}{m-c}$

Erklärung. Eingerichtet heist eine Gleichung, wenn alle 308.
Nenner in denen x vorkommt, fortgeschafft, alle Klammern, welche x enthalten, aufgelöſ't, die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die ohne x auf die rechte Seite gebracht ſind, die Glieder, welche x gleich oft als Fache enthalten, in ein Glied vereinigt, und die Glieder ſo geordnet ſind, dass das vorangehende Glied x öfter als Fach enthält, als die folgenden Glieder, endlich das erste Glied auser x nur den Fach 1 enthält.

1, Die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.

Satz. Eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten 309.
ist aufgelöſ't, wenn ſie eingerichtet ist.

Satz. Löſung der Gleichung ersten Grades mit einer 310.
Unbekannten. Die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten löſ't man in folgender Weiſe:

1. Man schafft alle Nenner weg und zwar schafft man den Nenner eines Gliedes weg, indem man jedes andere Glied der Gleichung mit der Gröse, welche im Nenner steht, vervielfacht.

2. Man löſ't alle Klammern auf, welche x enthalten nach 131, 180 und 183.

3. Man schafft die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die andern auf die rechte Seite, indem man jedes Glied der rechten Seite, welches x enthält, mit entgegengeſetztem Zeichen auf die linke Seite stellt, und jedes Glied der linken Seite, welches kein x enthält, mit entgegengeſetztem Zeichen auf die rechte Seite stellt.

4. Man schliest alle Glieder der linken Seite in eine Klammer, welche mit x vervielfacht ist nach 183.

5. Man schafft den Fach oder Faktor von x fort, indem man die andere Seite durch dieſen Fach teilt.

6. Man führt nunmehr die Rechung aus.

Beweis: Unmittelbar aus den Sätzen 303 bis 309.

Beispiel a.

$$105 = \frac{(7x-9)\,3}{3x-8}$$

1. $105\,(3x-8) = (7x-9)\,3$
2. $315\,x - 840 = 21\,x - 27$
3. $315\,x - 21\,x = 840 - 27$
4. $(315-21)\,x = 840 - 27$
5. $x = \frac{840-27}{315-21}$
6. $x = \frac{813}{294} = \frac{271}{98}$

Beispiel b.

$$\frac{12}{x} + 13 = \frac{98}{3x} - 18$$

1. $12 \cdot 3 + 13 \cdot 3x = 98 - 18 \cdot 3x$
2.
3. $13 \cdot 3x + 18 \cdot 3x = 98 - 12 \cdot 3$
4. $(13 \cdot 3 + 18 \cdot 3)\,x = 98 - 12 \cdot 3$
5. $x = \frac{98 - 12 \cdot 3}{13 \cdot 3 + 18 \cdot 3}$
6. $x = {}^{62}/_{93} = {}^{2}/_{3}$

Es ist notwendig, dass ſich jeder Gebildete eine reiche Uebung in der Löſung dieſer Gleichungen und in der Ausführung dieſer ſechs Umformungen schaffe. Das Uebungsheft des Verfassers für die Gleichungen ersten Grades bietet dazu reiche Gelegenheit.

Bei der Auflöſung der Klammern muss man die Strichklammer z. B. $-(a-b)$, die Malklammer z. B. $a\frac{b}{c}$ und die Beziehungsklammer $a(b-c)$ unterscheiden. Nicht ſelten ist die Klammer eine mehrfache z. B. in $a-b(c+d)\frac{e}{n}$ ist im zweiten Gliede eine dreifache Klammer: eine zwiefache Beziehungsklammer $b(c+d)$ und $(bc+bd)\frac{e}{n} = bc\frac{e}{n} + \frac{bde}{n}$ und eine Strichklammer $-(b(c+d)\frac{e}{n}$. Bei der mehrfachen Klammer muss stets erst die höhere Klammer (hier die Beziehungsklammer) und dann erst die niedere Klammer (hier die Strichklammer) gelöſ't werden. Wenn der Teiler oder Nenner zwei oder mehre Glieder enthält, ſo darf man dieſe Teilklammer nie auflöſen, ſondern muss stets mit dem ganzen Nenner teilen, oder muss jedes Glied der Gleichung mit dem Nenner vervielfachen und dadurch den Nenner fortschaffen, z. B. In $\frac{a}{b+c} = d+e$ darf man nicht durch b und durch c einzeln teilen. Will man den Nenner fortschaffen, ſo vervielfacht man jedes Glied mit $b+c$ und erhält dann $a = (d+e)(b+c)$. Reiche Uebungen bietet das Uebungsheft.

Der gewandte Rechner führt einen grosen Teil dieſer Umformungen im Kopfe aus und schreibt nur die Umformungen 1 oder 2, 3 oder 6 nieder, z. B.

$$(x+5):(x-5) = 7:4 \qquad (x+5)\,4 = (x-5)\,7$$
$$4x+20 = 7x-35 \qquad 3x = 55\,;\ x = 18^1/_3.$$

311. **Satz. Wenn die Aufgabe in einem Satze gegeben ist, ſo müssen zunächst die Worte in Formeln überſetzt werden; die erhaltene Gleichung heist der Anſatz. Die Gleichung wird dann gelöſ't, die Löſung und die Formel wieder in einen vollständigen Satz zurücküberſetzt, die Antwort.**

Beispiel. Ein Weg ſoll mit Bäumen bepflanzt werden, ſo dass dieſe 3 m aus einander stehen; hätte man 100 Bäume weniger, ſo könnte man ſie nur 4 m aus einander stellen; wieviel Bäume hatte man?

Anſatz: $(x-100)\,4\,m = x\cdot 3\,m$

Löſung: $x\cdot 4 - 400 = x\cdot 3 \qquad x = 400,$

Antwort: Man hatte 400 Bäume.

Die Anwendung dieſer Gleichungen ist für das praktische Leben und für jeden Fortschritt in der Mathematik von gröster Wichtigkeit. Hier ist eine reiche Uebung geboten. Des Verfassers Uebungsheft bietet hierfür durch 262 Aufgaben die reichste Gelegenheit. Im Auflöſungshefte findet man jederzeit den Anſatz und die Antwort.

3. Die Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

312. **Satz. Löſung der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.**

Die Gleichungen mit mehren Unbekannten löſ't man durch Einführung, durch Gleichſetzung oder Vervielfachung.

1. Löſung durch Einführung (Substitutionsmethode). Man löſ't die eine Gleichung in Bezug auf eine Unbekannte und führt den erhaltenen Wert in die andern Gleichungen ein.

2. Löſung durch Gleichſetzung (Gleichſetzungsmethode). Man löſ't zwei Gleichungen in Bezug auf dieſelbe Unbekannte und ſetzt die erhaltenen Werte einander gleich.

3. Löſung durch Vervielfachung (Multiplikationsmethode). Man vervielfacht jede der beiden Gleichungen mit dem Fache (dem Faktor), den die eine Unbekannte in der andern Gleichung hat, und zieht nun die eine Gleichung von der andern ab.

Die erste Löſungsart ist die allgemeinste, aber häufig auch wegen der Nenner ſehr unbequem; die dritte Lösungsart ist, wo ſie anwendbar ist, am bequemsten und daher vorzuziehen.

Beispiel a: Einführung $3^3/_4\,x = 36 - {}^3/_4\,y \quad 4^2/_3\,x = 2^2/_3\,y + 34$

$15\,x = 144 - 3\,y \qquad 14\,x = 8\,y + 102 \qquad x = 144 - 102 - 11\,y$

$x = 42 - 11\,y$ alſo $15\,(42 - 11\,y) = 144 - 3\,y\,;\ (165 - 3)\,y = 630 - 144$

$$y = \frac{486}{162} = 3 \qquad x = 42 - 11\,y = 9$$

Beispiel b: Gleichſetzung $\dfrac{4\,x + 81}{10\,y - 17} = 6 \qquad \dfrac{12\,x + 97}{15\,y - 17} = 4$

$4\,x + 81 = 6\,(10\,y - 17) = 60\,y - 102\,;\ 12\,x + 97 = 4\,(15\,y - 17) = 60\,y - 68$

$4\,x + 81 + 102 = 12\,x + 97 + 68\,;\quad 8\,x = 18\,;\ x = 2^1/_4$

$60\,y = 4\,x + 81 + 102 = 192 \qquad y = 3^1/_5.$

Beispiel c: Vervielfachung $2\,x - 3\,y = 35\,;\quad x + 2\,y = 9$

$2\,x + 4\,y = 18\,;\ 4\,y + 3\,y = 18 - 35\,;\ y = -\dfrac{17}{7} = -2^3/_7$

$x = 9 - 2\,y = 9 + 4^6/_7 = 13^6/_7.$

Es wird auch hier ſehr zweckmäsig ſein, wenn ſich die Gebildeten einige Uebung in der Löſung dieſer Aufgaben schaffen. Das Uebungsheft des Verfassers bietet hiezu reiche Gelegenheit.

4. Die Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten.

Satz: Löſung der Gleichung ersten Grades mit drei Unbekannten. Man entfernt zunächst eine Unbekannte aus 2 Gleichungspaaren und entfernt dann aus den erhaltenen beiden Gleichungen die zweite Unbekannte. 313.

Beispiel: $x + y + z = 15\,;\ x + y - z = 5\,;\ x - y + z = 1$

$2\,x + 2\,y = 20\,;\ 2\,x = 6\,;\ x = 3\,;\ y = 7\,;\ z = 5.$

Auch hier ist es ſehr zweckmäsig, wenn die Gebildeten ſich Uebung in der Löſung dieſer Aufgaben verschaffen. Das Uebungsheft des Verfassers bietet wieder zahlreiche Uebungen, ſowie zahlreiche (132) Aufgaben zur Anwendung dieſer Gleichungen auf das praktische Leben dar und kann zur Uebung im

Selbstunterrichte wie in Schulen empfohlen werden, da die Aufgaben ſo geordnet ſind, das jeder ſie löſen kann.

314. **Aufgabe. n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten aufzulöſen.**

Auflöſung. Aus n Gleichungen, welche n Unbekannte enthalten, kann man nach 312 eine Unbekannte entfernen und erhält n — 1 Gleichungen ohne dieſe Unbekannte. Ebenſo erhält man aus n — m Gleichungen mit n — m Unbekannten (d. h. aus denen bereits m Unbekannte entfernt ſind) andere n — m — 1 Gleichungen mit n — m — 1 Unbekannten (d. h. aus denen m + 1 Unbekannte entfernt ſind), und zuletzt n — (n — 1), d. h. 1 Gleichung mit einer Unbekannten, d. h. die Gleichung ist nach dieſer Unbekannten gelöſt. Tauscht man dann die entsprechenden Vorzahlen dieſer Unbekannten x_1 mit einer andern Unbekannten x_2, ſo erhält man die Löſung nach dieſer andern Unbekannten und ſo fort.

Die bequemste Art und Weiſe der Löſung von Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten werden wir in der Ausdehnungslehre kennen lernen, auf welche hier verwieſen werden kann.

Zweiter Abschnitt der Zahlenlehre: Die höhere Zahlenlehre oder die Lehre von den Höhen, den Tiefen und den Logen oder Logarithmen.

9. Höhen, Tiefen und Logen der Zahlen und Eigenschaften der Höhen, Tiefen und Loge.

A. Das Höhen der Zahlen.

Erklärung. Das Höhen (das Potenziren) heist die dritte oder höchste Ordnung der Grösenknüpfung, für welche das Gesetz der Doppelbeziehung zum Zufügen und zum Vervielfachen gilt, d. h. statt eine Gröse zur Summe von einer zweiten Gröse und einer Eins zu höhen, kann man die Gröse zur zweiten Gröse höhen und das Ergebniss mit der ersten Gröse vervielfachen. 315.

Eine Gröse zur Eins gehöht, wird der Gröse selbst gleich gesetzt.

Beispiele:

$$3^1 = 3 \;;\; 3^2 = 3^{1+1} = 3 \cdot 3 = 9 \;;\; 3^3 = 3^{2+1} = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27.$$

Für das Höhen empfiehlt es sich, diese Erklärung zunächst an einigen Beispielen klar zu machen, z. B.

$$8^{3+1} = 8^3 \cdot 8^1 = 8^3 \cdot 8 \qquad 2^{5+1} = 2^5 \cdot 2^1 = 2^5 \cdot 2$$

$$8^{1+1+1+1} = 8^1 \cdot 8^1 \cdot 8^1 \cdot 8^1 = 4096 \quad 2^{1+1+1+1+1+1} = 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 64$$

$$a^{m+1} = a^m \cdot a^1.$$

Es wird zweckmäsig sein dies bis zur vollsten Anschaulichkeit der Erklärung an dem „Eins hoch Eins" einzuüben z. B.

$$2^{1+1} = 2 \cdot 2 = 4 \;;\; 2^{2+1} = 2^2 \cdot 2 = 8 \;;\; 2^{3+1} = 2^3 \cdot 2 = 16 \;;\; 2^{4+1} = 2^4 \cdot 2 = 32$$

$$3^{1+1} = 3 \cdot 3 = 9 \;;\; 3^{2+1} = 3^2 \cdot 3 = 27 \;;\; 3^{3+1} = 3^3 \cdot 3 = 81 \;;\; 3^{4+1} = 3^4 \cdot 3 = 243$$

$$4^{1+1} = 4 \cdot 4 = 16 \;;\; 4^{2+1} = 4^2 \cdot 4 = 64 \;;\; 4^{3+1} = 4^3 \cdot 4 = 256 \;;\; 4^{4+1} = 4^4 \cdot 4 = 1024$$

Die Erklärung bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Die fo eben gegebene Erklärung ist die allein scharfe und streng wissenschaftliche und zugleich die einfachste (die elementarste). Aus ihr lässt fich das ganze Gefetz der Doppelbeziehung ableiten. Andrerfeits enthält diefe Erklärung aber auch nicht mehr, als unumgänglich nötig ist, um das Gefetz der Doppelbeziehung daraus ableiten zu können.

Endlich ist diefe Erklärung auch allein einfach (elementar). Wollen wir z. B. 9^5 ableiten, fo müssen wir zunächst $9^2 = 9^{1+1} = 9 \cdot 9 = 81$ ableiten, daraus $9^3 = 9^{2+1} = 81 \cdot 9 = 729$; dann $9^4 = 9^{3+1} = 729 \cdot 9 = 6561$ endlich $9^5 = 9^{4+1} = 6561 \cdot 9 = 59049$. Die Erklärung ist alfo ganz einfach oder elementar.

Der Name „das Höhen" entspricht ganz der Bezeichnung diefer Grösenknüpfung a^n gelefen a hoch n, und bezeichnet höchst passend die Art diefer Knüpfung, der höchsten in der Zahlenlehre, wie unter den möglichen Arten der Denk-Knüpfungen überhaupt.

316. **Erklärung. Das Zeichen des Höhens ist das Hochschreiben der Gröse, welche die andere höht, z. B. a^m gelefen a hoch m.**

Die niedrig stehende Gröse, welche gehöht werden foll, heist die Bafe, die hochstehende, welche höht, heist die Stufe oder der Exponent, das Ergebniss der Beziehung heist die Höhe oder die Potenz.

Wenn keine Klammer steht, fo wird die gefammte Stufe nur auf die nächst vorher stehende Gröse der Bafe bezogen.

Beispiele: Ohne Klammer:

$$a + b^c = a + (b^c) \qquad ab^m = a(b^m) \qquad b^m \cdot a = (b^m)a$$

$$a^{m+n} = a^{(m+n)} \qquad a^{mn} = a^{(mn)} \qquad a^{b^c} = \left(a^b\right)^c$$

Die Namen „die Bafe," „die Stufe" und die „Höhe" find bereits allgemein eingeführt und entsprechen der Sache. Da jedoch diefe deutschen Ausdrücke noch einigen Gelehrten weniger geläufig find, fo führe ich neben den deutschen Ausdrücken auch jeden Satz in den üblichen Fremdwörtern auf.

Auch beim Höhen oder Potenziren ist es wieder höchst wichtig, fich darüber klar zu werden, welche Klammern ohne Aenderung des Wertes weggelassen werden können. In jeder einfachen Knüpfungsart können die Klammern fortgelassen werden, wenn fortschreitend geknüpft werden foll: fo ist

$$a^{(b+c)+d} = a^{b+c+d}, \text{ fo ist } \left(a^b\right)^c = a^{b^c}.$$

Wenn dagegen zwei oder mehr Knüpfungsarten gemengt find, fo muss jedesmal zunächst die höhere Knüpfung ausgeführt werden, ehe die niedere Knüpfung ausgeführt wird, doch gilt dabei die Knüpfung in der Stufe oder im Exponenten höher als in der Bafe. So ist $a + bc + cd^e = a + (bc) + [c(d^e)]$, fo ist $bc^e = b(c^e)$ und $b^e c = (b^e)c$, fo ist $a^{b+c} = a^{(b+c)}$ und $a^{bc} = a^{(bc)}$. Es ist wichtig, dass man fich hierin übe.

317. **Erklärung. Die Klammer heist eine Bafenklammer, wenn fie in der Bafe steht; fie heist eine Stufenklammer, wenn fie in der Stufe steht.**

Beispiele: Baſenklammer: $(3.5)^2$; $(3+5)^3$; $(a \cdot b)^n$; $(a+b)^m$.

Stufenklammer: $a^{(m+n)c}$; $a^{(b^2d)}$; $a^{(c^d)}$.

Grundformeln des Höhens (des Potenzirens). 318.

$$a^{b+1} = a^b \cdot a \qquad a^1 = a \qquad 1^1 = 1$$

Statt zu der Stufe eine Eins zu fügen, kann man die Höhe der Baſe zur Stufe mit der Baſe vervielfachen.

Statt zu dem Exponenten eine Eins zu addiren, kann man die Potenz der Baſe zum Exponenten mit der Baſe multipliziren.

Eine Zahl mit Eins höhen (potenziren) ändert die Gröse nicht. Eins ist diejenige Gröse, welche mit ſich ſelbst gehöht (potenzirt) ſich nicht ändert.

Man kann aus dieſer Grundformel das Eins hoch Eins ableiten. Die umstehende Tafel ist hienach berechnet, ſie giebt die neun ersten Höhen der Zahlen 1 bis 50.

Satz. $a^0 = 1$, **wenn** $a \gtrless 0$ **ist.** 319.

Jede Zahl ungleich Null giebt mit Null gehöht eins.

Beweis: Es ist $a = a^1 = a^{0+1}$ (nach 318 und 134)

$= a^0 \cdot a$ (nach 318)

Alſo ist a^0 eine Gröse, welche mit jeder beliebigen Zahl vervielfacht dieſelbe nicht ändert, d. h. es ist $a^0 = 1$ nach 98.

Satz. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, **wo c eine ganze Zahl.** 320.

Statt in der Stufe zu einer Zahl eine ganze Zahl zu fügen, kann man die Baſe zu den einzelnen Zahlen der Stufe höhen und die beiden Höhen mit einander vervielfachen und Zwei Höhen gleicher Baſe vervielfacht man, indem man bei derſelben Baſe die Stufen fügt.

Statt in dem Exponenten zu einer Zahl eine ganze Zahl zu addiren, kann man die Baſe zu den einzelnen Zahlen des Exponenten höhen und die beiden Potenzen mit einander multipliziren und Zwei Potenzen gleicher Baſe multiplizirt man, indem man bei derſelben Baſe die Exponenten addirt.

Beweis: Einfach oder elementar in Bezug auf c.

1. Der Satz gilt, wenn $c = 1$ ist nach 318.

2. Wenn der Satz für eine beliebige ganze Zahl c gilt (Annahme), ſo gilt er auch für die Zahl $c + 1$; denn es ist

$a^{b+(c+1)} = a^{(b+c+1)}$ (nach 131)

$= a^{b+c} \cdot a$ (nach 318)

$= a^b \cdot a^c \cdot a$ (nach Annahme)

Zu No. 318: Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 50.

1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000
11	121	1331	14641	161051	1771561
12	144	1728	20736	248832	2985984
13	169	2197	28561	371293	4826809
14	196	2744	38416	537824	7529536
15	225	3375	50625	759375	11390625
16	256	4096	65536	1048576	16777216
17	289	4913	83521	1419857	24137569
18	324	5832	104976	1889568	34012224
19	361	6859	130321	2476099	47045881
20	400	8000	160000	3200000	64000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121
22	484	10648	234256	5153632	113379904
23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	576	13824	331776	7962624	191102976
25	625	15625	390625	9765625	244140625
26	676	17576	456976	11881376	308915776
27	729	19683	531441	14348907	387420489
28	784	21952	614656	17210368	481890304
29	841	24389	707281	20511149	594823321
30	900	27000	810000	24300000	729000000
31	961	29791	923521	28629151	887503681
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336
37	1369	50653	1874161	69343957	2565726409
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049
44	1936	85184	3748096	164916224	7256313856
45	2025	91125	4100625	184528125	8303765625
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896
47	2209	103823	4879681	229345007	10779215329
48	2304	110592	5308416	254803968	12230590464
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000

Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 50.

1	7	8	9
1	1	1	1
2	128	256	512
3	2187	6561	19683
4	16384	65536	262144
5	78125	390625	1953125
6	279936	1679616	10077696
7	823543	5764801	40353607
8	2097152	16777216	134217728
9	4782969	43046721	387420489
10	10000000	100000000	1000000000
11	19487171	214358881	2357947691
12	35831808	429981696	5159780352
13	62748517	815730721	10604499373
14	105413504	1475789056	20661046784
15	170859375	2562890625	38443359375
16	268435456	4294967296	68719476736
17	410338673	6975757441	118587876497
18	612220032	11019960576	198359290368
19	893871739	16983563041	322687697779
20	1280000000	25600000000	512000000000
21	1801088541	37822859361	794280046581
22	2494357888	54875873536	1207269217792
23	3404825447	78310985281	1801152661463
24	4586471424	110075314176	2641807540224
25	6103515625	152587890625	3814697265625
26	8031810176	208827064576	5429503678976
27	10460353203	282429536481	7625597484987
28	13492928512	377801998336	10578455953408
29	17249876309	500246412961	14507145975869
30	21870000000	656100000000	19683000000000
31	27512614111	852891037441	26439622160671
32	34359738368	1099511627776	35184372088832
33	42618442977	1406408618241	46411484401953
34	52523350144	1785793904896	60716992766464
35	64339296875	2251875390625	78815638671875
36	78364164096	2821109907456	101559956668416
37	94931877133	3512479453921	129961739795077
38	114415582592	4347792138496	165216101262848
39	137231006679	5352009260481	208728361158759
40	163840000000	6553600000000	262144000000000
41	194754273881	7984925229121	327381934393961
42	230539333248	9682651996416	406671383849472
43	271818611107	11688200277601	502592611936843
44	319277809664	14048223625216	618121839509504
45	373669453125	16815125390625	756680642578125
46	435817657216	20047612231936	922190162669056
47	506623120463	23811286661761	1119130473102767
48	587068342272	28179280429056	1352605460594688
49	678223072849	33232930569601	1628413597910449
50	781250000000	39062500000000	1953125000000000

$$= a^b \cdot (a^c \cdot a) \qquad \text{(nach 180)}$$
$$= a^b \cdot a^{c+1} \qquad \text{(nach 318).}$$

321. 3. Alſo gilt der Satz nach 24 allgemein.

Beziehungsgeſetz des Höhens (des Potenzirens)

$$a^{\overset{}{\underset{1,n}{S}} b_{\mathfrak{b}}} = \underset{1,n}{P} a^{b_{\mathfrak{b}}} \qquad \text{oder} \quad a^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a^{b_1} \cdot a^{b_2} \cdots\cdot a^{b_n}$$

In jeder Zahlenknüpfung durch Höhen kann man in der Stufe (im Exponenten) die Summe von ganzen Zahlen auflöſen

indem man die Baſe zu den einzelnen Stücken der Stufe höht und die Höhen vervielfacht.

indem man die Baſe mit den Stücken des Exponenten einzeln potenzirt und die Potenzen multiplizirt.

Die Höhe oder Potenz ist wieder eine Zahl.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 2$ nach 320.

2. Wenn der Satz für n gilt, ſo gilt er auch für $n + 1$; denn

$$a^{\underset{1,n+1}{S} b_{\mathfrak{b}}} = a^{\left(\underset{1,n}{S} b_{\mathfrak{b}}\right) + b_{n+1}} \qquad \text{(nach 14)}$$
$$= a^{\underset{1,n}{S} b_{\mathfrak{b}}} \cdot a^{b_{n+1}} \qquad \text{(nach 320)}$$
$$= \underset{1,n}{P} a^{b_{\mathfrak{b}}} \cdot a^{b_{n+1}} \qquad \text{(nach Annahme).}$$
$$= \underset{1,n+1}{P} a^{b_{\mathfrak{b}}} \qquad \text{(nach 14)}$$

3. Alſo gilt der Satz nach 23 allgemein.

322. **Satz.** $a^1 = a$ $1^a = 1$

Die Eins in der Stufe (im Exponenten) ist die nicht ändernde Gröſe des Höhens und die Eins in der Baſe ist die unveränderliche Gröſe des Höhens.

Beweis: Es ist $a^1 = a$ nach 318; es ist aber auch nach 321 $1^a = 1^1 \cdot 1^1 \cdot 1^1 \cdot 1^1 \cdot 1^1 \cdots 1^1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$ (nach 97).

323. **Satz.** $(ab)^c = a^c \cdot b^c$, **wo c eine ganze Zahl.**

Das Zeug zweier Zahlen erhöht man mit einer ganzen Zahl, indem man die beiden Zahlen einzeln zu der Stufe erhöht und die Höhen vervielfacht.

das Produkt zweier Zahlen potenzirt man mit einer ganzen Zahl, indem man die Faktoren einzeln mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplizirt.

Beweis: Einfach oder elementar in Bezug auf c.

1. Der Satz gilt, wenn c = 1 ist; denn

$(ab)^1 = ab = a^1 \cdot b^1$ (nach 318)

2. Wenn der Satz für eine beliebige ganze Zahl c gilt (Annahme), ſo gilt er auch für die Zahl c + 1 (Folgerung); denn

$(ab)^{c+1} = (ab)^c \cdot ab$ (nach 318)

$= a^c \cdot b^c \cdot ab$ (nach Annahme)

$= (a^c \cdot a)(b^c \cdot b)$ (nach 180)

$= a^{c+1} \cdot b^{c+1}$ (nach 318).

3. Alſo gilt der Satz nach 24 allgemein.

Satz. $a^{bc} = (a^b)^c$ 324.

Eine Zahl höht man zu dem Zeuge zweier ganzen Zahlen, indem man die Baſe zu den Zahlen der Stufe fortschreitend höht.

Eine Zahl potenzirt man mit dem Produkte zweier ganzen Zahlen, indem man die Baſe mit den Zahlen des Exponenten fortschreitend potenzirt.

Beweis: Einfach oder elementar in Bezug auf c.

1. Der Satz gilt, wenn c = 1 ist; denn $a^{b \cdot 1} = a^b = (a^b)^1$ (nach 318).

2. Wenn der Satz für eine beliebige ganze Zahl c gilt (Annahme), ſo gilt er auch für die Zahl c + 1 (Folgerung); denn

$(a^b)^{c+1} = (a^b)^c \cdot a^b$ (nach 318)

$= a^{bc} \cdot a^b$ (nach Annahme)

$= a^{bc+b}$ (nach 320)

$= a^{b(c+1)}$ (nach 156)

3. Alſo gilt der Satz nach 24 allgemein.

Satz. $(a^b)^c = (a^c)^b$. 325.

Die Ordnung in welcher man fortschreitend erhöht oder potenzirt, kann man ohne Aenderung des Wertes beliebig ändern.

Beweis: $(a^b)^c = a^{bc}$ (nach 324)

$= a^{cb}$ (nach 180)

$= (a^c)^b$ (nach 324).

Geſetz der Zahlenhöhung (der Potenzirung von Zahlen.) 326.

Wenn in der Stufe (im Exponenten) nur ganze Zahlen vorkommen, ſo kann man in jeder Zahlenknüpfung durch Höhen

erstens jedes Baſenzeug auflöſen, indem man die Fache der Baſe zu der Stufe höht und die Höhen vervielfacht,

erstens das Baſenprodukt auflöſen, indem man die Faktoren mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multiplizirt.

zweitens jede Stufensumme auflösen, indem man die Base zu jedem Stücke der Stufe höht und die Höhen vervielfacht und

drittens jedes Stufenzeug auflösen, indem man die Base fortschreitend zu den Fachen der Stufe höht.

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend höht, ist beliebig. Die Höhe ist wieder eine Zahl.

zweitens die Exponentensumme auflösen, indem man die Base mit den Stücken potenzirt und die Potenzen multiplizirt, und

drittens das Exponentenprodukt auflösen, indem man die Base fortschreitend mit den Faktoren potenzirt.

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend potenzirt, ist beliebig. Die Potenz ist wieder eine Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus 323, 320, 324 und 325.

327. **Satz.** $a^n \overset{*}{=} \overset{P}{_{1,n}} a$ * n eine ganze Pluszahl

Wenn die Stufe eine ganze Pluszahl n ist, so ist die Höhe ein Zeug, dessen n Fache der Base gleich sind.

Wenn der Exponent eine ganze positive Zahl n ist, so ist die Potenz ein Produkt, dessen n Faktoren der Base gleich sind.

Beweis: Unmittelbar aus 326.

328. **Satz.** $0^n = 0$ * n eine ganze Pluszahl.

Null, zu jeder ganzen Pluszahl erhöht, giebt wieder Null.

Null, mit jeder ganzen positiven Zahl potenzirt, giebt wieder Null.

Beweis: Unmittelbar aus 327 und 174.

329. **Satz.** $1^n \overset{*}{=} 1$; $(-1)^{2n} = 1$; $(-1)^{2n+1} \overset{*}{=} -1$

* n eine ganze Pluszahl.

Jede Höhe von Pluseins zur ganzen Stufe ist wieder Pluseins; jede Höhe von Stricheins zur geraden Stufe ist Pluseins, zur ungeraden Stufe ist Stricheins.

Jede Potenz von $+1$ mit ganzem Exponenten ist wieder $+1$; jede Potenz von -1 mit geradem Exponenten ist $+1$, mit ungeradem Exponenten ist -1.

Beweis: Unmittelbar aus 322 und 180.

330. **Satz.** $(+a)^n \overset{*}{=} +(a^n)$; $(-a)^{2n} \overset{*}{=} +(a^{2n})$; $(-a)^{2n+1} \overset{*}{=} -(a^{2n+1})$

* n eine ganze Pluszahl.

Jede Höhe einer Pluszahl zur ganzen Stufe ist wieder eine Pluszahl.

Jede Potenz einer positiven Zahl mit ganzem Exponenten ist eine positive Zahl.

Jede Höhe einer Strichzahl zur geraden Stufe ist eine Pluszahl, zur ungeraden Stufe eine Strichzahl.

Jede Potenz einer negativen Zahl mit geradem Exponenten ist eine positive Zahl, mit ungeradem Exponenten eine negative Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus 158, 326, und 329.

Beispiele: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $3^3 = 27$; $3^5 = 243$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$; $(-3)^3 = (-3)^2 \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$

$(-3)^5 = (-3)^{4+1} = (-3)^4 \cdot (-3)^1 = 81 \cdot (-3) = -243$.

Satz. Höhen (Potenzen) von entgegengesetzter Base zu gleicher Stufe sind einander gleich, wenn die Stufe gerade, entgegengesetzt wenn sie ungerade ist. 331.

Beweis: Unmittelbar aus 330.

Beispiele: $3^4 = (-3)^4$; $3^5 = -(-3)^5$.

Satz. $a^{-n} \overset{*}{=} \frac{1}{a^n}$; $a^n \overset{*}{=} \frac{1}{a^{-n}}$, * $a \gtrless 0$, **n eine ganze Zahl.** 332.

Wenn die Base ungleich Null und die Stufe eine ganze Zahl ist, so sind die Höhen oder Potenzen zur entgegengesetzten Stufe die umgekehrten Werte von einander.

Beweis: $a^{-n} = \frac{a^{-n} \cdot a^n}{a^n}$ (nach 167)

$= \frac{a^{-n+n}}{a^n}$ (nach 320)

$= \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ (nach 319)

2. Ebenso folgt $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Beispiele: $9^{-3} = {}^1/_{9^3} = {}^1/_{729}$; $10^{-4} = {}^1/_{10^4} = {}^1/_{10000}$.

Satz. Eine Zahl vervielfacht man bez. teilt man durch 10^n, wo n eine ganze Pluszahl ist, indem man das Komma um n Stellen nach rechts, bez. nach links rückt, und 333.

Statt das Komma um n Stellen nach rechts bez. nach links zu rücken, kann man die Zahl mit 10^n vervielfachen bez. durch 10^n teilen.

Beweis: Unmittelbar aus 193 und 194.

Satz. $a^{b-c} \overset{*}{=} \frac{a^b}{a^c}$ * $a \gtrless 0$, **b und c ganze Zahlen.**

Wenn die Base ungleich Null und die Zahlen in der Stufe ganze Zahlen sind, so kann man, statt mit einem Unterschiede zu erhöhen, auch mit den Gliedern einzeln erhöhen und die Höhen entsprechend teilen und

kann man, statt Höhen von gleicher Base zu teilen, auch die Stufen entsprechend abziehen.

Beweis: $a^{b-c} = a^{b-c} \cdot a^c : a^c$ (nach 167)

$= a^{b-c+c} : a^c$ (nach 320)

$= a^b : a^c$ (nach 129).

Beispiele: $7^{5-3} = 7^2 = 49 = 7^5 : 7^3 = 16807 : 343$.

335. **Satz.** $\left(\frac{a}{b}\right)^c \overset{*}{=} \frac{a^c}{b^c}$ * $b \gtrless 0$, c eine ganze Pluszahl.

Einen Bruch erhöht man zu einer Zahl, indem man Zähler und Nenner einzeln erhöht, und

Statt Zähler und Nenner eines Bruches einzeln zu erhöhen, kann man den ganzen Bruch erhöhen.

Beweis: $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c : b^c$ (nach 167)

$= \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c : b^c$ (nach 323)

$= a^c : b^c$ (nach 167).

Beispiel: $(3/4)^3 = 3^3 : 4^3$.

336. **Satz.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} \overset{*}{=} \left(\frac{b}{a}\right)^c$ * a und $b \gtrless 0$, c eine ganze Zahl.

Einen Bruch erhöht man zu einer Strichzahl, indem man den Bruch umkehrt und zu der entsprechenden Pluszahl erhöht.

Beweis: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^c$ (nach 332)

$= 1 : \frac{a^c}{b^c}$ (nach 335)

$= \frac{b^c}{a^c}$ (nach 181)

$= \left(\frac{b}{a}\right)^c$ (nach 335)

Beispiel: $(3/4)^{-3} = (4/3)^3$.

337. **Satz. Jeder echte Plusbruch giebt, zu einer ganzen Pluszahl erhöht, einen echten Bruch, zu einer ganzen Strichzahl erhöht, eine Höhe gröser als Eins, und**	**Jeder positive echte Bruch giebt, mit einer ganzen positiven Zahl potenzirt, einen echten Bruch, mit einer ganzen negativen potenzirt, eine Potenz gröser als 1, und**
Jede Zahl gröser als Eins giebt, zu einer ganzen Pluszahl erhöht	**Jede Zahl gröser als 1 giebt, mit einer ganzen positiven Zahl**

eine Höhe gröser als Eins, zu einer ganzen Strichzahl erhöht, einen echten Bruch. **potenzirt, eine Potenz gröser als 1, mit einer ganzen negativen potenzirt, einen echten Bruch.**

Beweis: 1. Wenn die Stufe eine Pluszahl ist, so folgt der Satz unmittelbar aus 207.

2. Wenn dagegen die Stufe eine Strichzahl ist, so sei b > a und beide Zahlen Pluszahlen, dann ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, nach 205, dagegen $\frac{b}{a}$ gröser als eins; denn ist $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$ eine Pluszahl, da b — a eine Pluszahl, nach 142 und a desgleichen, also b : a gröser als 1 nach 142. Nun ist aber $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ nach 336, mithin giebt ein echter Plusbruch, mit einer Strichzahl erhöht, dasselbe, was eine Zahl gröser als 1, mit einer Pluszahl erhöht, d. h. nach 337,1 eine Zahl gröser als 1. Ebenso ist nach 336 $\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$, mithin giebt eine Zahl gröser als 1, mit einer Strichzahl erhöht, dasselbe was ein echter Bruch giebt, mit einer Pluszahl erhöht, d. h. nach 337,1 einen echten Bruch.

Satz. Wenn eine Pluszahl a zu einer beliebigen ganzen Zahl ungleich Null erhöht, Eins geben soll, so muss sie Eins sein. 338.

Beweis: Trennend (indirekt). Jede Pluszahl ist nach 143 entweder gleich Eins oder gröser oder kleiner als 1.

Angenommen nun, a sei gröser als Eins, oder es sei kleiner als Eins, d. h. ein echter Bruch nach 196, so ist, da die Stufe ungleich Null ist, die Stufe nach 139 entweder eine Pluszahl oder eine Strichzahl, d. h. die Höhe nach 330 entweder gröser als 1 oder kleiner als 1, d. h. jedenfalls nicht gleich Eins. Die Pluszahl darf also weder gröser noch kleiner als 1 sein, d. h. sie ist gleich Eins (nach 143).

Satz. Wenn eine Pluszahl ungleich eins, zu einer ganzen Zahl b erhöht, Eins giebt, so ist die letztere Null. 339.

Beweis: Trennend (indirekt). Jede Zahl b ist nach 140 entweder Null oder eine Plus- oder eine Strichzahl. Angenommen nun, die Stufe b sei eine Pluszahl, oder sei eine Strichzahl, so ist, da die Base ungleich 1 ist, die Base nach 143 entweder gröser als 1, oder kleiner als 1, mithin auch nach 337 die Höhe, welche man erhält, wenn man die Base mit einer Pluszahl oder mit einer Strichzahl er-

höht, entweder gröser oder kleiner als 1, d. h. jedenfalls nicht gleich Eins. Die Stufe oder der Exponent darf alſo weder eine Pluszahl, noch eine Strichzahl ſein, ſie muss alſo (nach 140) Null ſein. Ist aber $b = 0$, ſo ist, was auch a für eine Gröse ſei, $a^b = a^0 = 1$ (nach 319).

340. **Satz. Zwei Pluszahlen a und b, welche, zu derſelben ganzen Zahl c ungleich Null erhöht, dieſelbe Höhe oder Potenz geben, ſind einander gleich, und**

Zwei ganze Zahlen c und d, zu welchen dieſelbe Pluszahl a ungleich Eins erhöht, dieſelbe Höhe geben, ſind auch einander gleich.

Beweis: 1. Es ſei $a^c = b^c$ und a und b Pluszahlen und $c \gtrless 0$,

ſo ist $1 = \frac{b^c}{b^c} = \frac{a^c}{b^c}$ (nach 173)

$= \left(\frac{a}{b}\right)^c$ (nach 335)

mithin ist, da $c \gtrless 0$ ist, $\frac{a}{b} = 1$, nach 338, d. h. $a = b$, nach 173.

2. Es ſei $a^c = a^d$ und a eine Pluszahl ungleich Eins, ſo ist

$1 = \frac{a^c}{a^c} = \frac{a^c}{a^d}$ (nach 173)

$= a^{c-d}$ (nach 334)

mithin, da $a \gtrless 1$ ist, ſo ist nach 339 $c - d = 0$, d. h. $c = d$ (nach 135).

B. Das Tiefen oder das Radiziren der Zahlen.

341. **Erklärung. Das Tiefen, das Radiziren der Zahlen heist die dem Höhen der Zahlen entsprechende Trennung, wo die Höhe (die Potenz) $b = a^c$ und die Stufe (der Exponent) c gegeben ist und die Baſe a geſucht wird. Die Stufe c muss beim Tiefen stets eine ganze Zahl ungleich Null ſein.**

Die Höhe oder Potenz b, welche getieft werden ſoll, heist die zu tiefende Gröse (der radicandus), die tiefende Gröse c heist die Senke (der radicator), das Ergebniss des Tiefens heist die Tiefe (die radix) a.

342. **Erklärung. Das Zeichen des Tiefens ist eine Bruchheinheit in der Stufe, z. B. $a^{\frac{1}{n}}$ geleſen „a zur ein ntel" oder „a tief n". Die Zeichen „hoch" und „tief" heisen gemeinſam steigende Zeichen.**

In den mathematischen Werken wird die Tiefe gewöhnlich die Wurzel genannt, aber mit dieſen Wurzeln ganz unwissenschaftlich verfahren. Es wird

nämlich in den mathematischen Werken $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2}$ gefetzt, und dabei gleichzeitig gewöhnlich gelehrt, dass es von a^2 zwei Wurzeln gebe, $+a$ und $-a$; darnach fetzen diefe Werke alfo, da fie die beiden Wurzeln nicht unterscheiden $+a = -a$; denn $+a = \sqrt{a^2}$ und $-a = \sqrt{a^2}$, alfo $+a = \sqrt{a^2} = -a$, das aber ist jedenfalls unwissenschaftlich. Da es nun für $\sqrt[n]{a}$ n verschiedene Werte giebt, fo ist $\sqrt[n]{a}$ eine n wertige Gröse, mit welcher man nicht rechnen darf. Ich unterscheide alfo die Tiefe $a^{\frac{1}{n}}$ als einwertige Gröse von $\sqrt[n]{a}$ als n wertiger Gröse.

Sollen zwei mehrwertige Grösen einander gleich gefetzt werden, fo muss man dafür ein befonderes Zeichen einführen. Ich wähle dafür das Zeichen $\cong$, gelefen „entsprechend gleich" und fetze alfo $\sqrt[n]{a} \cong \sqrt[n]{a}$, d. h. die nte Wurzel aus a ist der nten Wurzel aus a gleich, wenn man auf beiden Seiten die entsprechenden Werte einführt.

Grundformel des Tiefens (des Radizirens). 343.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

Mit einer ganzen Zahl fortschreitend tiefen und höhen (radiziren und potenziren) ändert nichts.

Beispiel: $(27^{1/3})^3 = 3^3 = 27$.

Satz. $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a.$ 344.

Mit einer ganzen Zahl fortschreitend höhen und tiefen (potenziren und radiziren) ändert nichts.

Beweis: $\left[(a^n)^{\frac{1}{n}}\right]^n = a^n$ (nach 343)

mithin, da a und $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ Pluszahlen und n eine ganze Zahl ist, fo ist

$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a$ (nach 340).

Satz. $1^{\frac{1}{n}} = 1.$ 345.

Die nte Tiefe aus Eins ist wieder 1.

Beweis: $1^{\frac{1}{n}} = (1^n)^{\frac{1}{n}}$ (nach 329)

$= 1$ (nach 344).

Gefetz des Tiefens. Für die Tiefe oder Radix gelten alle Gefetze der Erhöhung. 346.

Beweis: Da die Tiefe $a^{\frac{1}{n}}$ nur einen Wert hat (wenn a nur

einen Wert hat) und alſo eine Zahlgröse ist, ſo folgt es unmittelbar aus 326 für die Tiefe, wie für jede andere Zahlgröse.

347. **Satz.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$.

Einen Bruch tieft (radizirt) man, indem man Zähler und Nenner tieft.

Beweis: Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n}{\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 343)

$= \left(\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 346 und 335)

$= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ (nach 344)

Beispiele: $\left(\frac{27}{64}\right)^{1/3} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}$.

348. **Satz.** $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Zu einem Bruche erhöht man, indem man die Baſe fortschreitend zu dem Zähler und Nenner oder fortschreitend zu dem Nenner und Zähler erhöht.

Beweis: 1. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = \left(\left(a^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 344)

$= a^{\left(\frac{m}{n}\cdot n\right)^{\frac{1}{n}}}$ (nach 324)

$= (a^m)^{\frac{1}{n}}$ (nach 167)

2. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = a^{\left(\frac{1}{n}\cdot m\right)}$ (nach 177)

$= \left(\left(a^{\left(\frac{1}{n}\cdot m\right)}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m$ (nach 343)

$= \left(a^{\left(\frac{1}{n}\cdot m\cdot\frac{1}{m}\right)}\right)^m$ (nach 348,₁)

$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ (nach 177,167).

Beispiele: $8^{\frac{5}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32.$

Satz. $a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$; $a^{\frac{1}{m:n}} = a^{\frac{n}{m}}$. 349.

Zu dem Zeuge oder Produkte zweier Zahlen tieft (radizirt) man, indem man die Baſe erst zu dem einen Fache und dann zum andern Fache tieft und zu einem Bruche tieft (radizirt) man, indem man die Baſe zu dem umgekehrten Bruche erhöht.

Beweis: 1. $a^{\frac{1}{mn}} = \left(\left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 344)

$= \left(a^{\frac{1}{mn}\cdot n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 324)

$= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 167)

2. $a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$ (nach 349,1)

3. $a^{\frac{1}{m:n}} = a^{\left(\frac{1}{m:n}\right)} = a^{\left(\frac{n}{m}\right)}$ (nach 181)

$= a^{\frac{n}{m}}$

C. Das Logen oder das Logarithmiren der Zahlen.

Erklärung. Das Logen, das Logarithmiren der Zahlen heist die dem Höhen der Zahlen entsprechende Trennung, wo die Höhe (die Potenz) $b = a^c$ und die Baſe a gegeben ist und die Stufe c geſucht wird. 350.

Die Baſe a muss beim Logen stets ungleich Eins ſein.

Die Höhe oder Potenz b, welche gelogt werden ſoll, heist die zu logende Gröse oder die Loghöhe (die potentia logarithmi), die logende Gröse a heist die Logbaſe (die baſis logarithmi), das Ergebniss des Logens c heist der Log (der Logarithmus).

Erklärung. Das Zeichen des Logens ist $\frac{b}{=}{a}$ (geleſen b gelogt nach a, kurz b nach a) oder $\log_a b$ (geleſen log b nach a). Die Zeichen „hoch" und „log nach" heisen gemeinſame Logzeichen. 351.

Das Zeichen log bezieht ſich auf alle folgenden Grösen desſelben Gliedes.

352. **Grundformel des Logens (des Logarithmirens).**

Satz. $c = \frac{a^c}{a}$

Der Log einer Höhe der Base ist gleich der Stufe dieser Höhe.

Der Logarithmus einer Potenz der Logarithmen-Base ist gleich dem Exponenten dieser Potenz.

Beweis: Unmittelbar nach 350.

Beispiel: $\frac{10^3}{10} = 3$, $\frac{10^5}{10}$ 6.

353. **Satz.** $\frac{1}{a} = 0.$

Der Log (der Logarithmus) von Eins ist Null.

Beweis: Es ist $1 = a^0$ (nach 319)

mithin ist $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a} = 0$ (nach 352)

Beispiel: $\frac{1}{10} = \frac{10^0}{10} = 0.$

354. **Satz.** $\frac{a}{a} = 1.$

Der Log (der Logarithmus) der Base ist Eins.

Beweis: Nach 322 ist $a = a^1$, mithin $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a} = 1$ (nach 352)

Beispiel: $\frac{10}{10} = 1$; $\frac{10^1}{10} = 1.$

355. **Satz.** $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ **oder** $\log ab = \log a + \log b.$

Der Log eines Zeuges ist die Summe aus den Logen der Fache, und die Summe zweier Loge ist gleich dem Loge des Zeuges ihrer Zahlen.

Der Logarithmus eines Produktes ist die Summe aus den Logarithmen der Fache, und die Summe zweier Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Produkts ihrer Numeri.

Beweis: Es sei $a = c^a$ und $b = c^b$, so ist

$$\frac{ab}{c} = \frac{c^a c^b}{c} = \frac{c^{a+b}}{c} \qquad \text{(nach 320)}$$

$$= a + b \qquad \text{(nach 352)}$$

$$= \frac{c^a}{c} + \frac{c^b}{c} \qquad \text{(nach 352)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Beispiele: $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10} = \frac{10^{3+2}}{10} = 3 + 2 = \frac{10^3}{10} + \frac{10^2}{10}$.

Satz. $\frac{a:b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ oder $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$. 356.

Den Log (den Logarithmus) eines Bruches erhält man, indem man den Log des Nenners von dem des Zählers abzieht, oder
Der Unterschied zweier Loge (Logarithmen) ist gleich dem Loge eines Bruches, dessen Zähler die erste, und dessen Nenner die zweite Loghöhe (die potentia logarithmi) ist.

Beweis: Es ist $\frac{a:b}{c} = \frac{a:b}{c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{c}$ (nach 129)

$= \frac{(a:b) \cdot b}{c} - \frac{b}{c}$ (nach 355)

$= \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ (nach 167)

Beispiele: $\frac{10^5 : 10^3}{10} = \frac{10^{5-2}}{10} = 5 - 2 = \frac{10^5}{10} - \frac{10^2}{10}$.

Satz. $\frac{a^b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}$ oder $\log a^b = b \cdot \log a$. 357.

Der Log einei Höhe oder Potenz ist gleich der Stufe der Höhe mal dem Loge der Base.

Beweis: Es sei $a = c^\alpha$, so ist $\alpha = \frac{c^\alpha}{c}$; (nach 352)

mithin $\frac{a^b}{c} = \frac{(c^\alpha)^b}{c} = \frac{c^{(b\alpha)}}{c}$ (nach 324)

$= b\alpha$ (nach 352)

$= b \cdot \frac{c^\alpha}{c} = b \cdot \frac{a}{c}$.

Beispiel: $\frac{(10^5)^3}{10} = \frac{10^{5 \cdot 3}}{10} = 5 \cdot 3 = 3 \cdot \frac{10^5}{10}$.

Satz. $\frac{a^{\frac{1}{b}}}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}$. oder $\log a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \log a$. 358.

Der Log einer Tiefe (Radix) ist gleich dem Loge der Tiefzahl (des Radicand), geteilt durch die Senke (den Radicator).

Beweis: Unmtttelbar aus 357.

Beispiel: $\frac{(10^6)^{1/3}}{10} = \frac{10^{6 \cdot 1/3}}{10} = 6 \cdot 1/3 = 1/3 \, \frac{10^6}{10}$.

359. **Gesetz des Logens.** **Statt eine Zahl mit mehren Zahlen zu vervielfachen, kann man die Loge derselben nach derselben Base zufügen und statt eine Zahl durch mehre Zahlen zu teilen, kann man die Loge der Nenner von dem Loge des Zählers abziehen, und schliesslich zu dem Loge die Loghöhe suchen und Statt eine Zahl zur cten Höhe zu erhöhen, kann man den Log der Zahl mit c vervielfachen und statt eine Gröse zur cten Tiefe zu vertiefen, kann man den Log der Tiefe durch c teilen und schliesslich zu dem Loge die Gröse suchen oder**

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

$$\log \frac{a}{bc} = \log a - \log b - c$$

$$\log a^{c} = c \cdot \log a \quad ; \quad \log a^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \log a.$$

Beweis: Unmittelbar aus 355, 356, 357 und 358.

Beispiele: $\log 1001 = \log 7 \cdot 11 \cdot 13 = \log 7 + \log 11 + \log 13$

$$\log \frac{999}{27} = \log 999 - \log 27$$

$$\log 73^{5} = 5 \cdot \log 73 \quad ; \quad \log 30^{1/3} = 1/3 \cdot \log 30.$$

360. **Satz.** $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$

Der Log einer Zahl a nach der Base c ist gleich dem Loge jener Zahl nach der zweiten Base b mal dem Loge dieser Zahl b nach der ersten Base c.

Beweis: Es sei $a = b^{\alpha}$ und $b = c^{\beta}$, so ist

$$\frac{a}{c} = \frac{b^{\alpha}}{c} = \frac{(c^{\beta})^{\alpha}}{c} = \alpha \cdot \frac{c^{\beta}}{c} \qquad \text{(nach 357)}$$

$$= \frac{b^{\alpha}}{b} \cdot \frac{c^{\beta}}{c} \qquad \text{(nach 352)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$$

Beispiele: $\frac{10^{5}}{10} \cdot \frac{10}{e} = \frac{10^{5}}{e}.$

361. **Satz.** $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b}.$

Der Log einer Zahl a nach der Base c ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Log jener Zahl a, und dessen Nenner der Log jener Base c ist, beide nach einer neuen Base b genommen.

Beweis: Es ist $\frac{a}{c} = \frac{a}{c} \frac{c}{b} : \frac{c}{b}$ (nach 167)

$= \frac{a}{b} : \frac{c}{b}$ (nach 360).

Erklärung. Der Zehnlog oder der gemeine oder briggische Logarithmus einer Zahl heist der Log (der Logarithmus) dieſer Zahl nach der Baſe 10. 362.
Das Zeichen des Zehnloges oder des gemeinen Logarithmus der Zahl a ist $\log_{10}$ a, gewöhnlich nur log a.

Satz. $\log a = \log_{10} a = \frac{a}{10}$; $\log abc^n = \log (abc^n)$ 363.

Das Zeichen des Zehnloges $\log_{10}$ oder log bezieht ſich auf alle folgenden Grösen desſelben Gliedes.

Es erschien zweckmässig hier nochmals hervorzuheben, dass das Zeichen des Zehnloges ein Formelzeichen ist, welches ſich auf die folgenden Grösen, alſo nach 85 auf alle folgenden Grösen desſelben Gliedes bezieht. Es folgt daraus, dass log log x = log (log x) den Log des Loges von x bezeichnet, dass $\log a^n c = \log (a^n c)$ ist, dass dagegen $\log a + c = (\log a) + c$ ist. Soll ſich das Logzeichen nicht auf alle folgenden Grösen desſelben Gliedes beziehen, ſo muss es mit denGrösen, auf welche es ſich beziehen ſoll, in eine Klammer geschlossen werden.

Satz. $\log_{10} a \cdot 10^n = \log_{10} a + n$; $\log_{10} a : 10^n = \log_{10} a - n$. 364.
Statt eine Zahl a mit 10^n zu vervielfachen oder durch 10^n zu teilen, kann man zu dem Zehnloge der Zahl n zufügen, bez. n abziehen.

Beweis: 1. Es ist $\log_{10} a \cdot 10^n = \log_{10} a + \log_{10} 10^n$ (nach 355)
$= \log_{10} a + n$ (nach 352)
2. Es ist $\log_{10} a : 10^n = \log_{10} a - \log_{10} 10^n$ (nach 356)
$= \log_{10} a - n$ (nach 352)

Satz. Statt in einer Zahl das Komma um n Stellen nach rechts bez. nach links zu rücken, kann man zu dem Zehnloge der Zahl n zufügen, bez. n vom Zehnloge abziehen. 365.

Beweis: Nach 333 kann man, statt das Komma um n Stellen nach rechts bez. nach links zu rücken, die Zahl mit 10^n vervielfachen, bez. durch 10^n teilen; dies aber tut man, indem man nach 364 beim Zehnloge der Zahl n zufügt, bez. n abzieht.

Erklärung. Der Zehnlog, der gemeine Logarithmus, wird durch das Komma in zwei Stücke zerlegt: eine ganze Zahl oder die Ziffern links vom Komma und einen echten Zehntbruch oder die Ziffern rechts vom Komma. Die ganze Zahl im Zehnloge heist der Stellen- 366.

log (die characteristica), der echte Zehntbruch im Zehnloge heisst der Ziffernlog (die mantissa.).

Beispiel: Im Zehnloge 9,87276 ist 9 der Stellenlog, 876276 der Ziffernlog.

367. **Satz. Alle Zahlen a, b, c ··· welche dieselben Ziffern $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ in derselben Reihenfolge enthalten, haben denselben Ziffernlog und unterscheiden sich nur im Stellenloge.**

Der Stellenlog ist n, wenn die Zahl n + 1 geltende Ziffern links vom Komma hat, er ist c — 10 = — n, wenn die erste geltende Ziffer der Zahl auf der n ten Stelle rechts vom Komma steht.

Beweis: Da alle die Zahlen a, b, c, ··· ganz dieselben Ziffern in ganz derselben Reihenfolge enthalten sollen, so können sie sich nur noch in der Stelle unterscheiden, welche das Komma in der Zahl einnimmt. Man verwandelt also die eine Zahl a in jede andere b, c·· der gegebenen, indem man das Komma in der Zahl um b, c ·· Stellen nach rechts bez. nach links rückt, oder indem man nach 365 bei dem Zehnloge der Zahl a die Zahl b, c ·· zufügt bez. abzieht. Da diese Zahlen b, c ·· aber ganze Pluszahlen sind, so verändert dies Zufügen bez. Abziehen nur den Stellenlog, nie den Ziffernlog.

Beispiele:	Zahl	Stellenlog	Zahl	Stellenlog
	7826	3	$0_{,778}$	$-1 = 9 - 10$
	$32_{,67}$	1	$0_{,000784}$	$-4 = 6 - 10$
	$5_{,789}$	0	$0_{,0000025}$	$-6 = 4 - 10$

368. **Satz. Die Logtafel oder die Logarithmentafel der gemeinen oder briggischen Logarithmen giebt zu jeder Reihenfolge beliebiger Ziffern einer Zahl den zugehörigen Ziffernlog die Mantisse.**

Es giebt Logtafeln mit 5 Ziffern, mit 7 Ziffern und mit zehn Ziffern. Die bequemsten und für das praktische Leben ausreichenden sind die fünfziffrigen, welche wir daher der Betrachtung zu Grunde legen; die Benutzung der siebenziffrigen und der zehnziffrigen Logtafeln bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Die Berechnung eines Zehnloges werden wir im nächsten Zweige in der Folgelehre oder Funktionenlehre kennen lernen; die Art und Weise, wie eine ganze Logtafel berechnet wird, ist in der Folgelehre des Verfassers ausführlich dargestellt und kann hier darauf verwiesen werden. Jeder der sie kennen lernen will, kann sie dort nachsehen. Wir nehmen die Logtafel hier als richtig an, zumal die Richtigkeit von jedem leicht geprüft werden kann, und wiederholt sehr streng geprüft ist.

Jeder Gebildete muss die Logtafel leicht gebrauchen können und im Gebrauche derselben die gröste Gewandtheit haben; dagegen ist es nicht erforderlich, dass er die Logtafel selbst berechnet und geprüft habe; dies kann er den Mathematikern vom Fache überlassen.

Satz. Der Stellenlog. Wenn die höchste Ziffer der Zahl auf der nullten Stelle (auf der Stelle der Einer links vom Komma) steht, ſo ist der entsprechende Stellenlog 0. 369.
Wenn die höchste Ziffer der Zahl auf der n ten Stelle (der n ten Stelle links neben den nullten) steht, ſo ist der entsprechende Stellenlog n.
Wenn die höchste Ziffer der Zahl auf der — n ten Stelle (der n ten Bruchstelle) steht, ſo ist der entsprechende Stellenlog — n. Bei dem Zehnloge ſetzt man aber statt des — n im Stellenloge eine Pluszahl a vor das Komma, und lässt hinter dem Zehnloge eine Strichzahl — b folgen, ſo dass a — b = — n ist. Am liebsten wählt man die beiden Zahlen a und b ſo, dass b ein Vielfaches von 10 ist.

Beweis: Unmittelbar aus 366.

Es ist notwendig, dass man ſich hier die Regel über die Stellen nach 117 und die über die Bruchstellen nach 188 vergegenwärtige und an zahlreichen Beispielen einübe.

Die Stelle links vom Komma mit den Einern bildet die nullte Stelle (Stellenlog 0,); die a te Stelle links neben der nullten Stelle bildet die a te Stelle (Stellenlog a,); die a te Stelle rechts neben den Komma bildet die a te Bruchstelle oder die — a te Stelle (Stellenlog — a).

Beispiele:

Zahl	Stellenlog	Zahl	Stellenlog
3405	3	$3_{,0005}$	0
$0_{,0235}$	— 2 = 8 — 10	$0_{,0003}$	— 4 = 6 — 10
$73_{,276}$	1	8376392	6

Das Uebungsheft vom Verfasser: Logen und Gleichungen höherer Grade bietet reiche Uebungen dar.

Die Sitte für die Bruchstelle vor den Log eine Pluszahl und hinter den Log — 10 oder — m·10 zuſetzen, rechtfertigt ſich dadurch, das man für die Loge stets Plusziffern verwendet.

Satz. Das Aufſuchen des Logs (des Logarithmus) zur gegebenen Zahl. In der Logtafel (der Logarithmentafel) schlägt man zu den gegebenen Ziffern der Zahl den entsprechenden Ziffernlog auf. 370.

In der ersten Spalte der Tafel findet man unter Z. bez. N. in einer Reihe die ersten drei Ziffern der Zahl und in der folgenden Spalte in derſelben Reihe ausgerückt die ersten beiden Ziffern des Logs. Im Kopfe der folgenden 10 Spalten findet man die vierte Ziffer der Zahl und in der entsprechenden Reihe derſelben Spalte die dritte bis fünfte Ziffer des entsprechenden Logs. Ein Stern vor den Ziffern des Logs bezeichnet, dass man für die ersten beiden Stellen des Logs die Ziffern der nächst folgenden Reihe nehmen muss.

Hat die Zahl noch eine fünfte Ziffer, fo zieht man den Log der betreffenden Spalte von dem entsprechenden Loge der folgenden Spalte ab; den Unterschied findet man in der letzten Spalte der Tafel abgedruckt, er entspricht 10 Einheiten der fünften Ziffer, die kleinen Hülfstafeln der letzten Spalte geben an, wieviel für jede fünfte Ziffer der Zahl dem Loge zugefügt werden muss.

Nachdem der Ziffernlog festgestellt ist, fetzt man links von demfelben das Komma und bestimmt den Stellenlog nach 369.

Es ist notwendig, dass fich jeder Gebildete reiche Uebung im Auffuchen der Loge verschaffe. Das Uebungsheft des Verfassers bietet dazu reiche Gelegenheit.

Auf der letzten Stelle des Logs bezeichnet die grose Ziffer, dass der genaue Log gröser, die kleine Ziffer, dass er kleiner ist als der auf fünf Stellen abgekürzte Log. So z. B. giebt der Log 0,9584444 abgekürzt 0,95844, dagegen giebt der Log 0,9581576 abgekürzt 0,9581₆.

Beispiele:

	Zahl	Log	Zahl	Log
a.	$3,_{26}$	0,5132₂	$7,_{28}$	0,86213
	$53,_{7}$	1,72997	$93,_{9}$	1,97267
b.	$283,_{5}$	2,45255	6739	3,8286₀
	$42,_{46}$	1,62789	524900	5,72008
c.	$1,_{12789}$	0,10684	$0,_{0038273}$	7,58289 — 10
	37625	4,57547	$0,_{56782}$	9,75421 — 10

In der 7stelligen Logarithmentafel findet man unter N oder Z die ersten 4 Ziffern der Zahl und in den zehn folgenden Spalten für die folgende 5te Ziffer der Zahl den betreffenden Log. Hat die Zahl noch eine 6te und 7te Ziffer, fo zieht man den Log der Zahl vom nächst höheren Loge ab, fo hat man den Unterschied der Loge für die Einheit der 5ten Stelle. Man nimmt dann für jede Einheit der nächst folgenden Ziffer $^1/_{10}$, für jede der zweitfolgenden Ziffer $^1/_{100}$ diefes Unterschiedes und fügt diefe zum Loge hinzu. In den Tafeln find diefe Teile der Unterschiede bereits hinten berechnet.

371. **Satz. Das Auffuchen der Zahl zum gegebenen Loge (zum Logarithmus). In der Logtafel (in der Logarithmentafel) fucht man den Log auf, welcher der nächst niedere ist zu dem gegebenen Loge und findet in derfelben Zeile die drei ersten Ziffern, und im Kopfe derfelben Spalte die vierte Ziffer der entsprechenden Zahl.**

Nun zieht man den Log der Tafel von dem entsprechenden Loge der folgenden Spalte ab; den Unterschied findet man in der letzten Spalte der Tafel abgedruckt, er entspricht 10 Einheiten der fünften Ziffer der Zahl. Zieht man nun den Log der Tafel vom gegebenen Loge ab und nimmt in der Hülfstafel den Wert, der diefem

Reste am nächsten steht, ſo findet man daneben die fünfte Ziffer der Zahl.

Die erste oder höchste Ziffer der Zahl erhält die Stelle, welche der Stellenlog angiebt und wird das Komma dem entsprechend nach 369 geſetzt.

Wieder ist eine reiche Uebung im Auffuchen der Zahl erforderlich; das Uebungsheft vom Verfasser bietet dazu reiche Gelegenheit.

Beispiele:

	Log	Zahl	Log	Zahl
a.	0,29003	$1_{,95}$	2,40381	$253_{,4}$
	0,57576	$3_{,765}$	5,94265	876300
b.	2,47094	$295_{,76}$	8,77645 — 10	$0_{,059766}$
	6,28051	1907700,	7,43704 — 10	$0_{,0027355}$

Bei den 7stelligen Logen erhält man in der Tafel 5 Ziffern der Zahl. Nun zieht man den Log der Tafel vom demnächst höhern Loge der Tafel ab und findet daraus den Unterschied der Loge für die Einheit der 5ten Stelle, für den an der Seite in der letzten Spalte der Tafel eine kleine Hülfstafel steht. Nun nimmt man den Unterschied der gegebenen Mantisse und des nächst niedern Logs der Tafel und ermittelt, welche Zahl in der Hülfstafel dieſem Unterschiede entspricht und setzt darnach die nächstfolgende oder die beiden nächstfolgenden Stellen fest.

Satz. Das Rechnen mit Logen (Logarithmen). 372.

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

$$\log \frac{a}{bc} = \log a - \log b - \log c.$$

Statt eine Zahl mit mehren Zahlen zu vervielfachen, kann man die Loge derſelben zufügen und statt eine Zahl durch mehre Zahlen zu teilen, kann man die Loge der Nenner von dem Loge des Zählers abziehen, und schlieslich zu dem Loge die Zahl ſuchen.

Beweis: Unmittelbar aus 355 und 356.

Beispiele: $\log 87265 \times 57366 = 4{,}9408\bar{4} + 4{,}75865 = 9{,}69949$

alſo $87265 \times 57366 = 5006000000$

$\log 92_{,763} : 582_{,67} = 1{,}9673\bar{8} - 2{,}7654\bar{3} = 9{,}20195 - 10$

alſo $92_{,763} : 582_{,67} = 0{,}159204.$

Satz. $\log \cdot a^n = n \cdot \log a \qquad \log \cdot a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$ 373.

Statt eine Zahl zur nten Stufe zu erhöhen, kann man den Log der Zahl mit n vervielfachen und statt aus einer Zahl die nte Tiefe zu nehmen, kann man den Log der Zahl durch n teilen und schlieslich zu dem Loge die Zahl ſuchen.

Beweis: Unmittelbar aus 357 und 358.

Beispiele: $\log 72_{,682}{}^7 = 7 \cdot 1{,}86142 = 13{,}02994$

$$\text{alſo } 72{,}_{682}{}^{7} = 10'718'750'000'000$$

$$\log 85363^{1/3} = {}^{1}/_{3} \cdot 4{,}93127 = 1{,}64376$$

$$\text{alſo } 85363^{1/3} = 44{,}_{031}.$$

Es ist dringend wünschenswert, dass jeder Gebildete zahlreiche Uebungen im Rechnen mit Logen mache; das Uebungsheft vom Verfasser bietet dazu reiche Gelegenheit.

374. **Erklärung: Der Log nach e heist der Elog oder der natürliche, der nepersche Logarithmus, und zwar ist e = 2,718281828459 und log e = 0,4342944819.**

Das Zeichen des Elogs ist $\log_e$ oder log·nat.

375. **Satz.** $\frac{a}{\overline{\overline{e}}} = \frac{a}{10} : \frac{e}{\overline{\overline{10}}}$ **oder $\log_e a = 2{,}3025851 \cdot \log_{10} a$.**

Der Elog (der natürliche Logarithmus) einer Zahl ist gleich dem Zehnlog (dem gemeinen Logarithmus) der Zahl geteilt durch den Zehnlog von e, d. h. geteilt durch 0,4342945 oder vervielfacht mit 2,3025851.

Beweis: Unmittelbar aus 361 und 374.

376. **Satz.** $\frac{a}{\overline{\overline{10}}} \cdot = \frac{a}{\overline{\overline{e}}} \cdot \frac{e}{\overline{\overline{10}}}$ **oder $\log_{10} a = 0{,}4342945 \cdot \log_e a$.**

Der Zehnlog (der gemeine Logarithmus) einer Zahl ist gleich dem Elog (dem natürlichen Logarithmus) der Zahl mal dem Zehnlog von e d. h. mal 0,4342945.

Beweis: Unmittelbar aus 360 und 374.

D. Die Eigenschaften von Höhen, Tiefen und Logen.

377. **Satz. Eine Vergleichung zweier Pluszahlen ändert ſich nicht, wenn man ſie mit gleichen Pluszahlen erhöht oder tieft.**

Beweis: Es ſei gegeben $a > b$, wo a und b Pluszahlen. Sei nun c eine ganze Pluszahl, ſo ist

1. $a^c > b^c$ (nach 203).

2. ſo ist auch $a^{\frac{1}{c}} > b^{\frac{1}{c}}$; denn wäre $a^{\frac{1}{c}} < b^{\frac{1}{c}}$, ſo wäre auch $\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^c < \left(b^{\frac{1}{c}}\right)^c$ (nach Fall 1), d. h. es wäre $a < b$ gegen die Annahme, wäre ferner $a^{\frac{1}{c}} = b^{\frac{1}{c}}$, ſo wäre auch $a = b$ (nach Fall 1). dies aber ist gleichfalls gegen die Annahme, alſo ist auch $a^{\frac{1}{c}} > b^{\frac{1}{c}}$,

3. ſo ist auch $a^{\frac{d}{c}} > b^{\frac{d}{c}}$, ſofern d und c ganze Pluszahlen ſind (nach Fall 1 und 2).

Beispiele: $9 > 4$ alſo auch $9^3 > 4^3$ und $9^{1/2} > 4^{1/2}$

Satz. Eine Vergleichung zweier Pluszahlen ändert ſich nicht, wenn man gleiche Zahlen, welche gröser als Eins ſind, zu ihnen erhöht und wenn man ſie nach gleichen Zahlen gröser als Eins logt. 378.

Beweis. Es ſei gegeben $a > b$, wo a und b Pluszahlen, und ſei $c > 1$, ſo ist

1. $c^a > c^b$, denn nach 142 ist $a - b$ eine Pluszahl, alſo nach 337 ist $c^{a-b} > 1$, und da c^b eine Pluszahl, ſo ist auch $c^a > c^b$ nach 203.

2. $\overline{\overline{c}}^{\,a} > \overline{\overline{c}}^{\,b}$; denn es ſei $a = c^{\mathfrak{a}}$ und $b = c^{\mathfrak{b}}$, ſo würde, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ wäre, auch $c^{\mathfrak{a}} = c^{\mathfrak{b}}$ ſein (nach 377), ſollte aber $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ſein, ſo wäre nach $378,_1$ auch $c^{\mathfrak{a}} < c^{\mathfrak{b}}$, d. h. $a < b$. Da nun $a > b$ ſein ſoll, ſo muss alſo auch $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ ſein, und da $\overline{\overline{c}}^{\,a} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{c}}^{\,b} = \mathfrak{b}$, ſo ist alſo auch $\overline{\overline{c}}^{\,a} > \overline{\overline{c}}^{\,b}$.

Beispiele: $8^5 > 8^3$; $4^4 > 4^2$.

Satz. Die Loge (die Logarithmen) aller Zahlen, welche gröser als Eins ſind, ſind Pluszahlen; die Loge aller Pluszahlen, welche kleiner als Eins ſind, d. h. aller echten Brüche, ſind Strichzahlen. 379.

Beweis: Die Loge von 1 ſind Null (nach 353). Alle Zahlen, welche gröser als Eins ſind, haben aber nach 378 Loge, welche gröser als der Log von 1, d. h. gröser als Null ſind, oder ſie ſind Pluszahlen; alle Pluszahlen, welche kleiner als 1 ſind, haben Loge, welche kleiner als der Log von 1, d. h. kleiner als 0 ſind, oder ſie ſind Strichzahlen.

Beispiel: $\overline{\overline{10}}^{\,10^3} = 3$; $\overline{\overline{10}}^{\,10^{-3}} = -3$.

Satz. Wenn eine Primzahl p in eine Höhe a^b, deren Baſe und Stufe ganze Pluszahlen ſind, aufgeht, ſo geht ſie auch in die Baſe auf. 380.

Beweis. Angenommen, p gehe nicht in a auf, ſo geht es (nach 222) auch nicht in das Zeug von b Fachen oder Faktoren a auf, d. h. (nach 321) nicht in a^b, was gegen die Vorausſetzung des Satzes ist. Alſo ist die Annahme, dass p nicht in a aufgeht, unmöglich, d. h. p geht in a auf.

Beispiele: Wenn 3 in 9^5 aufgeht, ſo auch in 9.

Satz. Wenn zwei Zahlen (a und b) einander fremde oder primär ſind, 381.

so sind auch ihre Höhen zu ganzer Stufe n einander fremde oder primär.

Beweis: Angenommen, es seien a^n und b^n nicht einander fremde, so müssten beide ein gemeinsames Mas c haben (nach 214) das gröser als Eins ist. Sei d ein Primfach dieses c und gröser als 1, so müsste auch d in a^n und b^n aufgehen (nach 213), mithin (nach 380) auch in a und b aufgehen, d. h. a und b wären einander nicht fremde, was gegen die Voraussetzung des Satzes ist. Also ist die Annahme, dass a^n und b^n einander nicht fremde seien, unmöglich, d. h. a^n und b^n sind einander fremde oder primär.

382. **Erklärung. Endzahlen oder Rationalzahlen nennt man die ganzen Zahlen und die Bruchzahlen.**
Unzahlen oder Irrationalzahlen heisen solche Grösen, welche nicht Endzahlen sind, für welche aber alle Vergleichungssätze in demselben Umfange gelten wie für Endzahlen.

383. **Satz. Alle Sätze der Zahlenlehre, welche für beliebige ganze und Bruchzahlen gelten, gelten auch für die Unzahlen oder Irrationalzahlen.**

384. **Satz. Die nte Tiefe einer ganzen Pluszahl a ist entweder eine ganze Zahl oder eine Unzahl (Irrationalzahl); aber kein Bruch.**

Beweis. Angenommen, $a^{\frac{1}{n}}$ sei ein Bruch, und sei derselbe kurz oder reduzirt $\frac{b}{c}$, so wäre $a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c}$, mithin $a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{b}{c}\right)^n = \frac{b^n}{c^n}$ oder $ac^n = b^n$. Da nun b und c einander fremde sind (nach 227) so sind auch b^n und c^n einander fremde (nach 381), mithin (nach 218) $b^n = a$, d. h. $c^n = 1$, also auch $c = (c^n)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$ (nach 338). Also ist $a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$, was gegen die Annahme ist, also ist die Annahme unmöglich, und $a^{\frac{1}{n}}$ ist kein Bruch, sondern entweder eine ganze Zahl oder eine Unzahl (Irrationalzahl).

385. **Satz. Der Zehnlog von allen Zahlen, welche weder Höhen noch Tiefen von zehn sind, ist eine Unzahl (Irrationalzahl.).**

Beweis: Sollte der Zehnlog einer Zahl a eine ganze Zahl n sein, so müsste $\log a = \frac{a}{10} = n$ sein, d. h. nach 352 müsste $a = 10^n$ d. h. eine Höhe von 10 sein.

Sollte der Zehnlog einer Zahl a ein Bruch $\frac{m}{n}$ ſein, ſo müsste $\log a = \frac{a}{10}$ $= \frac{m}{n}$ ſein, d. h. nach 357 und 358 müsste $a = 10^{\frac{m}{n}}$ d. h. eine Tiefe von 10 ſein. Da beides gegen die Annahme ist, ſo kann der Zehnog einer Zahl, welche weder eine Tiefe, noch eine Höhe von 10 ist, weder eine ganze Zahl noch ein Bruch ſein, alſo ist er nach 382 eine Unzahl (Irrationalszahl).

Satz. Die (4a)ten Höhen der Primzahlen auser 2 und 5 haben in der letzten Stelle eine Eins, oder die vierte Höhe derſelben weniger 1 ist durch zehn teilbar. 386.

Die (4 a + 2) ten Höhen der Primzahlen auser 2 und 5 haben in der letzten Stelle entweder eine Eins oder eine Neun.

Beweis: Sei a + 10 b, wo a < 10 eine Primzahl, ſei c + 10 d die nte Höhe derſelben, ſo ist die n + 1 te Höhe derſelben (a + 10 b) (c + 10 d) = ac + 10 (ad + bc) + 100 bd. Für die letzte Stelle, die Einer der höhern Höhen kommt es demnach nur auf das Zeug oder Produkt der Ziffern in der letzten Stelle an.

Für alle Zahlen ist nun der erste Teil des Satzes gültig für $a = 0$; denn $a^0 = 1$ nach 319. Bewieſen ſoll werden, dass wenn der Satz für die 4ate Höhe gilt, dass er dann auch für die (4 a + 2) te und für die (4a + 4)te oder für die 4 (a + 1) te Höhe gilt. Alle Primzahlen auser 2 und 5 haben in der letzten Stelle eine der Ziffern 1, 3, 7, 9.

Die Primzahlen mit 1 in der letzten Stelle haben alſo in der letzten Stelle in der 4aten Höhe 1 (Annahme), in der (4a + 1) ten Stelle $1 \cdot 1 = 1$ und ebenſo in den letzten Stellen ſämmtlicher folgenden Höhen eins.

Die Primzahlen, welche 9 in der letzten Stelle haben, haben in der letzten Stelle in der 4aten Höhe 1 (nach Annahme), in der (4a + 1)ten Höhe $1 \cdot 9 = 9$, in der (4a + 2) ten Höhe $9 \cdot 9 = 81$ d. h. in der letzten Stelle 1, in der (4a + 3) ten Höhe $1 \cdot 9 = 9$ und in der (4a + 4)ten Höhe $9 \cdot 9 = 81$, d. h. in der letzten Stelle 1.

Die Primzahlen, welche 3 in der letzten Stelle haben, haben in der letzten Stelle in der 4aten Höhe 1 (nach Annahme), in der (4a + 1)ten Höhe $1 \cdot 3 = 3$, in der (4a + 2)ten Höhe $3 \cdot 3 = 9$, mithin in der (4a + 4)ten Höhe $9 \cdot 9 = 81$, d. h. in der letzten Stelle 1.

Die Primzahlen, welche 7 in der letzten Stelle haben, haben in

der letzten Stelle in der $4a$ten Höhe 1 (nach Annahme), in der $(4a+1)$ten Höhe $1 \cdot 7 = 7$, in der $(4a+2)$ten Höhe $7 \cdot 7 = 49$, d. h. in der letzten Stelle 9, in der $(4a+4)$ten Höhe mithin $9 \cdot 9 = 81$, d. h. in der letzten Stelle 1.

Wenn der Satz für die $4a$te Höhe gilt, so gilt er mithin auch für die $(4a+2)$te und für die $4a+4$ oder $4(a+1)$te Höhe, nun gilt er für $4a = 0$, mithin gilt er allgemein.

10. Die Höhen von Summen und die Summen von Höhen.

A. Die Höhen und die Loge von Summen.

387. **Erklärung. Die Geschiedszahl von n zur mten Stufe heist die Zahl** $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$, **wo n eine ganze Pluszahl ist.**

Die Zahl $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ heist die Geänderzahl von n zur mten Stufe; die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$ heist die Tauschzahl von m. Die Geschiedszahl von n zur nullten Stufe setzt man 1. Die Zahl n heist hier die Base, die Zahl m die Stufe.

388. **Erklärung. Das Zeichen der Geschiedszahl von n zur mten Stufe ist $n^{\cdot m}$ (gelesen n Punkt m), das der Geänderzahl von n zur mten Stufe ist $n^{\prime m}$ (gelesen n Schlag m), das der Tauschzahl von m ist $m!$ (gelesen m Tausche).**

Beispiele: $10^{\cdot 0} = 1$, $10^{\cdot 1} = 10$, $10^{\cdot 2} = 45$, $10^{\cdot 3} = 120$, $10^{\cdot 4} = 210$, $10^{\cdot 5} = 252$, $10^{\cdot 6} = 210$, $10^{\cdot 7} = 120$, $10^{\cdot 8} = 45$, $10^{\cdot 9} = 10$, $10^{\cdot 10} = 1$, $10^{\cdot 11} = 0$. Es ist $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ $8! = 5760$, $9! = 51840$, $10! = 518400$.

389. **Satz.** $n^{\cdot m} = \frac{n^{\prime m}}{m!}$; $n^{\prime m} = m! \cdot n^{\cdot m}$.

Die Geschiedszahl von n zur mten Stufe ist gleich der Geänderzahl von n zur mten Stufe geteilt durch die Tauschzahl von m und die Geänderzahl von n zur mten Stufe ist gleich der Geschiedszahl von n zur mten Stufe mal der Tauschzahl von m.

Beweis: Unmittelbar aus 387.

Beispiel: Es ist $10^{\prime 2} = 10^{\cdot 2} \cdot 2! = 90$; $10^{\prime 4} = 10^{\cdot 4} \cdot 4! = 5040$.

390. **Satz.** $n^{\cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Die Geschiedszahl von n zur mten Stufe ist gleich der Tauschzahl von n geteilt durch das Zeug oder Produkt der beiden Tauschzahlen von m und von n—m.

Beweis: Die Geschiedszahl von n zur mten Stufe ist nach 387 und nach 182

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ m} =$$

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+1)\ (n-m)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ m\ (n-m)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Satz. $(n+1)^{\cdot m} = n^{\cdot m} + n^{\cdot m-1}$. 391.

Jede Geschiedszahl ist gleich der Summe zweier Geschiedszahlen, deren Basen um eins kleiner sind als die Base der gegebenen Geschiedszahl und von deren Stufen die eine ebenso gros, die andere um eins kleiner ist als die Stufe der gegebenen Geschiedszahl.

Beweis: Nach 387 ist

$$n^{\cdot m}+n^{\cdot m-1} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+2)\ (n-m+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ (m-1)\cdot\ m}$$

$$+ \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+2)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ (m-1)}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+2)\ (n-m+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ (m-1)\cdot\ m}$$

$$+ \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+2)\cdot m}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ (m-1)\ \cdot m}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+2}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdots\ (m-1)m}(n-m+1+m)$$

$$= \frac{(n+1)n\ (n-1)\ (n-2)\cdots(n-m+2)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdot\ 4\cdots\ m} = (n+1)^{\cdot m}$$

Satz. Die zweite Höhe oder das Quader der Summe. 392.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Die zweite Höhe einer Summe ist gleich der Summe aus den zweiten Höhen der beiden Stücke plus dem doppelten Zeuge oder Produkte der beiden Stücke.

Beweis: Man führe die Vervielfachung nach 315 aus, so ist $(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$.

Beispiel: $(5+6)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot 6 + 6^2 = 25 + 60 + 36 = 121$.

Binomischer Lehrsatz oder die nte Höhe der Summe, 393.

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot\ 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3}a^{n-3}b^3$$

$$+\cdots+ nab^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + n^{\cdot 1}a^{n-1}b + n^{\cdot 2}a^{n-2}b^2 + n^{\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

$$+ n^{\cdot n-1}ab^{n-1} + n^{\cdot n}b^n$$

$= Sn^{\cdot a}a^{n-a}b^a$, wo a eine ganze Pluszahl.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 2$, d. h. für $(a + b)^2$ nach 392.

2. Wenn der Satz für $(a + b)^n$ gilt (Annahme,) so gilt er auch für $(a + b)^{n+1}$ Folgerung; denn

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n =$$

$$a^{n+1} + n^{\cdot 1}a^n b + n^{\cdot 2}a^{n-1}b^2 + n^{\cdot 3}a^{n-2}b^3 + \cdots + n^{\cdot n-1}a^2b^{n-1} + n^{\cdot n}ab^n$$

$$+ a^n b + n^{\cdot 1}a^{n-1}b^2 + n^{\cdot 2}a^{n-2}b^3 + \cdots + n^{\cdot n-2}a^2b^{n-1} + n^{\cdot n-1}ab^n + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + (n+1)^{\cdot 1}a^n b + (n+1)^{\cdot 2}a^{n-1}b^2 + (n+1)^{\cdot 3}a^{n-2}b^3$$

$$+ \cdots + (n+1)^{\cdot n-1}a^2b^{n-1} + (n+1)^{\cdot n}ab^n + b^{n+1}$$

da stets $(n+1)^{\cdot a} = n^{\cdot a} + n^{\cdot a-1}$ nach 391, also gilt der Satz auch für $(a + b)^{n+1}$.

3. Mithin gilt der Satz nach 23 ganz allgemein.

Den Binomischen Lehrsatz wendet man gewöhnlich an, um die zweite Tiefe (Wurzel) zu berechnen, die beiden folgenden Sätze 394 und 395 enthalten diese Anwendung. Es ist diese Anwendung aber so gänzlich unpraktisch weitläuftig und unbequem, dass ich jedem raten möchte, dieselbe zu überschlagen. Einerseits liefern die Loge oder Logarithmen einen höchst bequemen Weg zur Berechnung für die Wurzel bis auf 5 bis 7 Stellen; andrerseits werden wir in der Folgelehre oder Funktionslehre noch einen zweiten bequemen Weg für die Berechnung der Tiefen für beliebig viele Stellen kennen lernen. Die beiden Sätze 394 und 395 habe ich hier nur aufgeführt, damit die Herren, welche an dieselben gewöhnt sind, sie nicht vermissen.

394. **Satz für das stellenweise Berechnen der zweite Tiefe (Wurzel): Man teilt die Zahl links vom Komma in m Gruppen von je 2 Stellen, zieht von der ersten linken Gruppe das gröste Quader einer einziffrigen Zahl a_1 ab, welches sich davon abziehen lässt. Fügt zu dem Reste r_1 die nächste Stelle und zieht davon den doppelten Wert der Zahl a_1 soviel mal ($b_1$mal) ab, als er aufgeht. Der Rest sei r'_1. Zu dem Reste r'_1 fügt man die Ziffer der nächsten Stelle, und zieht davon das Quader b_1^2 ab, und sei r_2 der Rest, der übrig bleibt, dann ist $a \cdot 10 + b$ der zweite genäherte Wert a_2 der Tiefe. So fährt man fort. Sei a_n der nte genäherte Wert und r_n der Rest der übrig geblieben ist, nachdem b^2_{n-1} abgezogen ist, so fügt man zu r_n die Ziffer der nächsten Stelle und zieht davon den doppelten Wert der Zahl a_n soviel mal (b_n mal) ab, als er aufgeht, der Rest sei r'_n. Zu dem Reste r'_n fügt man die Ziffer der nächsten Stelle und zieht davon das Quader b_n^2 ab, sei r_{n+1} der Rest, der übrig bleibt, dann ist $a_n \cdot 10 + b_n$ der $n+1$te genäherte Wert der Wurzel a_{n+1}.**

Beweis: Nach 392 ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, gestaltet man diese Formel so um, dass a und b einziffrige Zahlen sind und a eine Stelle höher ist als b, so wird daraus $(a \cdot 10 + b)^2 = a^2\, 100 + 2a \cdot 10 \cdot b$

$+b^2$. Sei alſo R die gegebene Zahl und teilt man dieſelbe in m Gruppen zu 2 Stellen. Sei nun a_n die nte Wurzel und r_n der Rest für eine Stelle, wenn man bis zu dieſer Stelle a_n^2 abgezogen hat und ſei c die Ziffer der nächsten Stelle und d die der zweiten Stelle, und R_{n+1} der Rest der folgenden Stellen, ſo ist alſo $R = a_n^2 \cdot 100 + r_n \cdot 100 + c \cdot 10 + d + R_{n+1}$ will man nun davon $(a_n \cdot 10 + b_n)^2 = a_n^2 \cdot 100 + 2a_n \cdot 10 \cdot b_n + b_n^2$ abziehen, ſo muss man von $r_{n+1} \cdot 100 + c \cdot 10$ die Zahl $(2a_n \cdot 10)b$ mal abziehen, und bleibe $r'_n \cdot 10$, ſo muss man von $r'_n \cdot 10 + d$ die Zahl b^2 abziehen, ſei der Rest r^{n+1} ſo ist alſo $R = (a_n 10 + b_n)^2 + r_{n+1} + R_{n+1}$ und ist alſo $a_n \cdot 10 + b$ der $n + 1$ te Näherungswert der Wurzel.

Beiſpiele: $\sqrt{2\,17\,53\,30\,01} = 14749$

|2|17|53|30|01

$a_1 = 1$	1		
$r_1 \cdot 10 + c$	11	$r_3 \cdot 10 + d$	1448
$2a_1\, b_1 = 2 \cdot 4 =$	8	$2a_3\, b_3 = 294 \cdot 4 =$	1176
	37		2670
$b_1^2 =$	16	$b_3^2 =$	16
	215		26540
$2a_2\, b_2 = 28 \cdot 7 =$	196	$2a_4\, b_4 = 2948 \cdot 9 =$	26532
	193		81
$b_2^2 =$	49	$b_4^2 =$	81

Satz für das abgekürzte Berechnen der zweiten Wurzel. 395.

Wenn a_{n+1} ein $n+1$ ziffriger Näherungswert von $R^{\frac{1}{2}}$ ist und $r_{n+1} \cdot 10^p + R_{n+1}$ der zugehörige Rest, ſo findet man die p folgenden Ziffern der zweiten Wurzel b_{n+1}, indem man $r_{n+1}\, 10^p + R_{n+1}$ durch $2a_{n+1}$ teilt und zwar b_{n+1} mal, doch kann in dieſem Ausdrucke die Ziffer der letzten Stelle um eine Einheit zu gros ſein. Sei dann $r'_{n+1} \cdot 10^p + R'_{n+1}$ der Rest, ſo zieht man b_n^2 von dieſem Reste ab und erhält dann den Rest $r_{n+2}\, 10^{p'} + R_{n+2}$ für die weitern Näherungswerte.

Beweis: Der Beweis ist ſehr leicht ganz entsprechend dem Beweiſe von 394 zu führen.

Beispiele: $\sqrt{2} = 1,|41|42|1356|23730950$

	2
$a_1^2 =$	1
$r_1 \cdot 10 + c$	10
$2a_1 b_1 = 2 \cdot 4$	8
$r'_1 \cdot 10 + d$	20
$b_1^2 = 4^2$	16
$r_2 \cdot 10 + c$	40
$2a_2 b_2 = 28 \cdot 1$	28
$r'_2 \cdot 10 + d$	120
$b_2^2 = 1^2$	1
$r_3 \cdot 100 + c$	11900
$2a_3 b_3 = 282 \cdot 42$	11844
$r'_3 \cdot 100 + d$	5600
$b_3^2 = 42^2$	1764
$r_4 \cdot 1000 + c$	38360000
$2a_4 b_4 = 28284 \cdot 1536$	38653104
$r'_4 \cdot 10000 + d$	68960000
$b_4^2 = (1356)^2$	1838736
$r_5 \cdot 10_8 + c$	6712126400000000
$2a_5 b_5 = 282842712 \cdot 23730950$	6712126256336400
$r'_5 \cdot 10_8 + d$	14366360000000000
$b_5^2 = (23730950)^2$	563157987902500
$r_6 =$	14003202012097500

Auch die folgenden beiden Sätze 396 und 397, welche Gauss 1812 erfunden hat, werden überaus ſelten gebraucht. Ich rate daher dieſelben zunächst zu überschlagen und ſie dann nachzuholen, wenn ſie praktisch gebraucht werden.

396. **Satz. Der Log der Summe.**

Es ist bei den log. Berechnungen höchst unbequem, wenn mitten in der Rechnung die Summe oder der Unterschied zweier Zahlen vorkommt, deren Loge man hat. Man muss dann erst zu den beiden Logen die beiden entsprechenden Zahlen aufſuchen, von dieſen die Summe oder den Unterschied nehmen, und dann erst wieder den Log der gefundenen Zahl aufschlagen. Um dieſe Weitläuftigkeiten zu vermeiden, hat man eine Hülfstafel entworfen.*) Man hat für $A = \log x$, das $B = \log (x + 1)$ aus der Logarithmentafel berechnet. Seien nun a und b die Zahlen, deren Loge gegeben und ſei $a > b$; so wird der $\log (a + b)$ geſucht.

1. Wir ſetzen $x = \frac{b}{a}$, dann ist $x + 1 = \frac{b}{a} + 1 = \frac{b + a}{a}$ und

$a + b = a(x + 1)$ mithin ist $\log b - \log a = \log x = A$,

$\log (a + b) = \log a (x + 1) = \log a + \log (x + 1) = \log a + B.$

*) Bemerkt möge hier nochmals werden, dass jedes Formelzeichen, alſo auch das Zeichen log ſich stets auf das ganze folgende Glied bezieht. Es ist demnach $\log a (x + 1) = \log [a(x + 1)]$ und $\log \log y = \log (\log y)$ u. ſ. w.

2. Wir fetzen $x = \frac{a}{b}$, dann ist $x + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$ und $a + b = b(x+1)$ mithin ist $\log a - \log b = \log x = A$.

$\log(a+b) = \log b(x+1) = \log b + \log(x+1) = \log b + B$

$$= \log \frac{a(x+1)\,b}{a} = \log a + \log(x+1) - \log\frac{a}{b} = \log a + (B - A)$$

Dies find dann die Formeln der Hülfstafel.

Es wird bemerkt, dass der erstere Weg schneller zum Ziele führt.

Beispiele: 1. $a > b$; $\log b - \log a = A$; $\log(a+b) = \log a + B$.

$\log b = 2{,}13782$	$\log b = 3{,}17658$
$\log a = 2{,}95678$	$\log a = 3{,}35216$
$A = 9{,}18104 - 10$	$A = 9{,}82437 - 10$
$B = 0{,}06134$	$B = 0{,}22204$
$\left.\begin{array}{l}\log a + B =\\ \log(a+b) =\end{array}\right\}$ 3,01812	$\left.\begin{array}{l}\log a + B =\\ \log(a+b) =\end{array}\right\}$ 3,57420

2. $a > b$; $\log a - \log b = A$; $\log(a+b) = \log b + B = \log a + (B - A)$.

$\log a = 2{,}95678$	$\log a = 3{,}35216$
$\log b = 2{,}13782$	$\log b = 3{,}17658$
$A = 0{,}81896$	$A = 0{,}17563$
$B = 0.88030$	$B = 0{,}39767$
$\left.\begin{array}{l}\log b + B\\ \log(a+b)\end{array}\right\} = 3{,}01812$	$\left.\begin{array}{l}\log a + (B-A)\\ \log(a+b)\end{array}\right\} = 3{,}57420$

Satz. Der Log des Unterschieds. 397.

1. Für den Log des Unterschieds gilt diefelbe Hülfstafel, wie für den Log der Summe. Man hat alfo für $A = \log x$ das $B = \log(x+1)$ aus der Logarithmentafel berechnet. Dann ist, wenn man $B = \log y$ fetzt, $A = \log(y - 1)$.

Seien nun a und b die Zahlen, deren Loge gegeben und fei $a > b$; es wird der $\log(a - b)$ gefucht.

1. Wir fetzen $y = \frac{a}{b}$, dann ist $y - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$ und $a - b = b(y-1)$ mithin ist $\log a - \log b = \log y = B$ und

$\log(a-b) = \log b(y-1) = \log b + \log(y-1) = \log b + A$

$$= \log \frac{b(y-1)\,a}{a} = \log a + \log(y-1) - \log\frac{a}{b} = \log a + A - B$$

$$= \log a - (B - A).$$

2. Wenn $B = \log a - \log b$ kleiner als $0{,}30900$, fo wird in der Tafel A zu ungenau und muss man dann A dadurch finden, dass man den Log B nimmt und diefen zu P zufügt, fo dass $A = P + \log B$; dann ist alfo $\log B = A - P$, d. h. $\log \log y = \log(y-1) - P$ und P eine Hülfsgröse aus den logarithmischen Tafeln berechnet. Eine eigene kleine Hülfstafel ist für diefe Fälle berechnet. Es ist dann $\log(a - b) = \log b + A = \log b + P + \log B$.

Beispiele: $a > b$; $\log a - \log b = B$;

$\log(a - b) = \log b + A = \log a + A - B$.

$\log a = 3{,}78210$	$\log a = 9{,}53426-10$
$\log b = 9{,}86354$	$\log b = 8{,}78354-10$
$B = 3{,}91856$	$B = 0{,}75072$
$A = 3{,}91861$	$A = 0{,}66584$
$\left.\begin{matrix}\log b + A \\ \log (a - b)\end{matrix}\right\} = 3{,}78215$	$\left.\begin{matrix}\log a + A - B \\ \log (a - b)\end{matrix}\right\} = 9{,}34938$

$a > b$; $\log a - \log b = B$; $A = P + \log B$; $\log (a - b) = \log b + A$.

$\log a = 9{,}57362-10$	$\log a = 3{,}42378$
$\log b = 9{,}52738-10$	$\log b = 3{,}28737$
$B = 0{,}04624$	$B = 0{,}13641$
$P = 0{,}38554$	$P = 0{,}43220$
$\left.\begin{matrix}\log b + A \\ \log (a-b)\end{matrix}\right\} = 9{,}95916-10$	$\left.\begin{matrix}\log b + A \\ \log (a-b)\end{matrix}\right\} = 3{,}85598$

3. Uebrigens muss hiebei noch befonders bemerkt werden, dass diefe Rechnung mit Logen stets fehr ungenaue Ergebnisse liefert, wenn fehr kleine Unterschiede gefucht werden und dass man diefe Fälle mithin vermeiden muss.

4. Es geben diefe beiden Sätze 396 und 397 zugleich ein bequemes Mittel um die **Wurzel aus Summen und Unterschieden** zu berechnen. Sei z. B. $a = (1 - b^2)^{1/2}$, eine Formel, welche in der Trigonometrie häufig vorkommt, wo $\sin x = (1 - (\cos x)^2)^{1/2}$ und $\cos x = (1 - (\sin x)^2)^{1/2}$, fo hat man $B = \log \frac{1}{b^2} = -2 \log b$, mithin $A = \log \left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = \log \frac{1 - b_2}{b^2}$, alfo $\log (1 - b^2) = 2 \log b + A$, und $\log a = \log (1 - b^2)^{1/2} = \log b + {}^1/_2 A$.

Die **Rechnung** ist dann alfo **einfach**: Man fetze, da $\log b$ gegeben ist, $B = -2 \log b$, fuche dazu A und findet dann $\log (1 - b^2)^{1/2} = \log b + {}^1/_2 A$

Beispiele: $\sin x = (1 - (\cos x)^2)^{1/2}$; $B = -2 \log \cos x$,
$\log \sin x = \log \cos x + {}^1/_2 A$

$\log \cos x = 9{,}99761$	$\log \cos x = 9{,}88425$
$B = 0{,}00478$	$B = 0{,}23150$
$A = 8{,}04404$	$A = 9{,}84764$
$\left.\begin{matrix}\log \cos x + {}^1/_2 A \\ \log \sin x\end{matrix}\right\} = 9{,}01963$	$\left.\begin{matrix}\log \cos x + {}^1/_2 A \\ \log \sin x\end{matrix}\right\} = 9{,}80807$

$\cos x = (1 - (\sin x)^2)^{1/2}$; $B = -2 \log \cos x$
$\log \cos x = \log \sin x + {}^1/_2 A$

$\log \sin x = 9{,}65054$	$\log \sin x = 9{,}53578$
$B = 0{,}69892$	$B = 0{,}92844$
$A = 0{,}60200$	$= 0{,}87396$
$\left.\begin{matrix}\log \sin x + {}^1/_2 A \\ \log \cos x\end{matrix}\right\} = 9{,}95154$	$\left.\begin{matrix}\log \sin x + {}^1/_2 A \\ \log \cos x\end{matrix}\right\} = 9{,}97276$

B. Die Zahlenreihen höhern Ranges und die Stufenreihen.

1. Die Zahlenreihen (die arithmetischen Reihen) höhern Ranges.

Erklärung. Wenn man in einer Reihe von Zahlen jede vorhergehende von der nächstfolgenden abzieht, ſo heisen die dadurch erhaltenen Unterschiede die ersten Unterschiede. 398.

Wenn man in der Reihe der $\mathfrak{a}$ten Unterschiede wieder jedes Glied von dem nächstfolgenden abzieht, ſo erhält man die $\mathfrak{a} + 1$ten Unterschiede.

Erklärung. Eine Zahlenreihe (arithmetische Reihe) pten Ranges heist eine Reihe von Zahlen, deren pte Unterschiede alle einander gleich ſind. 399.

Wir bezeichnen das $\mathfrak{a}$te Glied der Zahlenreihe mit ${}^0a_\mathfrak{a}$, das $\mathfrak{a}$te Glied der cten Unterschiede mit ${}^ca_\mathfrak{a}$.
Die allgemeine Bezeichnung der Zahlenreihe pten Ranges ist alſo

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
{}^0a_1 & & {}^0a_2 & & {}^0a_3 & & {}^0a_4 & & {}^0a_5 & & {}^0a_6 & & {}^0a_7 & & {}^0a_8 \\
& {}^1a_1 & & {}^1a_2 & & {}^1a_3 & & {}^1a_4 & & {}^1a_5 & & {}^1a_6 & & {}^1a_7 & \\
& & {}^2a_1 & & {}^2a_2 & & {}^2a_3 & & {}^2a_4 & & {}^2a_5 & & {}^2a_6 & & \\
& & & {}^3a_1 & & {}^3a_2 & & {}^3a_3 & & {}^3a_4 & & {}^3a_5 & & & \\
& & & & {}^4a_1 & & {}^4a_2 & & {}^4a_3 & & {}^4a_4 & & & & \\
& & & & & {}^5a_1 & & {}^5a_2 & & {}^5a_3 & & & & & \\
& & & & & & {}^6a_1 & & {}^6a_2 & & & & & & \\
& & & & & & & {}^7a_1 & & & & & & &
\end{array}
$$

Satz. $\quad {}^ca_{n+1} = {}^ca_n + {}^{c+1}a_n \qquad {}^ca_{n+1} = {}^ca_n + {}^{c+1}a_n$ 400.

Bei den Zahlenreihen höhern Ranges ist das $n + 1$te Glied der cten Unterschiede gleich der Summe aus den beiden nten Gliedern der cten und der $c + 1$ten Unterschiede.

Beweis: Nach 398 ist in der Reihe der cten Unterschiede das $n + 1$te Glied weniger dem nten Gliede gleich dem $n + 1$ten Unterschiede und zwar gleich dem nten Gliede der $c + 1$ten Unterschiede, d. h.

$${}^ca_{n+1} - {}^ca_n = {}^{c+n}a_n \,. \qquad \text{alſo auch} \qquad {}^ca^{n+1} = {}^ca_n + {}^{c+1}a_n \,.$$

Beispiele: Es ist ${}^0a_7 = {}^0a_6 + {}^1a_6$, es ist ${}^4a_3 = {}^4a_2 + {}^5a_2$.

Satz. In einer Zahlenreihe pten Ranges ſind alle $p + \mathfrak{a}$ten Unterschiede gleich Null, wo $\mathfrak{a}$ eine Pluszahl. 401.

Beweis: Unmittelbar aus 399.

Satz. Das allgemeine nte Glied der cten Unterschiede einer Zahlenreihe pten Ranges. 402.

$${}^c a_{n+1} = {}^c a_1 + n^{\cdot 1}\,{}^{c+1}a_1 + n^{\cdot 2}\,{}^{c+2}a_1 + n^{\cdot 3}\,{}^{c+3}a_1 + \cdots + n^{\cdot n-1}\,{}^{c+n-1}a_1 + {}^{c+n}a_1$$
$$= S n^{\cdot a}\,{}^{c+a}a_1$$

hier sind alle Glieder der $p + a$ten Unterschiede ${}^{p+a}a$ Null.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 1$, denn ${}^c a_2 = {}^c a_1 + {}^{c+1}a_1$ nach 400.

2. Wenn der Satz für ${}^c a_{n+1}$ gilt, (Annahme) so gilt er auch für ${}^c a_{n+2}$ (Folgerung); denn nach 400 ist

$${}^c a_{n+2} = {}^c a_{n+1} + {}^{c+1}a_{n+1}$$
$$= {}^c a_1 + n^{\cdot 1}\,{}^{c+1}a_1 + n^{\cdot 2}\,{}^{c+2}a_1 + \cdots + n^{\cdot n-1}\,{}^{c+n-1}a_1 + {}^{c+n}a_1$$
$$+ \quad {}^{c+1}a_1 + n^{\cdot 1}\,{}^{c+2}a_1 + \cdots + n^{\cdot n-2}\,{}^{c+n-1}a_1 + n^{\cdot n-1}\,{}^{c+n}a_1 + {}^{c+n+1}a_1$$
$$= {}^c a_1 + (n+1)^{\cdot 1}\,{}^{c+1}a_1 + (n+1)^{\cdot 2}\,{}^{c+2}a_1 + \cdots$$
$$+ (n+1)^{\cdot n-1}\,{}^{c+n-1}a_1 + (n+1)^{\cdot n}\,{}^{c+n}a_1 + {}^{c+n+1}a_1$$

da $(n+1)^{\cdot a} = n^{\cdot a} + n^{\cdot a-1}$ (nach 391).

3. Also gilt der Satz nach 23 allgemein.

403. **Satz.** ${}^{c-1}a_{n+1} - {}^{c-1}a_1 = {}^c a_1 + {}^c a_2 + {}^c a_3 + \cdots + {}^c a_n = \underset{1,n}{S}\,{}^c a_a$

Die Summe der n ersten Glieder der $c$ten Unterschiede ist gleich dem $n + 1$ten Gliede weniger dem ersten Gliede der $c - 1$ten Unterschiede.

Beweis: Nach 400 ist ${}^{c-1}a_a = {}^{c-1}a_{a-1} + {}^c a_{a-1}$, mithin ist, wenn wir stets für ${}^{c-1}a_a$ den Wert einsetzen,

$${}^{c-1}a_{n+1} = {}^{c-1}a_n + {}^c a_n = {}^{c-1}a_{n-1} + {}^c a_{n-1} + {}^c a_n$$
$$= {}^{c-1}a_{n-2} + {}^c a_{n-2} + {}^c a_{n-1} + {}^c a_n \qquad \text{u. s. w.}$$
$$= {}^{c-1}a_1 + {}^c a_1 + {}^c a_2 + \cdots + {}^c a_n$$

also wenn wir ${}^{c-1}a_1$ auf die linke Seite schaffen

$${}^{c-1}a_{n+1} - {}^{c-1}a_1 = {}^c a_1 + {}^c a_2 + \cdots + {}^c a_n.$$

404. **Satz. Die Summe der n ersten Glieder der $c$ten Unterschiede einer Zahlenreihe $p$ten Ranges.**

$$\underset{1,n}{S}\,{}^c a_a = n^{\cdot 1}\,{}^c a_1 + n^{\cdot 2}\,{}^{c+1}a_1 + n^{\cdot 3}\,{}^{c+2}a_1 + \cdots$$
$$+ n^{\cdot n-1}\,{}^{c+n-2}a_1 + {}^{c+n-1}a_1 = \underset{1,n}{S}\, n^{\cdot a}\,{}^{c+a-1}a_1$$

hier sind alle Glieder der $p + a$ten Unterschiede ${}^{p+a}a$ Null.

Beweis: Nach 400 ist ${}^{c-1}a_{n+1} = {}^{c-1}a_1 + n^{\cdot 1}\,{}^c a_1 + n^{\cdot 2}\,{}^{c+1}a_1 + n^{\cdot 3}\,{}^{c+2}a_1$
$$+ \cdots + n^{\cdot n-1}\,{}^{c+n-2}a_1 + {}^{c+n-1}a_1$$

mithin ist $\underset{1,n}{S}\,{}^c a_a = {}^{c-1}a_{n+1} - {}^{c-1}a_1 = n^{\cdot 1}\,{}^c a_1 + n^{\cdot 2}\,{}^{c+1}a_1 + n^{\cdot 3}\,{}^{c+2}a_1 + \cdots$
$$+ n^{\cdot\, n-1}\,{}^{c+n-}a_1 + {}^{c+n-1}a_1$$
$$= \underset{1,n}{S}\, n^{\cdot a}\,{}^{c+a-1}a_1.$$

Die Zahlenreihe zweiten Ranges heist eine Reihe von Vieleckszahlen (Polygonalzahlen), wenn ${}^0a = 1$ und ${}^1a = 1$ ist. Für das $n$eck ist ${}^2a = n - 2$.

Die Zahlenreihe dritten Ranges heist eine Reihe von Turmzahlen (Pyramidalzahlen), wenn ${}^0a$, ${}^1a$ und ${}^2a$ alle gleich Eins, für die n eckige Base des Turmes ist ${}^3a = n - 2$.
Die Zahlenreihe p ten Ranges heist eine Reihe figurirter Zahlen (series numerorum figuratorum) wenn ${}^0a$, ${}^1a$, ${}^2a \cdots {}^{p-1}a$ alle gleich Eins sind, und ${}^pa$ eine ganze Pluszahl ist.

B. Die Stufenreihe ersten Ranges nebst Zins- und Renten-Rechnung.

Erklärung. Eine Stufenreihe ersten Ranges, (eine geometrische Reihe ersten Ranges) heist eine Reihe von Zahlen, wenn in ihr jede Zahl geteilt durch die nächstvorhergehende denselben Bruch giebt. 405.
Es bezeichnen in der Stufenreihe ersten Ranges a das erste, t das n te Glied, b den Folgebruch d. h. ein Glied geteilt durch das nächstvorhergehende, S die Summe der n ersten Glieder.

Gesetz der Stufenreihe (geometrischen Reihe) ersten Ranges. 406.
Für die Stufenreihe (geometrische Reihe) ersten Ranges hat man folgende Formeln

$$t = ab^{n-1} \qquad S = \frac{tb - a}{b - 1} \qquad S = a\frac{b^n - 1}{b - 1} = a\frac{1 - b^n}{1 - b}.$$

Die Summe einer Stufenreihe ersten Grades erhält man, indem man das erste Glied mit dem Unterschiede aus der Eins und der n ten Höhe des Folgebruches vervielfacht und durch den Unterschied aus der Eins und dem Folgebruche teilt.

Beweis: 1. Die erste Formel folgt unmittelbar aus der Erklärung 405.

2. Um die Summe zu finden, schreibt man die Reihe zweimal in gleicher Folge, aber das zweite mal mit b vervielfacht und zieht die erste von der zweiten ab, dann hat man

$$\begin{aligned} S &= a + ab + ab^2 + \cdots + t \\ Sb &= \quad\;\; ab + ab^2 + \cdots + t + tb \\ \hline Sb &- S = tb - a, \text{ mithin} \end{aligned}$$

$$S = \frac{tb - a}{b - 1}.$$

Die dritte Formel erhält man, wenn man den Wert von t aus der ersten Formel einführt und die letzte Formel, wenn man Zähler und Nenner mit -1 vervielfacht.

Beispiele: 3, 9, 27, 81, 243, 729 $S = \frac{729 \cdot 3 - 3}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 1092.$

Bruch 3 3 3 3 3 3.

407. **Erklärung. Zinsen und Renten.** Wenn das Vermögen (Kapital) 1 durch Zinsen nach einem Jahre $1 + \frac{p}{100}$ wird, so nennt man p den **Zinsfus**, $z = 1 + \frac{p}{100}$ den **Zinsfach** (den Zinsfaktor) und bezeichnet $\frac{p}{100}$ durch p % gelesen p Prozente.

Wenn am Anfange jedes Jahres eine gleiche Summe eingezahlt wird, so heist diese ein **jährlicher Beitrag** b, wenn am Anfange jedes Jahres eine gleiche Summe ausgezahlt wird, so heist diese eine **Jahresrente** r.

Beispiel: Sei der Zinsfus 5, so ist das Zinsfach $z = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}_{05}$.
Sei der Zinsfus $4^1/_2$, so ist das Zinsfach $z = 1 + \frac{4{,}_5}{100} = 1{,}_{045}$.

Bemerkt wird, dass hier stets mit Zinseszins gerechnet wird. d. h. dass auch die Zinsen von den Zinsen mit berechnet werden, wie dies für Rentenrechnung und Sammlung eines Vermögens notwendig ist.

408. **Satz. Das Vermögen (Kapital) k hat nach n Jahren bei dem Zinsfache z den Wert x, wo**

$$x = kz^n.$$

Beweis: Unmittelbar aus der Erklärung 407.

Beispiele: Das Kapital 1000 ℳ hat nach 20 Jahren beim Zinsfuse 5 den Wert von $1000 \cdot (1{,}_{05})^{20} = 2653{,}_{30}$ ℳ

409. **Satz. Ein Vermögen k hatte vor n Jahren bei dem Zinsfache z den Wert x, wo**

$$x = kz^{-n}.$$

Beweis: Nach 408 ist $k = xz^n$, mithin $x = \frac{k}{z^n} = kz^{-n}$.

410. **Satz. Der jährliche Beitrag b giebt nach n Jahren ein Vermögen (Kapital) x, wo** $x = bz\frac{z^n - 1}{z - 1}$.

Beweis: Der erste Beitrag steht n Jahre und verwandelt sich also in bz^n (nach 408), der letzte steht ein Jahr und wird bz, die Summe aller dieser Werte ist mithin

$$x = bz^n + bz^{n-1} + \cdots + bz^2 + bz = bz\frac{z^n - 1}{z - 1} \text{ (nach 406)}$$

Beispiele: Sei der jährliche Beitrag b = 100 ℳ und sei er n = 20 Jahre zu zahlen, so ist nach 20 Jahren das Vermögen x beim Zinsfuse 5

$$x = 100 \cdot 1{,}_{05}\frac{(1{,}_{05})^{20} - 1}{1{,}_{05} - 1} = 105 \cdot \frac{(1{,}_{05})^{20} - 1}{0{,}_{05}} = \frac{105}{0{,}_{05}} \cdot 1{,}_{65330} = 3471{,}_{93} \text{ ℳ}.$$

Satz. Wie gros muss gegenwärtig ein Vermögen (Kapital) x 411.
ſein, wenn daraus n Jahre die Jahresrente r gezahlt werden ſoll? Antwort:

$$x = r\,\frac{z^n - 1}{(z-1)\,z^{n-1}}.$$

Beweis: Die erste Rente r wird ſofort gezahlt, die zweite r nach einem Jahre, ſie hat alſo gegenwärtig den Wert rz^{-1} (nach 409), die nte r nach n — 1 Jahren, ſie hat alſo gegenwärtig den Wert $rz^{-(n-1)}$, mithin ist

$$x = r + rz^{-1} + rz^{-2} + \cdots + rz^{-(n-1)}$$
$$= (rz^n + rz^{n-1} + rz^{n-2} + \cdots - rz) : z^n$$
$$= \frac{rz}{z^n} \cdot \frac{z^n - 1}{z - 1} = r\,\frac{z^n - 1}{(z-1)z^{n-1}}.$$

Beispiele: Sei die Jahresrente r = 100 ℳ und ſei ſie n = 20 Jahre zu zahlen, ſo muss das gegenwärtige Vermögen x ſein.

$$x = 100\,\frac{(1{,}05)^{20} - 1}{(1{,}05 - 1)(1{,}05)^{19}} = 1308{,}53 \text{ ℳ}$$

Satz. Wie gros muss der jährliche Beitrag x ſein der n Jahre ge- 412.
zahlt wird, wenn man dafür q Jahre die Jahresrente r erhalten will und die erste Jahresrente ein Jahr nach dem letzten Beitrage gezahlt wird? Antwort.

$$x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}.$$

Beweis: Der jährliche Beitrag x ist (nach 410) nach n Jahren $xz\,\frac{z^n - 1}{z - 1}$, und dies muss (nach 411) gleich $r\,\frac{z^q - 1}{(z-1)z^{q-1}}$ ſein, alſo ist

$$xz\,\frac{z^n - 1}{z - 1} = r\,\frac{z^q - 1}{(z-1)z^{q-1}}, \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}.$$

Beispiele: Sei n = 15 Jahre, q = 25 Jahre, die Jahresrente 100 ℳ, Zinsfus 5, ſo ist $x = \frac{100}{(1{,}05)^{25}} \frac{(1{,}05)^{25} - 1}{(1{,}05)^{15} - 1} = 65{,}32$ ℳ

C. Die Höhenreihen oder Potenzreihen.

Erklärung. Eine Höhenreihe oder Potenzreihe von x 413.
heist eine Reihe, in welcher jedes Glied ein Zeug einer Vorzahl (eines Koeffizienten) mit einer Höhe der Baſe x ist, und bei welcher alle Glieder, welche dieſelbe Höhe von x enthalten, in ein Glied zuſammengefasst, die Glieder aber nach der Stufe von x geordnet ſind.

Die Form einer Höhenreihe von x ist $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots$

Kommt eine Höhe von x in der Höhenreihe nicht vor, ſo ſagt man, ihre Vorzahl sei Null.

In zwei Höhenreihen gleicher Baſe nennt man die zu gleicher Stufe gehörigen Vorzahlen einander entsprechend.

414. **Satz.** **Zwei Höhenreihen (Potenzreihen) gleicher Baſe fügt man zu, indem man die entsprechenden Vorzahlen (Koeffizienten) zufügt, und die zugehörigen Höhen unverändert lässt, d. h. es ist**

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdot\cdot) + (\mathfrak{a}x^n + \mathfrak{b}x^{n-1} + \cdot\cdot)$$
$$= (a + \mathfrak{a})\, x^n + (b + \mathfrak{b})\, x^{n-1} + \cdots$$

Beweis: Unmittelbar aus 122.

415. **Satz:** **Von einer Höhenreihe (Potenzreihe) zieht man eine Höhenreihe gleicher Baſe ab, indem man von jeder Vorzahl (Koeffizienten) der erstern die entsprechende der letztern abzieht und die zugehörigen Höhen unverändert lässt, d. h. es ist**

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdot\cdot) - (\mathfrak{a}x^n + \mathfrak{b}x^{n-1} + \cdot\cdot)$$
$$= (a - \mathfrak{a})\, x^n + (b - \mathfrak{b})\, x^{n-1} + \cdots$$

Beweis: Unmittelbar aus 131.

416. **Satz.** **Eine Höhenreihe (Potenzreihe) der Baſe x vervielfacht man mit** $\mathfrak{a}x^m$, **indem man jede Vorzahl derſelben mit** $\mathfrak{a}$ **vervielfacht und zu jeder Stufe m zufügt, d. h. es ist**

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdot\cdot)\, \mathfrak{a}x^m = a\mathfrak{a}x^{m+n} + b\mathfrak{a}x^{m+n-1} + \cdots$$

Beweis: Unmittelbar aus 180.

417. **Satz.** **Eine Höhenreihe (Potenzreihe) der Baſe x teilt man durch** $\mathfrak{a}x^m$, **indem man jede Vorzahl derſelben durch** $\mathfrak{a}$ **teilt und von der Stufe m abzieht, d. h. es ist**

$$(ax^n + bx^{n-1} + \cdot\cdot) : (\mathfrak{a}x^m) = \frac{a}{\mathfrak{a}}\, x^{n-m} + \frac{b}{\mathfrak{a}}\, x^{n-m-1} + \cdot\cdot$$

Beweis: Unmittelbar aus 180.

418. **Satz.** **Zwei Höhenreihen (Potenzreihen) gleicher Baſe vervielfacht man mit einander, indem man die eine derſelben mit jedem Gliede der andern vervielfacht und die erhaltenen Höhenreihen zufügt, d. h. es ist**

$$(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdot\cdot)(\mathfrak{a}x^m + \mathfrak{b}x^{m-1} + \mathfrak{c}x^{m-2} + \cdot\cdot)$$
$$= a\mathfrak{a}x^{n+m} + b\mathfrak{a}x^{n+m-1} + c\mathfrak{a}x^{n+m-2} + \cdot\cdot$$
$$+ a\mathfrak{b}x^{n+m-1} + b\mathfrak{b}x^{n+m-2} + \cdot\cdot$$
$$+ a\mathfrak{c}x^{n+m-2} + \cdot\cdot$$
$$= a\mathfrak{a}x^{n+m} + (b\mathfrak{a} + a\mathfrak{b})\, x^{n+m-1} + (c\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + a\mathfrak{c})x^{n+m-2} + \cdot\cdot$$

Beweis: Unmittelbar aus 180.

Satz. Wenn man zwei Höhenreihen gleicher Base mit einander 419.
vervielfacht, so erhält man die zu einer Stufe p gehörige Vorzahl, indem man je zwei Vorzahlen, deren Stufen p zur Summe haben, mit einander vervielfach, und die erhaltenen Zeuge zufügt.

Satz. Eine Höhenreihe A teilt man durch eine zweite B, in- 420.
dem man das erste Glied der erstern durch das erste Glied der zweiten teilt und das Ergebniss C als erstes Glied des Bruches setzt. Indem man dann mit diesem Gliede C den ganzen Nenner B vervielfacht, das erhaltene Zeug von dem Zähler A abzieht, den Rest demnächst aufs Neue durch den Nenner B teilt und den auf gleiche Weise gefundenen Bruch zu dem zuerst gefundenen zufügt, d. h. es ist

$$\frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B}.$$

Beweis:

$$\frac{A}{B} = \frac{A + BC - BC}{B} \qquad \text{(nach 129)}$$

$$= \frac{BC + A - BC}{B} \qquad \text{(nach 131)}$$

$$= \frac{BC}{B} + \frac{A - BC}{B} \qquad \text{(nach 170)}$$

$$= C + \frac{A - BC}{B} \qquad \text{(nach 167).}$$

D. Die Reihenzahlen oder Systemzahlen.

Die Lehre von den Reihenzahlen behandelt die Zahlen des gewöhnlichen zehnteiligen Systemes von einem neuen Gesichtspunkte aus, indem sie jede Zahl als eine Summe von Höhen betrachtet. Neue Gesetze lehrt dieselbe nicht; dagegen ist es lehrreich und für die Anwendung auf die Reihen von Bedeutung auch diese Betrachtungsweise kennen zu lernen.

Erklärung. Eine **Reihenzahl** heist eine Höhenreihe (eine 421.
Systemzahl), wenn die Base x eine ganze Zahl gröser als Eins, die Vorzahlen (Koeffizienten) aber ganze Zahlen von 0 bis x—1 sind. Die Base heist dann die **Grundzahl**. Man schreibt die Reihenzahl, indem man nach der Reihe die Vorzahlen von der höchsten bis zur 0 ten Höhe hinschreibt. Hinter die Vorzahl von x^0 setzt man ein Komma, wenn noch Höhen mit Strichstufen oder mit negativen Exponenten folgen, und nennt dann die Reihe rechts vom Komma einen **Reihenbruch**.

Ist die Grundzahl 10, so heist die Reihenzahl eine **Zehnzahl** (dekadische Systemzahl), der Reihenbruch ein **Zehntbruch** (Dezimalbruch).

Beispiel: $5003 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^0$; $5{,}003 = 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-3}$.

Man hat verschiedene Zahlen, gewöhnlich 10 zur Grundzahl der Reihenzahlen genommen. Jetzt haben alle Völker die 10 als Grundzahl angenommen, indem sie sich an die 10 Finger der Hände angeschlossen haben, welche zum Abzählen benutzt wurden und von Kindern auch jetzt noch benutzt werden. Die Deutschen haben schlieslich noch den Versuch gemacht, über das zehnteilige System hinaus in das zwölfteilige überzugehen, welches zahlreiche Vorzüge besitzt, da in 12 die Zahlen 2, 3, 4, 6 aufgehen, während in 10 nur 2 und 5 aufgehen; aber der Versuch ist nicht durchgeführt und muss daher aufgegeben werden.

Jetzt sind allgemein die indischen (die sogenannten arabischen) Ziffern im Gebrauche, und werden nur die Vorzahlen oder Koeffizienten als Ziffern geschrieben, die Stufen oder Exponenten von Zehn aber durch die Stelle der Ziffer bezeichnet.

422. **Erklärung. In der Reihenzahl der Zehnzahlen bezeichnet die Stelle der Ziffer die Stufe oder den Exponenten der Grundzahl, und zwar bezeichnet die Ziffer a auf der Stelle links neben dem Komma $a \cdot 10^0$ oder die Einer. Die auf der mten Stelle links von den Einern (oder die, welche bis zum Komma m Stellen rechts neben sich hat) ist $a \cdot 10^m$, die auf der mten Stelle rechts vom Komma ist $a \cdot 10^{-m}$. Die Stellen, wo keine Wertziffer steht, erhalten eine 0. So bezeichnet 0,05 die $5 \cdot 10^{-2}$.**

Nach den Stellen teilt man die ganzen Zahlen ein in Einer (erste Stelle, 10^0), in Zehner (zweite Stelle, 10^1), in Hunderte (dritte Stelle, 10^2), in Tausende (vierte Stelle, 10^3), in Zehntausende (fünfte Stelle, 10^4) und in Hunderttausende (sechste Stelle, 10^5).

Ist die Reihenzahl noch gröser, so teilt man die Zahlen in je 6 Stellen und bezeichnet je 6 Stellen durch einen Strich oben. Es heist dann die siebente Stelle oder 10^6 eine Million, die dreizehnte Stelle oder 10^{12} eine Billion, 10^{18} eine Trillion, 10^{24} eine Quadrillion, 10^{30} eine Quinquillion, 10^{36} eine Sexillion u. s. w.

Nach den Stellen teilt man die Zehntbrüche (Dezimalbrüche), in Zehntel (— erste Stelle, 10^{-1}), in Hundertel (— zweite Stelle, 10^{-2}), in Tausendtel (— dritte Stelle, 10^{-3}), in Milliontel 10^{-6}, in Billiontel 10^{-12} u. s. w.

Dritter Abschnitt der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre: Die Richtgröse, die Winkelfolgen und die Winkeltafeln.

11. Die Richtgröse, die Winkelfolge und die Winkeltafeln.

Wir haben durch das Logen und Tiefen bereits eine neue Gröse, die Unzahl oder Irrationalzahl, kennen gelernt, indessen lies ſich dieſelbe doch noch durch einen Zehntbruch darstellen und gehörte demnach in die Reihe der Zahlen.

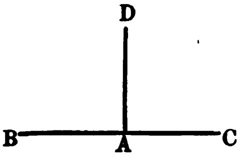
Durch das Tiefen lernen wir aber noch eine andre Art von Grösen kennen, das ist die zweite Tiefe aus — 1, nämlich $(-1)^{1/2}$, welche ganz aus der Reihe der Zahlen heraustritt und eine ganz eigentümliche Bedeutung gewinnt. Bereits 1545 hat Cardano auf dieſe Gröse aufmerkſam gemacht; John Wallis nannte 1673 die Gröse $(-a)^{1/2}$ eine magnitudo imaginaria und dieſen Namen hat ſie behalten, aber erst in dieſem Jahrhundert ist die Gröse $(-1)^{1/2}$, namentlich durch Gauss und Cauchy einer eingehenden Betrachtung und wissenschaftlichen Behandlung unterworfen worden. Gauss führte 1801 für dieſe Gröse das Zeichen i ein, welches jetzt allgemein angenommen ist. Die Gröse a + ib nannte er eine magnitudo complexa und wies die Bedeutung dieſer Gröse in der Anschauung und im Raume nach; er gelangte dadurch zu den Folgen oder Funktionen der Winkel, welche in der Formenlehre eine ſo überaus grose Bedeutung beſitzen und deren Kenntniss für jeden Gebildeten unentbehrlich ist.

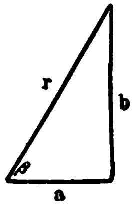
1. Die Richtgröse.

Erklärung. Das J oder die imaginäre Eins heist die zweite Tiefe aus Stricheins. Die Jgröse (die imaginäre Gröse) heist das Zeug oder Produkt aus i und einer Zahl. 423.

Das Zeichen des J ist i, das Zeichen der Jgröse ist ia, wo a eine beliebige Zahl ist.

Der Name imaginäre Gröse bezeichnet dieſe Gröse als nur dem Scheine nach, nur in der Einbildung bestehend, während dieſe Gröse in der Wirklichkeit eine nahe ebenſo grose Bedeutung hat, wie die Zahl oder die reelle Gröse. Es kommt nur darauf an, dass man ſie gleich von vorne herein in ihrer Bedeutung richtig erkennt, und ſie ſich anschaulich macht, ſo dass man ſich wirklich bei jeder derſelben etwas denkt und vorstellt. Das Eigentümliche bei





der Jgröse ist nun, dass z. B. in dem Raume, während + a die Linie AB und — a die entgegengeſetzte Linie AC bezeichnet, ia oder $(-1)^{1/2}$a die Mitte zwischen + a und — a, d. h. die ſenkrechte Linie AD auf a bezeichnet. In a + ib bezeichnen alſo a und b zwei Katheten im rechtwinkligen Dreiecke (und zwar bezeichnet i die ſenkrechte Lage der Linie b zu a). Die Hypotenuſe r ist hier die Linie, für welche $r^2 = a^2 + b^2$ ist; die Gröse $\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}$ bezeichnet, die Verhältnisse $\frac{a}{r}$ und $\frac{b}{r}$, d. h. die der beiden Katheten zur Hypotenuſe Es ist einleuchtend, dass hier $\frac{a}{r} = \cos\beta$ und dass $\frac{b}{r} = \sin\beta$ ist, dass alſo $\frac{a}{r} + i\frac{b}{r} = \cos\beta + i\sin\beta$ ist und dass wir alſo durch Einführung der Gröse i und der Gröse a + ib ſofort zu den Sätzen über die Winkel und zu den Sätzen über die Funktionen der Winkel, d. h. über den Sinus und Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Winkels gelangen.

Die ganzen Sätze der Trigonometrie ergeben ſich demnach aus dieſer dehnenden Zahlenlehre.

424. **Satz.** $i = (-1)^{1/2}$ $i^2 = -1$

Das J (die imaginäre Eins) ist gleich der zweiten Tiefe aus Stricheins und das Quader des J ist Stricheins.

425. **Satz.** $(-a)^{1/2} = i \cdot a^{1/2}$

Die zweite Tiefe einer Strichzahl ist gleich dem Zeuge oder Produkte von i und der zweiten Tiefe der entsprechenden Pluszahl.

Beweis: Es ist $(-a)^{1/2} = ((-1) \cdot a)^{1/2}$ (nach 158)

$= (-1)^{1/2} \cdot a^{1/2}$ (nach 346)

$= i \cdot a^{1/2}$ (nach 424)

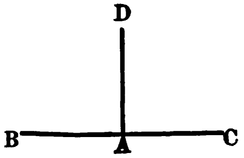
426. **Erklärung. Die Richtgröse oder die komplexe Gröse heist die Summe einer Zahl und einer Jgröse a + ib. Die Zahl a heist die erste Zahl, die Zahl b die zweite Zahl.**

Der Richtwert (der poſitive Wert der komplexen Gröse) r heist die zweite Tiefe aus der Summe der Quader der beiden Zahlen der Richtgröse, d. h. $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Die Richteinheit (die komplexe Einheit) heist die Richtgröse, deren Richtwert eins ist, d. h. wo $(a^2 + b^2)^{1/2} = 1$ ist.

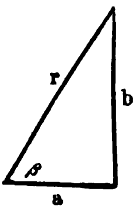
Gleich heisen zwei Richtgrösen oder komplexe Grösen $a + ib$ und $\alpha + i\beta$ dann und nur dann, wenn die entsprechenden Zahlen gleich ſind, d. h. wenn $a = \alpha$ und zugleich $b = \beta$ ist. Die Richtgrösen und die Zahlen heisen gemeinſam Zahlengrösen.

Es ist dringend notwendig, dass man ſich ſogleich bei dieſer Erklärung eine Anschauung verschaffe, was man ſich unter der Richtgröse zu denken habe, damit die Gedanken eine klare Unterlage haben und man ſieht, wohin die Betrachtung führen ſoll. Die Betrachtung im Raume wird uns dieſe Anschauung gewähren.



Sei alſo $AB = 1$, ſo wird $AC = -1$ ſein, es wird alſo $i = (-1)^{1/2}$ die Mitte zwischen beiden halten müssen, d. h. das Lot AD auf CB und zwar gleicher Gröse ſein müssen.

In der Tat betrachten wir den Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$, ſo ist $r^2 = a^2 + b^2$. Hier ist alſo a die Grundſeite, b die ſenkrechte oder die lotrecht auf der Grundſeite errichtete Seite, welche mit der Grundſeite einen rechten Winkel bildet, r die Hypotenuſe oder Spannſeite des rechtwinkligen Dreiecks. Das J bezeichnet alſo im Raume eine Seite, welche nicht in der Linie der Grundſeite liegt, welche man alſo nicht zu ihr zuſügen, auch nicht von ihr abziehen kann, welche vielmehr einen bestimmten feststehenden Winkel mit ihr bildet, und man hat in der Mathematik festgestellt, dass dieſer Winkel stets ein rechter ſein ſolle, der weder nach der einen, noch nach der andern Seite neige, ſondern ſenkrecht auf der Grundſeite aufgerichtet ist.



Hieraus rechtfertigt ſich denn auch der Name Richtgröse und Richtwert, welchen ich für dieſelbe in die Wissenschaft einführe. Der Name magnitudo complexa, welchen Gauss in ſeinem latein geschriebenen Werke dafür hat, und welchen man dann ins Deutsche übernommen hat, bezeichnet eigentlich die umfassende, umschliesende Gröse, ist demnach wenig passend und ist bereits lange vor Einführung der Richtgröse $a + ib$ für Geschiede verwandt. Leibniz hat den Ausdruck Complexio zuerst am 7. März 1666 in der Disputatio arithmetica de complexionibus (Opera omnia ed Dutens III S. 1—10) für die Geschiede der Kombinationslehre verwandt und für dieſe Geschiede ist der Ausdruck denn auch in Gebrauch geblieben. Es ist unwissenschaftlich und verwirrend, wenn man denſelben Ausdruck für ſo gänzlich verschiedene Grösen verwenden will. Es empſiehlt ſich demnach der Name Richtgröse.

Dies vorausgeschickt, ſo ergiebt ſich ſehr klar aus der Anschauung, dass

man zwei Richtgrösen (komplexe Grösen) $a + ib$ und $\alpha + i\beta$ dann und nur dann gleich fetzen kann, wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$ ist; denn a und b bezeichnen hier die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, der Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$ bezeichnet die Hypotenufe desfelben. Alle diefe Verhältnisse find aber nur gleich, wenn die rechtwinkligen Dreiecke deckend oder kongruent find, d. h. wenn zwei Seiten in den Dreiecken gleich find.

Dasfelbe folgt aber auch ohne Anschauung aus dem Begriffe der Richtgröse; denn in derfelben find a und b ganz unabhängig von einander und kann demnach $a + ib$ nur dann gleich $\alpha + i\beta$ fein, wenn fowohl $a = \alpha$, als auch $b = \beta$ ist.

427. **Satz.** $r^2 = a^2 + b^2$ **wenn $a + ib$ gegeben.**
Bei jeder Richtgröse ist die Summe der beiden Quader der Zahlen gleich dem Quader des Richtwertes der Gröse.

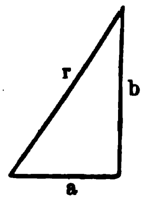
Beweis: Unmittelbar aus 426.

428. **Erklärung. Die Lotfeiten oder die Katheten heisen die beiden Zahlen und zwar heist die erste Zahl die anliegende Lotfeite; die Spannfeite oder die Hypotenufe heist der Wert der Richtgröse.**

Es führt diefe Benennung die Richtgrösen dem Verständnisse näher. Cauchy nennt den Richtwert der Richtgröse den module oder Modulus, die Richteinheit nennt er den terme reduit, den reduzirten Ausdruck. Beide Namen find aber weder bezeichnend, noch schön. Der Richtwert der Richtgröse ist im Kreife der Halbmesser, im rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenufe.

429. **Satz. Für die Richtgrösen (die komplexen Grösen) gelten alle Gefetze des Zufügens und Abziehens, des Vervielfachens und Teilens**
oder
die Gefetze der ersten und zweiten Ordnung find für die Richtgrösen diefelben wie für die Zahlen, fofern man beachtet, dass $ii = -1$ ist.

Beweis. Es ist fowohl i als auch ib eine einwertige Gröse, und zwar ist i eine Einheit, ib eine benannte Zahl; ebenfo giebt es nur eine Gröse, welche zu $a + ib$ gefügt die gleiche Summe giebt, es gilt alfo auch trennbares Zufügen; ebenfo giebt es nur eine Gröse, welche mit $a + ib$ vervielfacht oder verwebt das gleiche Zeug giebt, es gilt alfo auch trennbares Verweben; alfo gelten auch die Gefetze des Abziehens und des Verteilens.



430. **Satz.** $(a + ib) + (\alpha + i\beta) = (a + \alpha) + i\,(b + \beta)$
$(a + ib) - (\alpha + i\beta) = (a - \alpha) + i\,(b - \beta)$.
Statt Richtgrösen (komplexe Grösen) zuzufügen oder abzuziehen, kann man ihre entsprechenden Zahlen zufügen oder abziehen.

Beweis: Unmittelbar aus 426.

Beispiele: $(5 + i3) + (8 + i6) = (5 + 8) + i\,(3 + 6) = 13 + i9$
$(9 + i6) - (5 + i4) = (9 - 5) + i\,(6 - 4) = 4 + i2.$

Satz. $(a + ib)(\alpha + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i\,(a\beta + b\alpha).$ 431.

Das Zeug oder Produkt zweier Richtgrösen (zweier komplexer Grösen) ist gleich einer Richtgröse, deren erste Zahl das Zeug der ersten beiden Zahlen weniger dem Zeuge der zweiten beiden Zahlen ist und deren zweite Zahl die Summe der beiden Zeuge aus der ersten Zahl der einen und der zweiten Zahl der andern Richtgröse ist. Der Richtwert des Zeuges ist das Zeug der Richtwerte der Fache oder Faktoren.

Beweis: $(a + ib)(\alpha + i\beta) = a\alpha + ia\beta + ib\alpha + iib\beta$ (nach 180)
$= (a\alpha - b\beta) + i\,(a\beta + b\alpha)$ (nach 426)

der Richtwert des Zeuges ist $(a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2$
$= (a\alpha)^2 - 2a\alpha b\beta + (b\beta)^2 + (a\beta)^2 + 2a\alpha b\beta + (b\alpha)^2$
$= (a\alpha)^2 + (b\beta)^2 + (a\beta)^2 + (b\alpha)^2$
$= (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2).$

Beispiele: $(5+i6)(8+i3) = (5\cdot8-6\cdot3) + i\,(5\cdot3+6\cdot8) = 22 + i\cdot63$
$(8+i4)(6+i3) = (8\cdot6-4\cdot3) + i\,(8\cdot3+4\cdot6) = 36 + i\cdot48$

Satz. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2.$ 432.

Das Zeug zweier Richtgrösen (zweier komplexer Grösen), deren entsprechende Zahlen gleichwertig ſind, während die zweiten Zahlen entgegengeſetztes Zeichen haben, ist gleich dem Quader des Richtwertes (des poſitiven Wertes der komplexen Gröse).

Beweis: $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 + i\,(ab-ab)$ (nach 431)
$= a^2 + b^2 = r^2$ (nach 135 und 427).

Beispiel: $(9+i\cdot5)(9-i\cdot5) = 81+25 = 106$
$(6+i\cdot7)(6-i\cdot7) = 36+49 = 85.$

Cauchy und Gauss nennen die Richtgrösen $a + ib$ und $a - ib$ reciproke oder geparte Werte; dieſe Benennung ist passend und daher beizubehalten.

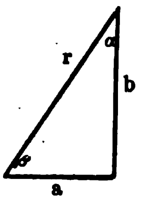
Satz. $\dfrac{a + ib}{\alpha + i\beta} = \dfrac{(a + ib)(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$ 433.

Beweis: Man vervielfache Zähler und Nenner mit $\alpha - i\beta$, ſo ergiebt ſich die Formel aus 431.

Satz. $\dfrac{a + ib}{r} = \dfrac{a}{r} + i\,\dfrac{b}{r}$ **ist eine Richteinheit oder** 434.

Jede Richtgröse (komplexe Gröse), geteilt durch ihren Richtwert ist eine Richteinheit (eine (komplexe Einheit).

Beweis: Es ist in der Richtgröse $a + ib$ (nach 426) der Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$, teilt man nun die Richtgröse durch diesen Richtwert, so ist in der neuen Gröse



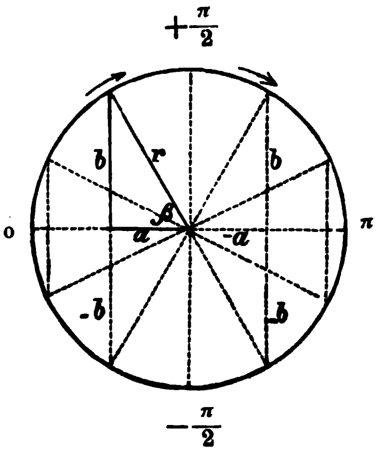
$\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}$ der Richtwert $\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{1/2} = \frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{r} = \frac{r}{r} = 1$, also ist die neue Richtgröse eine Richteinheit, deren Richtwert 1 ist, nach 426.

Jeder sieht hier mit dem ersten Blicke auf das nebenstehende rechtwinklige Dreieck, dass hier $\frac{a}{r}$ der Cosinus, $\frac{b}{r}$ der Sinus des Winkels β ist, und dass wir hier unmittelbar in der Richteinheit die Folgen oder Funktionen der Winkel erhalten. Das i vor dem Sinus zeigt dabei an, dass die Kathete des Sinus senkrecht auf der des Cosinus steht.

Die folgende Erklärung ist der einfache Ausdruck dieses Verhältnisses; selbstredend muss, wenn die Erklärung für alle Winkel auch für die mehrfacher Umschwenkung gelten soll, den Verhältnissen des Kreises und der Folgen des Winkels Rechnung getragen werden. Der Halbmesser oder Radius des Kreises ist hierbei stets der Richtwert r.

2. Der Winkel, der Sinus und der Cosinus.

435. **Erklärung. Der Winkel der Richteinheit heist der Winkel β zwischen der Grundseite und dem Richtwerte. Derselbe wird gleich Eins gesetzt, wenn sein Kreisbogen dem Richtwerte oder dem Halbmesser des Kreises gleich ist.**



Der Kreisumfang ist dann 2π oder $2 \times 3{,}14159265359$; er wird in 24 Stunden oder in 360 Grade, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden geteilt. Der rechte Winkel ist gleich 90 Grade oder gleich $\frac{1}{2}\pi$.

Der echte Winkel ist der Winkel innerhalb des einfachen Umkreises oder zwischen $+\pi$ und $-\pi$ oder zwischen $+180^0$ und -180^0 und zwar wird dieser einfache Umkreis in 4 Rechte geteilt. Der erste Plusrechte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, der zweite Plus-

rechte von $\frac{\pi}{2}$ bis π, der erste Strichrechte von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$, und der zweite Strichrechte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$.

Die Gröse des Kreisumfanges oder $2 \times \pi$ ist in der Formenlehre genau berechnet, wir werden diese Berechnung im folgenden Zweige kennen lernen, hier nehmen wir einfach den berechneten Wert auf.

Die Gröse eines Grades 1^0, einer Minute $1'$ und einer Sekunde $1''$ in Teilen des Halbmessers ist

$$1^0 = 0{,}01745329252 \qquad 1' = 0{,}00029088820866 \qquad 1'' = 0{,}0000048481368$$

Es wäre viel richtiger den Kreis in 24 Stunden (h), diese aber zehnteilig weiter zu teilen. Es wäre dann $1^h = \frac{1}{12}\pi = 0{,}261799387799$, und alle folgenden Teile, also $\frac{1}{10^n}$ Stunde $=: 10^n$.

Erklärung. Der Ergänzungswinkel (das complementum) zum Winkel β heist der Winkel $(90^0 - \beta)$ oder $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Der Nebenwinkel des Winkels β heist der Winkel $(180^0 - \beta)$ oder $(\pi - \beta)$. 436.

Die Erklärung ist einfach aus der Raumlehre aufgenommen, um den Sätzen im Folgenden eine bequemere Form geben zu können.

Erklärung. Der Cos oder der Cosinus β heist die erste Zahl der Richteinheit, der Sin oder der Sinus β heist die zweite Zahl der Richteinheit oder der komplexen Einheit. 437.

Die Zeichen cos und sin beziehen sich, wenn keine Klammer steht, stets auf alle folgenden Grösen desselben Gliedes bis zum nächsten Plus- oder Strichzeichen.

Man bezeichnet den sinus allgemein mit sin, den cosinus mit cos; es empfiehlt sich diese beiden Funktionen im Deutschen daher kurz den Sin und den Cos zu nennen und die lateinische Endung us bez. inus fortzulassen. Jeder kann dann den Sin und den Cos lesen, wie es ihm beliebt.

Die Zeichen sin und cos sind Zeichen von Folgen oder Funktionen. Wie jedes Zeichen einer Folge, beziehen sich auch die Zeichen des sin und des cos stets auf die folgenden Grösen und zwar, wenn keine Klammer steht, stets auf alle dem Zeichen folgenden Grösen desselben Gliedes bis zum nächsten Plus- oder Strichzeichen. Es folgt diese Regel aus dem allgemeinen Gesetze für alle Formelzeichen, welche sich auf die folgenden Grösen beziehen.

Es ist demnach $\sin 2\pi = \sin(2\pi)$, $\sin(2n+1)\pi = \sin[(2n+1)\pi]$, dagegen ist $\sin a + b = (\sin a) + b$ also verschieden von $\sin(a+b)$. Eine besondere Aufmerksamkeit erfordern die Ausdrücke $\sin x^2$, $\sin^2 x$ und $(\sin x)^2$, zumal hier die Deutschen eine fehlerhafte Schreibweise beobachten. Zunächst ist $\sin x^2 = \sin(x^2)$, hierüber kann ein Zweifel nicht obwalten. Dagegen wird das Zeichen $\sin^2 x$ von den Deutschen fehlerhaft so gebraucht, dass sie $\sin^2 x = (\sin x)^2$

ſetzen, während die Franzoſen $\sin^2 x = \sin \cdot \sin x = \sin(\sin x)$ ſetzen. Hier haben die Franzoſen offenbar die richtige Bezeichnung gewählt, denn $\sin^2$ kann keinen andern Sinn haben als $\sin \cdot \sin$, während es ganz fehlerhaft ist bei $\sin^2 x$, das Stufenzeichen auf den ganzen Ausdruck beziehen zu wollen. Beispielsweiſe kann $a^2 b$ nie gleich $(ab)^2$ geſetzt werden, alſo auch nicht $\sin^2 x = (\sin x)^2$. Die deutsche Schreibweiſe muss demnach aufgegeben, die franzöſische aber eingeführt werden. Auch $\log^2 x$ ist dann gleich $\log \log x = \log(\log x)$.

Zu bemerken ist noch, dass man $(\sin x)^2$ am besten lieſ't „sin x ganz hoch 2“, wo das ganz bezeichnet, dass der ganze Ausdruck hoch 2 genommen werden ſoll.

438. **Satz.** $\cos\beta = \frac{a}{r}$; $\sin\beta = \frac{b}{r}$; $\frac{a}{r} + i\frac{b}{r} = \cos\beta + i\sin\beta$.

Der Cos des Winkels der Richteinheit ist die erste Zahl, der Sin des Winkels der Richteinheit ist die zweite Zahl der Richteinheit oder der komplexen Einheit.

Beweis: Unmittelbar aus 437.

439. **Satz.** $(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta) = 1$

$$\cos\beta - i\sin\beta = \frac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}.$$

Das Zeug zweier Richteinheiten (komplexer Einheiten), deren Cosinus gleich, deren Sinus entgegengeſetzt ſind, ist eins.

Beweis, Unmittelbar aus 432.

440. **Satz.** $a + ib = r(\cos\beta + i\sin\beta)$ wo $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Jede Richtgröse (komplexe Gröse) ist gleich dem Richtwerte mal der Richteinheit, wo $\cos\beta$ die erste Zahl und $\sin\beta$ die zweite Zahl ist.

Beweis: Es ist $a + ib = \frac{r}{r}(a + ib)$ (nach 167)

$$= r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right) \quad \text{(nach 180)}$$

$$= r(\cos\beta + i\sin\beta) \quad \text{(nach 437).}$$

441. **Satz.** $(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$; $\cos\beta = (1 - (\sin\beta)^2)^{1/2}$;

$$\sin\beta = (1 - (\cos\beta^2))^{1/2}$$

Die Summe der beiden Quader des Cos und des Sin eines Winkels ist Eins.

Beweis: Unmittelbar aus 434.

442. **Satz.** $\cos\beta = \text{Mitt.}\,[-1, +1]$ $\sin\beta = \text{Mitt.}\,[-1, +1]$

Die Gröse des Cos und des Sin aller Winkel ist ein Mittel zwischen Stricheins und Pluseins, dieſe Gröse eingeschlossen.

Beweis: Nach 438 ist $\cos\beta = \frac{a}{r}$, $\sin\beta = \frac{b}{r}$ und nach 427

ist $r^2 = a^2 + b^2$, alſo ist $r^2 - b^2 = a^2$ und hier ist b entweder gleich Null oder ungleich Null.

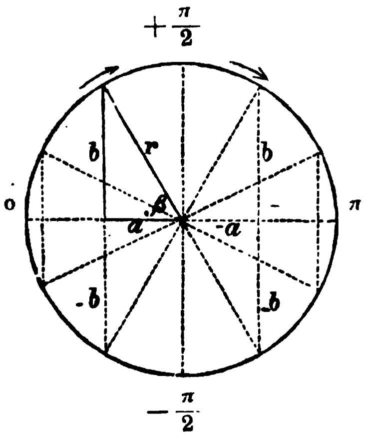
Wenn $b = 0$ ist, ſo ist $r^2 = a^2$, alſo $\cos\beta = \frac{a}{r} = +1$, wenn beide Zahlen gleiche, dagegen $= -1$, wenn beide entgegengeſetzte Vorzeichen haben.

Wenn $b \gtrless 0$ ist, ſo ist $r^2 > a^2$ nach 142. Hier ist r eine Plusgröse. Sei nun auch a eine Plusgröse, ſo ist nach 377 auch $r > a$, mithin ist $\frac{a}{r}$ nach 205 eine echte Bruchzahl, d. h. $\frac{a}{r}$ nach 206 kleiner als Eins oder ein Mittel zwischen 0 und $+1$.

Sei a eine Strichgröse, ſo ist der Zahlenwert von $\frac{a}{r}$ eine echte Bruchzahl kleiner als Eins, alſo die Gröse $\frac{a}{r}$ ſelbst ein Mittel zwischen 0 und -1. Was alſo auch $\frac{a}{r}$ für ein Vorzeichen habe, ſo ist stets $\cos\beta = \frac{a}{r}$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Ganz ebenſo folgt, dass $\sin\beta = \frac{b}{r}$ stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$ ist.

Der Satz folgt ſehr leicht aus der Anschauung im Kreiſe. Jede Sehne im Kreiſe ist kleiner als der Durchmesser oder gleich dem Durchmesser; die auf dem Durchmesser ſenkrechte halbe Sehne ist ebenſo kleiner bis gleich mit dem Halbmesser. Ebenſo folgt der Satz leicht aus dem rechtwinkligen Dreiecke, jede Kathete ist kleiner als die Hypotenuſe.

Um die Werte von $\cos\beta$ und $\sin\beta$ zu bestimmen, müssen noch die Festſetzungen getroffen werden, wann eine dieſer Formeln etwa der Sin den Wert gleich Null haben ſoll. Wie jeder leicht aus der Anschauung im Kreiſe, d. h. hier aus der nebenstehenden Zeichnung erſieht, ist für die Winkel 0 und π der Sin gleich Null. Da der einfache Umkreis 2π beträgt, ſo hat der Winkel $2\pi + \beta$ wieder denſelben Wert wie β und ſind auch der Sin und der Cos wieder dieſelben.



Ebenſo muss festgesetzt werden, welches Vorzeichen der Sin und der Cos haben ſollen. Wie eine leichte Betrachtung der nebenstehenden Zeichnung zeigt, hat der Sin in den Plusrechten Pluszeichen, in den Strichrechten Strich-

zeichen; dagegen hat der Cos in den beiden ersten Rechten (dem ersten Plusrechten und dem ersten Strichrechten) Pluszeichen, in den beiden zweiten Rechten Strichzeichen. Hieraus ergiebt ſich, dass wir für den entgegengeſetzten Winkel den Sin entgegengeſetzt, den Cos dagegen gleich ſetzen müssen und dass wir für den Nebenwinkel den Sin gleich, den Cos aber entgegengeſetzt ſetzen müssen, wenn wir mit den Geſetzen der Winkelfunktionen oder Winkelfolgen übereinstimmen wollen. Hiernach ergiebt ſich folgende Erklärung.

443. **Erklärung. Wenn n eine ganze Zahl ist, ſo ſetzen wir den Sin oder den Sinus des Winkels $n\pi$ gleich Null.**

Der Sin und der Cos haben im ersten Plusrechten einen Pluswert.

Der Sin des entgegengeſetzten Winkels ist der entgegengeſetzte Wert; die Cose der entgegengeſetzten Winkel ſind gleich.

Die Sine der Nebenwinkel ſind gleich; der Cos des Nebenwinkels ist der entgegengeſetzte Wert.

444. **Satz.** $\sin(-\beta) = -\sin\beta \qquad \cos(-\beta) = \cos\beta$
Der Sin des entgegengeſetzten Winkels hat den entgegengeſetzten Wert. Die Cose entgegengeſetzter Winkel ſind gleich.

Beweis: Unmittelbar aus 443.

445. **Satz.** $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta \qquad \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta.$
Die Sine der Nebenwinkel ſind einander gleich. Der Cos des Nebenwinkels hat den entgegengeſetzten Wert.

Beweis: Unmittelbar aus 443.

446. **Satz. Der Sin hat einen Pluswert in den beiden Plusrechten, einen Strichwert in den beiden Strichrechten.**

Der Cos hat einen Pluswert in den ersten beiden Rechten (dem ersten Plusrechten und dem ersten Strichrechten), einen Strichwert in den zweiten beiden Rechten.

Beweis: Der Sin hat nach 443 einen Pluswert im ersten Plusrechten und da die Nebenwinkel nach 445 gleichen Sin haben, auch im zweiten Plusrechten, d. h. in den beiden Plusrechten. Dagegen hat der Sin einen Strichwert in den beiden Strichrechten, da entgegengeſetzte Winkel nach 444 entgegengeſetzten Sin haben.

Der Cos hat nach 443 einen Pluswert im ersten Plusrechten und da die entgegengeſetzten Winkel nach 444 gleichen Cos haben, auch im ersten Strichrechten, mithin in den ersten beiden Rechten. Dagegen hat der Cos einen Strichwert in den zweiten beiden Rechten, da nach 445 Nebenwinkel entgegengeſetzten Cos haben.

447. **Satz.** $\cos(-\beta) + i\sin(-\beta) = \cos\beta - i\sin\beta = \dfrac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}$

Die Richteinheiten (die komplexen Einheiten) entgegengesetzter Winkel haben den umgekehrten Wert.

Beweis: $\cos(-\beta) + i \sin(-\beta) = \cos\beta - i \sin\beta$ (nach 444)

$$= \frac{1}{\cos\beta - i\sin\beta} \quad \text{(nach 439).}$$

Satz. 448.

$$\cos(180^\circ - \beta) + i\sin(180^\circ - \beta) = -\cos\beta + i\sin\beta = -\frac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}$$

$$\cos(180^\circ + \beta) + i\sin(180^\circ + \beta) = -\cos\beta - i\sin\beta = -(\cos\beta + i\sin\beta)$$

Die Richteinheiten (die komplexen Einheiten) der Nebenwinkel haben den entgegengesetzten und zugleich den umgekehrten Wert.

Satz. $\sin n\pi = 0$; $\cos 2n\pi = 1$; $\cos(2n+1)\pi = -1$ 449.
wo n eine ganze Zahl.

Der Sinus des Winkels von $n\pi$ ist Null, der Cosinus des Winkels von $2n\pi$ ist $+1$, der von $(2n+1)\pi$ ist -1, fofern n eine ganze Zahl ist.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus 442, danach ist $\sin n\pi = 0$. Nun ist aber nach 441 auch $(\cos n\pi)^2 + (\sin n\pi)^2 = 1$, mithin, da $\sin n\pi = 0$, fo ist $(\cos n\pi)^2 = 1$, alfo $\cos n\pi = \pm 1$ nach 157. Nun haben wir in 446 bewiefen, dass der Cos in den ersten beiden Rechten (im ersten Plusrechten und im ersten Strichrechten) eine Pluszahl, in den zweiten beiden Rechten eine Strichzahl ist; demnach ist $\cos 2n\pi = +1$ und $\cos(2n+1)\pi = -1$.

Satz. Wenn zwei Richtgrösen (zwei komplexe Grösen) gleich find, fo find auch ihre Richtwerte und ihre echten Winkel gleich und dürfen fich die unechten Winkel nur um $2n\pi$ Winkelraum unterscheiden, wo n eine ganze Zahl. Oder Annahme 450.

$a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = b(\cos\beta + i\sin\beta)$, **wo a und b** $\gtrless 0$,

α **und** $\beta =$ **Mitt.** $[+\pi, -\pi]$ **Folgerung** $a = b$, $\alpha = \beta$

Beweis: 1. Da die Richtgrösen gleich find, fo find nach 426 auch ihre entsprechenden Zahlen gleich, alfo auch die Pluswerte, d. h. nach 427 auch $a = b$.

2. Die Gleichung der Annahme wird demnach

$a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = a(\cos\beta + i\sin\beta)$, mithin da $a \gtrless 0$ ist auch

$\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\beta + i\sin\beta$, alfo nach 426 b auch

$\cos\alpha = \cos\beta$ und $\sin\alpha = \sin\beta$.

Wenn nun die Winkel α und β echt find, d. h. zwischen π und $-\pi$ liegen, und die Cosinus gleich find, fo müssen die Winkel entweder gleich oder einander entgegengefetzt fein. Letzteres ist, wenn die Winkel nicht gleich 0 oder

π ſind, nicht möglich, da entgegengeſetzte Winkel entgegengeſetzten Sinus haben, und alſo dann $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ einander entgegengeſetzt ſein würden, was gegen die Annahme ist; alſo ist nur das erstere möglich, d. h. $\alpha = \beta$.

Wenn aber einer der Winkel, z. B. α gleich 0 oder π ist, ſo ist ſein Cosinus im ersteren Falle 1, im letzteren -1, alſo auch $\cos\beta$ im ersteren Falle $+1$, im letzteren -1, alſo auch β im ersteren Falle null, im letzteren π. Alſo auch in dieſen Fällen $\alpha = \beta$. — Wenn α und β auch unechte Winkel ſein dürfen, ſo können ſie ſich, da ſowohl ihr Sinus als ihre Coſinus gleich ſind, nur um eine ganze Anzahl von Winkelräumen, d. h. um $2n\pi$ unterscheiden.

451. **Satz.** $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$. **Statt zwei Richteinheiten (komplexe Einheiten) mit einander zu vervielfachen, kann man ihre Winkel zufügen. Das Zeug oder Produkt ist wieder eine Richteinheit.**

Beweis: Nach 431 ist das Zeug oder Produkt der Richteinheiten

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= [(\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta] + i\,[(\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta].$$

Und hier ist nach 431 der Richtwert des Zeuges das Zeug der Richtwerte der Fache oder Faktoren. Da nun die Fache Richteinheiten ſind, ſo ist der Richtwert jedes Faches nach 426 gleich Eins, alſo der Richtwert des Zeuges gleich $1 \cdot 1 = 1$ nach 97, mithin das Zeug oder Produkt eine Richteinheit, alſo von der Form $\cos\gamma + i\sin\gamma$, wo γ eine Folge von α und β alſo $\gamma = \alpha \circ \beta$, wo noch die Bedeutung der Knüpfung zu bestimmen bleibt. Es ist alſo

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha\circ\beta) + i\sin(a\circ\beta)$$

und zwar ſind nach 426 die ersten Zahlen gleich und ebenſo die zweiten, alſo:

$$\cos(\alpha\circ\beta) = (\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\circ\beta) = (\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta.$$

Um nun die Bedeutung der Knüpfung zu bestimmen, ſetzen wir erstens $\alpha = 0$; dann ist nach 449 $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, alſo

$$\cos(0\circ\beta) = \cos\beta \qquad \sin(0\circ\beta) = \sin\beta.$$

Wir ſetzen zweitens $\beta = 0$; dann ist $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$, alſo

$$\cos(\alpha\circ 0) = \cos\alpha \qquad \sin(\alpha\circ 0) = \sin\alpha.$$

Die Knüpfung $\alpha\circ\beta$ ist alſo die Knüpfung, für welche Null die nicht ändernde Gröse ist, d. h. die Knüpfung ist die Zufügung oder Addition nach 71. Es ist demnach

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Man hätte den Satz auch leicht aus den Formeln der Trigonometrie für den Cos und den Sin der Summe der Winkel ableiten können; aber unſer Weg ist einfacher und kürzer und daher vorzuziehen, zumal dabei keine Hülfsſätze aus andern Wissenschaften vorausgeſetzt werden.

Für diejenigen, welchen die Sätze der Trigonometrie geläufiger sind, lasse ich hier noch die Ableitung aus der Trigonometrie folgen: Es ist nach der Trigonometrie

$$\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta \text{ ; mithin ist}$$
$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) =$$
$$= [(\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta] + i\,[(\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta]$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Will man den echten Winkel des Zeuges (Produktes) finden, so muss man falls nicht schon die Summe der Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, so oft 2π hinzufügen oder abziehen, bis der Rest jener Bedingung genügt. Das Zufügen oder das Abziehen von $2\pi = 360^0$ ändert bekanntlich in dem Werte der Sinus und Cosinus nichts, also auch nichts in dem Werte der Richtgröse.

Satz. $\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta$ 452.
$\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta.$

Der Cos der Summe zweier Winkel ist gleich dem Zeuge der Cose weniger dem Zeuge der Sine.

Der Sin der Summe zweier Winkel ist gleich der Summe der beiden Zeuge aus dem Sin des einen und dem Cos des andern Winkels

Beweis: Nach 451 ist

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= [(\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta] + i\,[(\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta].$$

Nach 426 müssen hier die ersten Zahlen einander gleich und ebenso die zweiten Zahlen einander gleich sein; also ist

$$\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta.$$

Satz. $\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha)\cos\beta + (\sin\alpha)\sin\beta$ 453.
$\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha)\cos\beta - (\cos\alpha)\sin\beta.$

Der Cos des Unterschieds zweier Winkel ist gleich der Summe von dem Zeuge der Cos und dem Zeuge der Sin.

Der Sin des Unterschieds zweier Winkel ist gleich dem Zeuge aus dem Sin des ersten mit dem Cos des zweiten Winkels weniger dem Zeuge aus dem Cos des ersten mit dem Sin des zweiten Winkels.

Beweis: Man setze in den Formeln des Satzes 452 $+\beta = -\gamma$ und setze nach 444 $\sin(-\gamma) = -\sin\gamma$ $\cos(-\gamma) = \cos\gamma$, so folgt

$$\cos(\alpha-\gamma) = (\cos\alpha)\cdot\cos(-\gamma) - (\sin\alpha)\cdot\sin(-\gamma) \quad \text{(nach 533)}$$
$$= (\cos\alpha)\cdot\cos\gamma + (\sin\alpha)\sin\gamma \quad \text{(nach 525)}$$
$$\sin(-\gamma) = (\sin\alpha)\cdot\cos(-\gamma) + (\text{con}\,\alpha)\sin(-\gamma) \quad \text{(nach 533)}$$
$$= (\sin\alpha)\cdot\cos\gamma - (\cos\alpha)\sin\gamma \quad \text{(nach 525).}$$

Satz. $\sin 2\alpha = 2(\sin\alpha)\cos\alpha$ 454.
$\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = 1 - 2(\sin\alpha)^2 = 2(\cos\alpha)^2 - 1.$

Der Sin des doppelten Winkels ist gleich dem doppelten Zeuge aus dem Sin und Cos des einfachen Winkels.

Der Cos des doppelten Winkels ist gleich dem doppelten Quader vom Cos des einfachen Winkels weniger Eins.

Beweis: Die ersten beiden Formeln folgen unmittelbar aus 452, wenn man α statt β ſetzt. Die letzten beiden Formeln folgen aus der zweiten Formel, wenn man nach 442 $(\cos\alpha)^2 = 1 - (\sin\alpha)^2$, bez. $(\sin\alpha)^2 = 1 - (\cos\alpha)^2$ einführt.

455. **Satz. Der Sin und der Cos des halben Winkels**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^{1/2} \quad ; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^{1/2}$$

Beweis: Unmittelbar aus 454. Es ist

$$\cos 2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha)^2 = 2(\cos\alpha)^2 - 1;$$

wenn man $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ ſetzt, dann ist

$$\cos\gamma = 1 - 2\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2; \text{ alſo } \left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos\gamma}{2} \text{ und}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \pm\left(\frac{1-\cos\gamma}{2}\right)^{1/2} \text{ und ebenſo folgt}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \pm\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^{1/2}.$$

456. **Satz.** $\cos(n + 1/2)\pi = 0 \quad ; \quad \sin(2n + 1/2)\pi = 1 \quad ;$
$\sin(2n - 1/2)\pi = -1$

wo n eine ganze Zahl.

Der Cos des Winkels von $(n + 1/2)\pi$ ist Null, der Sin des Winkels von $(2n + 1/2)\pi$ ist $+1$, der von $(2n - 1/2)\pi$ ist -1, ſofern n eine ganze Zahl ist.

Beweis: Nach 455 ist $\cos\frac{\pi}{2} = \pm\left(\frac{1+\cos\pi}{2}\right)^{1/2}$

$$= \pm\left(\frac{1-1}{2}\right)^{1/2} = 0 \qquad \text{(nach 449).}$$

Ebenſo ist $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ (nach 444).

Nach 536 ist $\sin\frac{\pi}{2} = \pm\left(\frac{1-\cos\pi}{2}\right)^{1/2} = \pm\left(\frac{1+1}{2}\right)^{1/2} = \pm 1$ (nach 449).

Aber nach 527 hat der $\sin\frac{\pi}{2}$ einen Pluswert, alſo ist $\sin\frac{\pi}{2} = +1$

dagegen ist $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ (nach 450).

Die Vergröserung der Winkel um $2n\pi$ ändert nach 450 die Sin und Cos nicht; mithin gilt der Satz ganz allgemein.

Satz. $\cos 90^0 = 0 \qquad \sin 90^0 = 1.$ 457.

Der Cos 90° ist Null, der Sin 90° ist Eins.

Beweis: Unmittelbar aus 456.

Satz. $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{2^{1/2}} = {}^1/_2\,(2)^{1/2}.$ 458.

Der Cos 45° und der Sin 45° sind einander gleich und zwar ein jeder gleich der Hälfte von zwei in der ein halbten.

Beweis: Unmittelbar nach 455, wenn man $\alpha = 90^0$ setzt und beachtet, dass $\cos 90^0 = 0$ nach 457 ist.

Satz. Der Cos x wächst von -1 bis $+1$ für den Winkel x von $(2n-1)\pi$ bis $2n\pi$ und er nimmt ab von $+1$ bis -1 für den Winkel x von $2n\pi$ bis $(2n+1)\pi$. 459.

Der Sin x wächst von -1 bis $+1$ für den Winkel x von $(2n - {}^1/_2)\pi$ bis $(2n + {}^1/_2)\pi$ und er nimmt ab von $+1$ bis -1 für den Winkel x von $(2n + {}^1/_2)\pi$ bis $(2n + 1{}^1/_2)\pi$.

Beweis: Nach 442 sind cos x und sin x in den Grenzen zwischen -1 und $+1$; ihr kleinster Wert ist also -1, ihr gröster ist $+1$. Nach 449 ist $\cos(2n+1)\pi = -1$ der kleinste, $\cos 2n\pi = +1$ der gröste Wert des Cos. Nach 457 ist $\sin(2n - {}^1/_2)\pi = -1$ der kleinste, $\sin(2n + {}^1/_2)\pi = +1$ der gröste Wert des Sin. Hieraus wie aus 452 bez. 453 ergiebt sich der Satz.

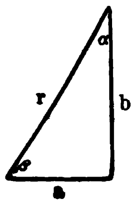
Satz. $$\cos(90^0 - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$ 460.

$$\sin(90^0 - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

Der Sin eines Winkels ist gleich dem Cos seines Ergänzungswinkels und der Cos eines Winkels ist gleich dem Sin seines Ergänzungswinkels.

Beweis: $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha + \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\alpha$$ (nach 453)

$$= \sin\alpha$$ (nach 456)



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\alpha - \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha$$ (nach 453)

$$= \cos\alpha$$ (nach 456).

Der Satz ist an der nebenstehenden Zeichnung im rechtwinkligen Dreiecke ungemein anschaulich.

461. **Satz.** $\cos\alpha + i\sin\alpha = \sin(90^0 - \alpha) + i\cos(90^0 - \alpha)$.
Die Richteinheiten (die komplexen Einheiten) der Ergänzungswinkel, vertauschen die erste Zahl mit der zweiten Zahl.

462. **Satz.** $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) =$
$= (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\cdots\cdots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$.
Statt mehre Richteinheiten (komplexe Einheiten) mit einander zu vervielfachen, kann man ihre Winkel zufügen. Das Zeug oder Produkt ist wieder eine Richteinheit.

Beweis: Angenommen der Satz gelte für α_m, alſo Annahme

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\cdots(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m)$$
$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)$$

ſo ſoll bewieſen werden, dass er auch für α_{m+1} gelte. Man ſetze $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \beta$, ſo ist nach 451

$$(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\alpha_{m+1} + i\sin\alpha_{m+1}) = \cos(\beta + \alpha_{m+1})$$
$$+ i\sin(\beta + \alpha_{m+1}).$$

Führt man nun statt $\cos\beta + i\sin\beta$ auf der linken Seite den Wert nach der Annahme, auf der rechten Seite für β den Wert $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ ein, ſo folgt der zu beweiſende Satz für α_{m+1} unmittelbar. Nun gilt der Satz für $m = 2$, mithin auch für jede folgende Zahl, alſo auch fortschreitend für $m = n$.

Auch hier muss bemerkt werden, dass, wenn man den echten Winkel des Zeuges (Produktes) finden will, dass man dann, falls nicht schon die Summe der Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, ſo oft 2π hinzufügen oder abziehen muss, bis der Rest jener Bedingung genügt. Das Zufügen oder das Abziehen von $2\pi = 360^0$ ändert bekanntlich in dem Werte der Sinus und Cosinus Nichts, alſo auch Nichts in dem Werte der Richtgröse.

463. **Satz.** $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ **wo n eine ganze Zahl. Statt eine Richteinheit (komplexe Einheit) zu einer ganzen Zahl zu erhöhen (zu potenziren) kann man ihren Winkel mit dieſer Zahl vervielfachen.**

Beweis: 1. Für $n = 0$ folgt der Satz einerſeits aus 319, dass $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^0 = 1$ und andrerſeits aus 449, dass $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$, alſo $\cos 0\alpha + i\sin 0\alpha = 1$.

2. Für n gleich einer Pluszahl folgt der Satz aus 462.

3. Für n gleich einer Strichzahl ſetze $n = -m$, ſo ist
$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos(-m\alpha) + i\sin(-m\alpha) = \cos m\alpha - i\sin m\alpha$
(nach 444)

$$= (\cos\alpha - i\sin\alpha)^m \qquad \text{(nach 463,}_2\text{)}$$
$$= \left(\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}\right)^m \qquad \text{(nach 440)}$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \qquad \text{(nach 332).}$$

Satz. $$\cos nx \stackrel{*}{=} (\cos x)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos x)^{n-4}(\sin x)^4 - \cdots \stackrel{*}{=} S(-1)^a n^{\cdot 2a}(\cos x)^{n-2a}\cdot(\sin x)^{2a}$$ 464.

$$\sin nx \stackrel{*}{=} n(\cos x)^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos x^{n-3})(\sin x)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos x)^{n-5}(\sin x)^5 - \cdots \stackrel{*}{=} S(-1)^a n^{\cdot 2a+1}(\cos x)^{n-(2a+1)}(\sin x)^{2a+1}$$

wo n eine ganze Zahl und $n^{\cdot m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$.

Beweis: $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$ (nach 463)

$$= (\cos x)^n + i\cdot n(\cos x)^{n-1}\sin x - n^{\cdot 2}(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2 - in^{\cdot 3}(\cos x)^{n-3}(\sin x)^3 + \cdots \qquad \text{(nach 393)}$$
$$= (\cos x)^n - n^{\cdot 2}(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2 + n^{\cdot 4}(\cos x)^{n-4}(\sin x)^4 - \cdots$$
$$+ i\,[n(\cos x)^{n-1}\sin x - n^{\cdot 3}(\cos x)^{n-3}(\sin x)^3 + n^{\cdot 5}(\cos x)^{n-5}(\sin x)^5 - \cdots]$$

Da nun nach 426 in den beiden Richteinheiten die ersten Zahlen einander gleich ſein müssen und ebenſo auch die zweiten Zahlen einander gleich ſein müssen, ſo folgt

$$\cos nx = (\cos x)^n - n^{\cdot 2}(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2 + n^{\cdot 4}(\cos x)^{n-4}(\sin x)^4 - \cdots$$
$$\sin nx = n(\cos x)^{n-1}\sin x - n^{\cdot 3}(\cos x)^{n-3}(\sin x)^3 + n^{\cdot 5}(\cos x)^{n-5}(\sin x)^5 - \cdots$$

Beispiele: $\sin 2x = 2(\cos x)\sin x$

$\sin 3x = 3(\cos x)^2\sin x - (\sin x)^3 = 3\sin x - 4(\sin x)^3$.

Satz. $[a(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n \stackrel{*}{=} a^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, **wo n eine ganze Zahl.** 465.

Statt eine Richtgröse (komplexe Gröse) zu einer ganzen Zahl zu erhöhen (zu potenziren) kann man ihren Richtwert zu dieſer Zahl erhöhen und ihren Winkel mit dieſer Zahl vervielfachen.

Beweis: $[a(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = a^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ (nach 326)

$= a^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ (nach 463).

3. Die Tangente, die Cotangente und die Winkeltafeln.

Erklärung. Die Tan oder die Tangente eines Winkels heist der Sin geteilt durch den Cos des Winkels. Die Cot oder die 466.

Cotange eines Winkels heist der Cos geteilt durch den Sin des Winkels.

Die Zeichen tan und cot ſind Folgen oder Funktionszeichen, ſie beziehen ſich daher, wenn keine Klammer steht, stets auf alle folgenden Grösen desſelben Gliedes bis zum nächsten Plus- oder Strichzeichen.

Auch hier gilt die Bemerkung zu 437.

467. **Satz.** $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$; $\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$; $\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta}$ auch

$$1 + (\tan\beta)^2 = \frac{1}{(\cos\beta)^2}$$

$$1 = (\cot\beta)^2 = \frac{1}{(\sin\beta)^2}.$$

Die Tan eines Winkels ist gleich dem Sin geteilt durch den Cos des Winkels; die Cot eines Winkels ist gleich dem Cos geteilt durch den Sin des Winkels. Die Cot ist der umgekehrte Wert der Tan.

Beweis: Unmittelbar aus 466.

Ferner ist $1 + (\tan\beta)^2 = 1 + \frac{(\sin\beta)^2}{(\cos\beta)^2} = \frac{(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2}{(\cos\beta)^2} = \frac{1}{(\cos\beta)^2}$

Und ebenſo ist $1 + (\cot\beta)^2 = \frac{1}{(\sin\beta)^2}$.

468. **Satz.** $\tan(-\beta) = \tan(180^\circ - \beta) = -\tan\beta$

$\cot(-\beta) = \cot(180^\circ - \beta) = -\cot\beta$.

Die Tan und die Cot des entgegengeſetzten Winkels und ebenſo die Tan und die Cot des Nebenwinkels haben den entgegengeſetzen Wert.

Beweis: Unmittelbar aus 444 und 445.

469. **Satz. Die Tan und die Cot haben einen Pluswert im ersten Plusrechten und im zweiten Strichrechten, dagegen einen Strichwert im zweiten Plusrechten und im ersten Strichrechten.**

Beweis: Unmittelbar aus 446.

470. **Satz.** $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - (\tan\alpha)\tan\beta}$; $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + (\tan\alpha)\tan\beta}$

Die Tan der Summe zweier Winkel ist gleich der Summe der Tane beider Winkel geteilt durch den Unterschied von 1 weniger dem Zeuge der beiden Tane. Die Tan des Unterschieds zweier Winkel ist gleich dem Unterschiede der beiden Tane geteilt durch die Summe von 1 und dem Zeuge der beiden Tane.

Beweis: Man teile Zähler und Nenner durch $(\cos\alpha)\cos\beta$ dann wird $\tan(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha \pm \beta) : \cos(\alpha \pm \beta)$ (nach 467)

$$= [(\sin\alpha)\cos\beta \pm (\cos\alpha)\cdot\sin\beta] : [(\cos\alpha)\cos\beta \mp (\sin\alpha)\sin\beta]$$ (nach 452, 453)

$$= \left[\frac{(\sin\alpha)\cos\beta}{(\cos\alpha)\cos\beta} \pm \frac{(\cos\alpha)\sin\beta}{(\cos\alpha)\cos\beta}\right] : \left[\frac{(\cos\alpha)\cos\beta}{(\cos\alpha)\cos\beta} \mp \frac{(\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\alpha)\cos\beta}\right]$$ (nach 167)

$$= [\tan\alpha \pm \tan\beta] : [1 \mp (\tan\alpha)\tan\beta]$$ (nach 167)

Satz. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}$. 471.

Die Tan des doppelten Winkels ist gleich der doppelten Tan des einfachen Winkels geteilt durch den Unterschied von 1 weniger dem Quader der Tan.

Beweis: Unmittelbar aus 470.

Satz. Die Tan des halben Winkels $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 472.

Beweis: $\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ (nach 455)

Dies nach 182 mit $1+\cos\alpha$ erweitert giebt

$$\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \frac{1-(\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)^2} = \frac{(\sin\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)^2}$$ (nach 441)

Dagegen nach 182 mit $1-\cos\alpha$ erweitert giebt

$$\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-(\cos\alpha)^2} = \frac{(1-\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha)^2}$$ (nach 441).

Satz. 473.

$\tan n\pi = 0 = \cot(n+{}^1/_2)\pi$; $\tan(n+{}^1/_2)\pi = \infty = \cot n\pi$

Die Tan des Winkels $n\pi$ und die Cot des Winkels $(n+{}^1/_2)\pi$ sind Null; dagegen sind die Tan des Winkels $(n+{}^1/_2]\pi$ und die Cot des Winkels $n\pi$ unendlich.

Beweis: Unmittelbar aus 449 und 456.

Satz. Die Tan wächst in allen Winkelräumen von $-\infty$ bis 474.
$+\infty$ und zwar für den Winkel von $(\pi-{}^1/_2)\pi$ bis $(n+{}^1/_2)\pi$.
Die Cot nimmt in allen Winkelräumen ab und zwar von $+\infty$ bis $-\infty$ und zwar für den Winkel von $n\pi$ bis $(n+1)\pi$.

Beweis: Das Vorzeichen der Tan und Cot ergiebt sich aus 469, die Winkel, wo die Tan und Cot unendlich sind aus 473; daraus folgt der ganze Satz.

475. **Satz.** $\cot(90^0 - \alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

$$\tan(90^0 - \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha.$$

Die Tan eines Winkels ist gleich der Cot feines Ergänzungswinkels und die Cot eines Winkels ist gleich der Tan feines Ergänzungswinkels.

Beweis: Unmittelbar aus 460.

Zum Schluss der Lehre von den Winkelfolgen lasse ich noch eine Uebersicht über das Wachfen und die Vorzeichen diefer Winkelfolgen in den verschiedenen Winkelräumen folgen.

Ueberficht des Wachfens und der Vorzeichen der Winkelfolgen.

476. **Satz. Es wachfen**

für x von $(2n - {}^1/_2)\pi$ bis $(2n + {}^1/_2)\pi$ die sinx von -1 bis $+1$
für x von $(2n-1)\pi$ bis $2n\pi$ die cosx von -1 bis $+1$
für x von $(n - {}^1/_2)\pi$ bis $(n + {}^1/_2)\pi$ die tanx von $-\infty$ bis $+\infty$

Es nehmen ab

für x von $(2n + {}^1/_2)\pi$ bis $(2n + 1{}^1/_2)\pi$ die sinx von $+1$ bis -1
für x von $2n\pi$ bis $(2n+1)\pi$ die cosx von $+1$ bis -1
für x von $(n - {}^1/_2)\pi$ bis $(n + {}^1/_2)\pi$ die cotx von $+\infty$ bis $-\infty$.

Es find allgemein

$\sin(n\pi + (-1)^n x) = \sin x$ $\quad$ $\sin(n\pi - (-1)^n x) = -\sin x$
$\cos(2n\pi \pm x) = \cos x$ $\quad$ $\cos((2n+1)\pi \pm x) = -\cos x$
$\tan(n\pi + x) = \tan x$ $\quad$ $\tan(n\pi - x) = -\tan x$
$\cot(n\pi + x) = \cot x$ $\quad$ $\cot(n\pi - x) = -\cot x.$

Beweis: Zunächst ist ganz allgemein der Winkel von $2n\pi + x$, wo n eine ganze Zahl; gleich dem Winkel x, da $2n\pi$ der ganze Kreisumfang ist; ebenfo folgt dies unmittelbar aus den Formeln für die Summe $\sin(\alpha + \beta)$ u. f. w. Was nun die einzelnen Winkelfolgen betrifft, fo ist

1. $\sin(\pi - x) = \sin(180^0 - x) = \sin x$ (nach 445)

Mithin da $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ ist, fo ist auch

$$\sin(2n\pi + \pi - x) \sin x$$

alfo beides zufammengefasst

$$\sin(n\pi + (-1)^n x) = \sin x.$$

Ferner ist nach 444

$\sin(-x) = -\sin x$; mithin ist $\sin(n\pi - (-1)^n x) = -\sin x.$

2. Nach 444 ist $\cos(-x) = \cos x$; mithin $\cos(2n\pi \pm x) = \cos x$. Dagegen ist nach 444 $\cos(\pi - x) = -\cos x$; mithin ist

$$\cos((2n + 1)\pi \pm x) = -\cos x.$$

3. Nach 468 ist $\tan(-x) = \tan(\pi - x) = -\tan x$

$$\cot(-x) = \cot(\pi - x) = -\cot x$$

alſo allgemein $\tan(n\pi - x) = -\tan x$

$$\cot(n\pi - x) = -\cot x.$$

4. Nach 469 ist ebenſo $\tan(n\pi + x) = \tan x$

$$\cot(n\pi + x) = \cot x.$$

Satz. Die Winkeltafel oder die trigonometrische Logarithmentafel giebt zu jedem in Graden, Minuten und Sekunden gegebenen Winkel den Log (den Logarithmus) der Winkelfolgen: des Sinus, des Cosinus, der Tangente und der Cotangente. 477.

Es giebt Winkeltafeln mit 5 Ziffern, mit 7 Ziffern und mit 10 Ziffern. Die bequemsten und für das praktische Leben ausreichenden ſind die fünfziffrigen, welche wir daher der Betrachtung zu Grunde legen; die Benutzung der ſiebenziffrigen und der zehnziffrigen Winkeltafeln bietet dann keine Schwierigkeit mehr.

Die Berechnung der Zahlen und der Loge oder Logarithmen für die Sinus und Tangenten werden wir im folgenden Zweige, in der Folgelehre oder Funktionenlehre kennen lernen; die Art und Weiſe, wie eine ſolche Tafel berechnet wird, ist in der Folgelehre des Verfassers ausführlich dargestellt und kann hier darauf verwieſen werden. Jeder, der ſie kennen lernen will, kann ſie dort nachſehen. Wir nehmen die Winkeltafel hier als richtig an, zumal die Richtigkeit von jedem leicht geprüft werden kann, und wiederholt ſehr streng geprüft ist.

Jeder Gebildete muss die Winkeltafel leicht gebrauchen können und im Gebrauche derſelben die gröste Gewandtheit haben; dagegen ist es nicht erforderlich, dass er die Winkeltafeln ſelbst berechnet und geprüft habe; dies kann er den Mathematikern vom Fache überlassen.

Satz. Die praktischste Einrichtung der Winkeltafel oder der trigonometrischen Logarithmentafel. In der Winkeltafel oder der trigonometrischen Logarithmentafel dürfen nur zwei Winkelfolgen oder Funktionen: Sinus und Tangente aufgeführt werden, die Cosinus und die Cotangenten ſind gleich den Sinus und den Tangenten ihrer Ergänzungswinkel; dieſelben Zahlen können alſo für Sinus und für Cosinus und ebenſo für Tangenten und für Cotangenten dienen. Wenn die Sinus und Tangenten von links oben geleſen werden, ſo werden die Cosinus und Cotangenten von rechts unten geleſen. Die Sinus und Tangenten wachſen mit den Winkeln, die Cosinus und Cotangenten nehmen ab, wenn die Winkel wachſen. Bei 478.

dem Stellenloge (der characteristica) ist in den Tafeln stets Strichzehn (—10) zu ergänzen, fonst gelten auch für diefe Tafeln diefelben Regeln wie für die Loge oder Logarithmen.

Beweis: Unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen.

Beispiele: log sin 27° 32′ 35″ = 9,66538
log tg 52° 15′ 24″ = 10,12694
log cos 42° 23′ 16″ = 9,87521
log cot 57° 45′ 12″ = 9,79994.

In den gewöhnlichen trigonometrischen Logarithmentafeln werden die 4 Funktionen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente neben einander gedruckt, dafür aber nur von 0 bis 45° geführt; dies ist fehlerhaft. Viel besser ist es nur Sinus und Tangente in die Tafel aufzunehmen und zwar auf der linken Seite den Sinus, auf der rechten die Tangente und fie von 0° bis 90° hinter einander zu führen auf jeder Seite aber 11 Säulen für 0′ 1′ 2′ bis 10′ neben einander aufzuführen. Der Raum der Tafel nimmt dann nur 40 Hundertel der andern Tafel ein, jede Seite enthält dann 10° statt eines Grades, das Auffuchen geht daher viel schneller und ficherer von Statten und entspricht genau dem Verfahren bei der Logtafel, bedarf daher keiner befondern Uebung. Die beiden Funktionen Sinus und Tangente wachfen mit den Winkeln; die kleinen Hülfstafeln für die Sekunden lassen fich am Rande leicht zufügen. Die Funktionen, welche von unten aufgehen, Cosinus und Cotangente erscheinen dann schon durch ihre Stellung unten als abnehmende Funktionen, bei denen die kleinen Beträge für die Sekunden abgezogen werden müssen. Der Gebrauch der trigonometrischen Tafel ist dann ganz entsprechend dem der gewöhnlichen Logarithmentafel, ist nicht verwirrend und bedarf keiner befonderen Uebung. R. Grassmann, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, Stettin 1890 find in diefer Weife aufgestellt, bei der letzten Stelle ist durch den Druck markirt, ob die folgende Stelle über 5 oder unter 5 war. Wegen etwaiger Uebung verweife ich auf R. Grassmanns Uebungsheft.

Der Gebrauch der Tafel macht keine Schwierigkeiten und bedarf einer Anleitung nicht. Reiche Uebung ist auch hier jedem Gebildeten warm zu empfehlen.

Für den Gebrauch der Winkeltafeln bedürfen die Formeln für die Winkelfolgen noch einer Umgestaltung; denn da in den Winkeltafeln die Loge (die Logarithmen) der Winkelfolgen aufgeführt find, fo muss man möglichst alle die Formeln zu vermeiden fuchen, wo die Summen oder Unterschiede diefer Winkelfolgen vorkommen. Für diefen Zweck hat man die folgenden Umgestaltungen der Formeln.

479. **Satz.** $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2(\sin\alpha)\cos\beta;$
$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2(\cos\alpha)\cos\beta;$
$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2(\cos\alpha)\sin\beta;$
$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = 2(\sin\alpha)\sin\beta.$

Beweis: Unmittelbar aus 452 und 453 durch Zufügen bez. Abziehen.

Satz. $\sin\alpha + \sin\beta = 2(\sin {}^1/_2(\alpha+\beta))\cos {}^1/_2(\alpha-\beta);$ 480.

$\cos\alpha + \cos\beta = 2(\cos {}^1/_2(\alpha+\beta))\cos {}^1/_2(\alpha-\beta);$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2(\cos {}^1/_2(\alpha+\beta))\sin {}^1/_2(\alpha-\beta);$

$\cos\beta - \cos\alpha = 2(\sin {}^1/_2(\alpha+\beta))\sin {}^1/_2(\alpha-\beta).$

Beweis: Unmittelbar aus 479 wenn man $\alpha+\beta=\gamma$ und $\alpha-\beta=\delta$ fetzt, fo dass $\alpha = {}^1/_2(\gamma+\delta)$ und $\beta = {}^1/_2(\gamma-\delta)$ wird und dann für γ wieder α und für δ wieder β einführt.

Satz. 481.

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan {}^1/_2(\alpha+\beta) \; ; \; \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan {}^1/_2(\alpha-\beta)$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot {}^1/_2(\alpha-\beta) \; ; \; \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} \cot {}^1/_2(\alpha+\beta).$$

Beweis: Unmittelbar aus 480, wenn man die Formeln für $\sin\alpha \pm \sin\beta$ durch die Formeln für $\cos\beta \pm \cos\alpha$ teilt.

Satz. $$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = (\cot {}^1/_2(\alpha+\beta))\tan {}^1/_2(\alpha-\beta);$$ 482.

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta} = (\tan {}^1/_2(\alpha+\beta))\tan {}^1/_2(\alpha-\beta).$$

Beweis: Unmittelbar aus 480, wenn man die Sinusformeln, bez. die Cosinusformeln durch einander teilt.

Satz. $(\sin\alpha)^2 - (\sin\beta)^2 = (\sin(\alpha+\beta))\sin(\alpha-\beta);$ 483.

$(\cos\beta)^2 - (\cos\alpha)^2 = (\sin(\alpha+\beta))\sin(\alpha-\beta).$

Beweis: Man vervielfache die Formel in 480 mit einander, dann hat man

$(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$

$= 2(\sin {}^1/_2(\alpha+\beta))\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)\cdot 2(\sin {}^1/_2(\alpha+\beta))\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)$

$(\sin\alpha)^2 - (\sin\beta)^2 = (\sin(\alpha+\beta))\sin(\alpha-\beta)$ (nach 454)

Und ebenfo

$(\cos\beta + \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\alpha)$

$= 2(\sin {}^1/_2(\alpha+\beta))\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)\cdot 2(\sin {}^1/_2(\alpha-\beta))\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)$

$(\cos\beta)^2 - (\cos\alpha)^2 = (\sin(\alpha+\beta))\sin(\alpha-\beta)$ (nach 454)

Satz. 484.

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2^{1/2}\sin(\alpha \pm 45^0) = 2^{1/2}\cos(\alpha \mp 45^0)$$

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha = 2^{1/2}\sin(45^0 \pm \alpha) = 2^{1/2}\cos(45^0 \mp \alpha).$$

Beweis: Aus 452 und 453 folgt unmittelbar, wenn man $\beta = 45^0$ fetzt und beachtet, dass

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2^{1/2}} \text{ ist nach } 458$$

$$\sin(\alpha \pm 45^0) = \frac{1}{2^{1/2}} \cdot \sin\alpha \pm \frac{1}{2^{1/2}} \cos\alpha, \text{ d. h.}$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2^{1/2} \sin(\alpha \pm 45^0).$$

Und ebenſo die andern Formeln.

485. **Satz.** $\left(\frac{1 \pm \sin 2\alpha}{2}\right)^{1/2} = \sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha).$

Beweis: Man ſetze $\alpha = 90^0 - 2\gamma$, alſo $\frac{\alpha}{2} = 45^0 - \gamma$, dann ist

$\cos\alpha = \cos(90^0 - 2\gamma) = \sin 2\gamma$ (nach 460)

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin(45^0 - \gamma) = \cos(45^0 + \gamma)$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos(45^0 - \gamma) = \sin(45^0 + \gamma)$

da $45^0 + \gamma + 45^0 - \gamma = 90^0$ ſind und alſo der eine die Ergänzung des andern ist (nach 436)

dann ist nach 455

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right)^{1/2}, \text{ alſo } \sin(45^0 - \gamma) = \cos(45^0 + \gamma)$$

$$= \pm\left(\frac{1 - \sin 2\gamma}{2}\right)^{1/2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\left(\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right)^{1/2}, \text{ alſo } \cos(45^0 - \gamma) = \sin(45^0 + \gamma)$$

$$= \pm\left(\frac{1 + \sin 2\gamma}{2}\right)^{1/2}$$

Und wenn man hier wieder α für γ ſetzt, folgt unmittelbar der Satz.

486. **Satz.** $\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{(\cos\alpha)\cos\beta}$; $\cot\beta \pm \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{(\sin\alpha)\sin\beta}$

Beweis: Unmittelbar aus 452 und 453, wenn man die Formeln durch $(\cos\alpha)\cos\beta$ bezüglich durch $(\sin\alpha)\sin\beta$ teilt.

487. **Satz.** $1 \pm \tan\alpha = 2^{1/2} \cdot \frac{\sin(45^0 \pm \alpha)}{\cos\alpha} = 2^{1/2} \cdot \frac{\cos(45^0 \mp \alpha)}{\cos\alpha}$

$$\cot\alpha \pm 1 = 2^{1/2} \frac{\sin(45^0 \pm \alpha}{\sin\alpha} = 2^{1/2} \frac{\cos(45 \mp \alpha)}{\sin\alpha}$$

Beweis: Unmittelbar aus 484, wenn man die Formeln durch $\cos\alpha$ bez. durch $\sin\alpha$ teilt.

488. **Satz.** $\frac{1 \pm \tan\alpha}{1 \mp \tan\alpha} = \tan(45^0 \pm \alpha) = \cot(45^0 \mp \alpha).$

Beweis: Unmittelbar aus 487, wenn man eine Formel durch die andere teilt.

Satz. $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{\cot\alpha - 1} = \tan\alpha.$. 489.

Beweis. Unmittelbar aus 487, wenn man eine Formel durch die andere teilt.

4. Der Bogen.

Erklärung. Der Bogen (der arcus) β heist der dem Winkel 490.
β entsprechende Teil des Kreisumfanges, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, gemessen durch den Halbmesser des Kreifes.

Erklärung. Das Zeichen des Bogens β ist, wenn $\sin\beta = x$, 491.
$\cos\beta = y$, $\tan\beta = z$ und $\cot\beta = v$ ist, $\beta = \text{arc}(\sin = x) = \text{arc}(\cos = y) = \text{arc}(\tan = z) = \text{arc}(\cot = v)$.

In den mathematischen Schriften ist es Sitte, den arc(sin = x) als arc sin x zu bezeichnen; dies ist aber ein Fehler. Unter dem arcsin x muss und kann man nur den Bogen x verstehen; denn arcsin x bezeichnet notwendig den Bogen des sin x; der sin·x ist aber der sin des Winkels oder Bogens x*. Die Bezeichnung arc·sin x bezeichnet alfo den Bogen x, nicht aber den Bogen, dessen Sinus = x ist, diefer darf nur als arc(sin = x) bezeichnet werdea, wie es in diefem Buche geschehen ist.

Satz. $\text{arc}(\sin = x) = \text{arc}\left(\cos = (1-x^2)^{1/2}\right) = \text{arc}\left(\tan = \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\right)$ 492.

$$= \text{arc}\left(\cot = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}\right) \quad \text{und } \text{arc}(\tan = z) = \text{arc}\left(\cot = \frac{1}{z}\right)$$

$$= \text{arc}\left(\sin = \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) = \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}\right).$$

Beweis. Setzen wir $\sin\beta = x$, fo ist nach 441 $\cos\beta = (1-(\sin\beta)^2)^{1/2} = (1-x^2)^{1/2}$; $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}$; $\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}$, mithin ist $\text{arc}(\sin = x) = \text{arc}\left(\cos = (1-x^2)^{1/2}\right)$

$$= \text{arc}\left(\tan = \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = \text{arc}\left(\cot = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}\right).$$

Setzen wir $\tan\beta = z$, fo ist $\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{z}$ und ist nach 467 $\cos\beta = \frac{1}{(1+(\tan\beta)^2)^{1/2}}$; $\sin\beta = \tan\beta\cdot\cos\beta = \frac{\tan\beta}{(1+(\tan\beta)^2)^{1/2}}$, mithin

*So bezeichnet log sin x den log des sinus x, fo diff·sin x das Differential des sinus x u. f. w.

ist $\operatorname{arc}(\tan = z) = \operatorname{arc}\left(\cot = \frac{1}{z}\right) = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}\right)$

$= \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right)$.

493. **Satz.** $\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} = 90^0$

$$\operatorname{arc}(\tan = z) + \operatorname{arc}(\cot = z) = \frac{\pi}{2} = 90^0.$$

Beweis. a. Es ſei $\sin\alpha = x$, ſo iſt auch $\cos(90^0 - \alpha) = x$; und iſt alſo $\frac{\pi}{2} = 90^0 = \alpha + (90^0 - \alpha) = \operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\cos = x)$

b. Es ſei $\tan\beta = z$, ſo iſt auch $\cot(90^0 - \beta) = z$, und iſt alſo $\frac{\pi}{2} = 90^0 = \beta + (90^0 - \beta) = \operatorname{arc}(\tan = z) + \operatorname{arc}(\cot = z)$.

494. **Satz.**

$\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\sin = y) = \operatorname{arc}\left(\sin = (x(1-y)^{2\,1/2} + y(1-x^2)^{1/2}\right)$,
wenn $x^2 + y^2 < 1$

$\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\sin = y) = \pi - \operatorname{arc}\left(\sin = (x(1-y^2)^{1/2} + y(1-x^2)^{1/2}\right)$,
wenn $x^2 + y^2 > 1$

$\operatorname{arc}(\sin = x) - \operatorname{arc}(\sin = y) = \operatorname{arc}\left(\sin = (x(1-y^2)^{1/2} - y(1-x^2)^{1/2}\right)$.

Beweis. Es ſei $\sin\alpha = x$, und $\sin\beta = y$, dann iſt $\cos\alpha = (1-x^2)^{1/2}$ und $\cos\beta = (1-y^2)^{1/2}$ und iſt $\alpha \pm \beta = \operatorname{arc}(\sin = x) \pm \operatorname{arc}(\sin = y)$. Nun iſt nach 452, 453 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$, mithin iſt

$\operatorname{arc}(\sin = x) \pm \operatorname{arc}(\sin = y) = \operatorname{arc}\left(\sin = x(1-y^2)^{1/2} \pm y(1-x^2)^{1/2}\right)$.

Dieſe Formel gilt allgemein, wenn $\alpha \pm \beta < 90^0$ iſt, wird dagegen $\alpha + \beta > 90^0$, ſo muss man ſtatt des ſin vom $\alpha + \beta$ vielmehr den ſin von $180^0 - (\alpha + \beta)$ oder $\pi - (\alpha + \beta)$ nehmen, d. h. es iſt dann

$\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\sin = y) = \pi - \operatorname{arc}\left(\sin = x(1-y^2)^{1/2} + y(1-x^2)^{1/2}\right)$.

Nun wird der $\cos(\alpha + \beta)$ eine Strichgröſse, d. h. negativ, wenn $\alpha + \beta > 90^0$ wird. Es iſt aber

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos\alpha)\cdot\cos\beta - (\sin\alpha)\cdot\sin\beta = (1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2} - xy$$

$$= \frac{(1-x^2)(1-y^2) - x^2y^2}{((1-x^2)(1-y^2))^{1/2} + xy}$$

$$= \frac{1-(x^2+y^2)}{((1-x^2)(1-y^2))^{1/2} + xy}.$$

Der $\cos(\alpha + \beta)$ ist alſo eine Strichgröse, oder $\alpha + \beta > 90^0$, wenn $x^2 + y^2 > 1$ ist. Daraus ergiebt ſich die Bedingungsgleichung im Satze, dass die erste Formel gilt, wenn $x^2 + y^2 \leqq 1$, dagegen die zweite, wenn $x^2 + y^2 > 1$ ist.

Satz. 495.

$$\text{arc}(\tan = x) + \text{arc}(\tan = y) = \text{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right), \text{ wenn } xy \leqq 1$$

$$\text{arc}(\tan = x) + \text{arc}(\tan = y) = \pi - \text{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right), \text{ wenn } xy > 1$$

$$\text{arc}(\tan = x) - \text{arc}(\tan = y) = \text{arc}\left(\tan = \frac{x - y}{1 - xy}\right).$$

Beweis. Es ſei $\tan\alpha = x$ und $\tan\beta = y$, dann ist nach 470 $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp (\tan\alpha)\tan\beta}$, mithin ist

$$\text{arc}(\tan = x) \pm \text{arc}(\tan = y) = \text{arc}\left(\tan = \frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right).$$

Dieſe Formel gilt wieder allgemein, wenn $\alpha \pm \beta \leqq 90^0$, dagegen muss man, wenn $\alpha + \beta > 90^0$ wird, statt der tan von $\alpha + \beta$ vielmehr die tan von $180^0 - (\alpha + \beta)$ oder $\pi - (\alpha + \beta)$ nehmen, d. h. es ist dann $\text{arc}(\tan = x) + \text{arc}(\tan = y) = \pi - \text{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right)$.

Nun wird aber, wenn $\alpha + \beta > 90^0$ wird, der $\cos(\alpha + \beta)$ eine Strichgröse. Es ist aber

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{(\cos\alpha)\cos\beta} = \frac{(\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\alpha)\cos\beta} = 1 - \frac{(\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\alpha)\cos\beta}.$$

Der $\cos(\alpha + \beta)$ ist alſo eine Strichgröse oder $\alpha + \beta > 90^0$, wenn $xy > 1$ ist. Daraus ergiebt ſich die Bedingungsgleichung im Satze, dass die erste Formel gilt, wenn $xy \leqq 1$, dagegen die zweite, wenn $xy > 1$ ist.

Erklärung. Unter dem Allgemeinen Bogen (Zeichen Aarc) versteht man einen Bogen, der jenſeit der Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. 496.

Satz. 497.

$$\text{Aarc}(\sin = x) \cong a\pi + (-1)^a \text{arc}(\sin = x)$$
$$\text{Aarc}(\cos = x) \cong 2a\pi \pm \text{arc}(\cos = x)$$
$$\text{Aarc}(\tan = x) \cong a\pi + \text{arc}(\tan = x)$$
$$\text{Aarc}(\cot = x) \cong a\pi + \text{arc}(\cot = x.)$$

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus 476, wenn man $\text{arc}(\sin = x) = \alpha$, alſo $x = \sin\alpha$ ſetzt. So ist z. B. $\sin(a\pi + (-1)^a\alpha) = \sin\alpha = x$, mithin ist $\text{Aarc}(\sin = x) \cong a\pi + (-1)^a \text{arc}(\sin = x)$.

12. Die Richtgrösen in Base, Stufe, Log und Winkel.

Wir versetzen in dieser Nummer die Richtgrösen (die komplexen Grösen) auch in die höhern Gebiete in die Base, in die Stufe, in den Log und in den Winkel und untersuchen die Gesetze, welche in diesen Gebieten für sie Platz greifen.

1. Die Richtgröse in der Base.

Um die Richtgröse in der Base behandeln zu können, betrachten wir zunächst die Richteinheit in der Base.

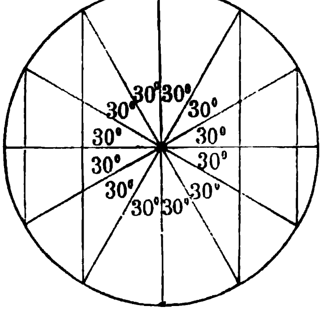
498. **Satz. Wenn $x^n = 1$, wo n eine ganze Zahl, so ist**

$$x = \cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}$$

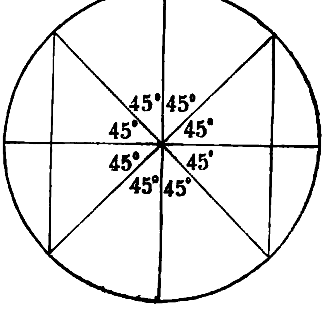
wo a alle Werte von 0 bis n — 1 haben kann, d. h. die Wurzel ist eine Richteinheit (komplexe Einheit), deren Winkel einer derjenigen Winkel ist, welche n Strahlen mit einander bilden, die von einem Punkte ausgehen und den ganzen Winkelraum in n gleiche Teile teilen.

Beweis. Es sei x zunächst eine beliebige Richtgröse $= a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wo a eine Plusgröse und der Winkel α echt ist, so folgt aus der Gleichung $1 = x^n$ $1 = (a\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = a^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, nach 465, hier ist nach 426 $a^n = 1$, also auch $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = 1$, d. h. $\cos n\alpha = 1$ und $\sin n\alpha = 0$, d. h. nach 449 $n\alpha = 2a\pi$, mithin $\alpha = \frac{2a\pi}{n}$, d. h. es ist $x = \cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}$.

Es erfüllt also jeder dieser Werte die Gleichung, auch kann es nicht mehr als n solche Werte geben; denn sei $a > n$, also $a = n + b$, wo b einer der Werte von 0 bis n — 1, so wird $\frac{2a\pi}{n} = \frac{2(n+b)\pi}{n} = 2\pi + \frac{2bn}{n} = \frac{2b\pi}{n}$; die Werte von $a = 0$ bis $a = n - 1$ liefern also sämmtliche Wurzeln.



Nachdem wir auf diese Weise die n Werte der Wurzel aus 1 festgestellt haben, so können wir nun auch zu der Betrachtung der Wurzeln aus Winkelgrösen übergehen.



Beispiele. Es sei $x^{12} = 1$, so ist

$$x = \cos\frac{2a\pi}{12} + i\sin\frac{2a\pi}{12} \text{ und } \frac{2a\pi}{12} = \begin{cases} 0^0, 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, \\ 180^0, 210^0, 240^0, 270^0, 300^0, 330^0 \end{cases}.$$

Es sei $x^8 = 1$, so ist $x = \cos\frac{2a\pi}{8} + i\sin\frac{2a\pi}{8}$,

also $\frac{2a\pi}{8} = 0^0, 45^0, 90^0, 135^0, 180^0, 225^0, 270^0, 315^0$.

Die vorstehenden Zeichnungen veranschaulichen diese Winkel, sowie die cosinus und sinus dieser Winkel.

Erklärung. Eine Richtgröse zu einer Zahl c höhen (eine komplexe Gröse zu einer reellen Zahl potenziren) heist den Richtwert jener Gröse zu c erhöhen und ihren Winkel mit c vervielfachen auch dann, wenn die Zahl c keine ganze Zahl ist, sofern dann der Winkel der Gröse echt ist, 499.

oder

Es ist $[a(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^c = a^c(\cos c\alpha + i\sin c\alpha)$ wo a eine Plusgröse, α ein Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$ und n eine (reelle) Zahl.

Die Richteinheit, deren Winkel $\alpha = 1$ ist, wird gleich ε gesetzt,

oder

Es ist $\varepsilon = \cos 1 + i\sin 1$.

Satz. Wenn a der Richtwert und c der Winkel einer Richtgröse (einer komplexen Gröse) $a(\cos c + i\sin c)$ ist, so ist 500.

$$a(\cos c + i\sin c) = a\varepsilon^c.$$

Beweis. Es ist $a\varepsilon^c = a(\cos 1 + i\sin 1)^c$ (nach 499)

$= a(\cos c + i\sin c)$ (nach 499)

Satz. Wenn entweder n eine ganze Zahl oder c ein echter Winkel ist, so ist $(a\varepsilon^c)^n = a^n \cdot \varepsilon^{cn}$. 501.

Beweis. Unmittelbar aus 464 bez. 499.

Satz. Wenn a eine beliebige Zahlgröse (d. h, eine reine Zahl oder eine Richtgröse) ist und b und c Zahlen (reell) sind, so ist 502.

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c.$$

Beweis. 1. Es sei $a = \varepsilon$, so ist

$\varepsilon^b\varepsilon^c = (\cos b + i\sin b)(\cos c + i\sin c)$ (nach 500)

$= \cos(b + c) + i\sin(b + c)$ (nach 451)

$= \varepsilon^{b+c}$ (nach 500).

2. Es sei p der Richtwert von a und α der echte Winkel von a also $a = p\cdot\varepsilon^\alpha$, so ist

$a^b \cdot a^c = (p\varepsilon^\alpha)^b \cdot (p\varepsilon^\alpha)^c = p^b\varepsilon^{\alpha b}p^c\varepsilon^{\alpha c}$ (nach 501)

$= p^{b+c}\varepsilon^{\alpha b}\varepsilon^{\alpha c} = p^{b+c}\varepsilon^{\alpha b+\alpha c}$ (nach $502,_1$)

$= p^{b+c}\cdot\varepsilon^{\alpha(b+c)} = (p\varepsilon^\alpha)^{b+c}$ (nach 501)

$= a^{b+c}$

503. **Satz. Wenn a eine beliebige Zahlgröse ungleich Null, b und c Zahlen (reell) ſind, ſo ist** $a^{b-c} = a^b : a^c$.

Beweis. $a^{b-c} = a^{b-c} \cdot a^c : a^c = a^{b-c+c} : a^c = a^b : a^c$ (nach 502).

Es muss hier bemerkt werden, dass die weiteren Geſetze des Höhens für Richtgrösen in der Baſe und für gebrochne Stufen (Exponenten) nur dann gelten, wenn $(ab)^c$ die Summe der Winkel $\alpha + \beta$, und bei a^b der Winkel a^b ein echter Winkel ist; nur in dieſem Falle ist $(ab)^c = a^c \cdot b^c$ und $(a^b)^c = a^{bc}$ auch für gebrochne Stufen (Exponenten).

504. **Satz.** $\varepsilon^\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $\varepsilon^{-\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

Beweis. Unmittelbar aus 500, wenn $a = 1$ geſetzt wird und aus 440.

505. **Satz.** $\cos\alpha = \dfrac{\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{-\alpha}}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{-\alpha}}{2i}$.

Beweis. Es ist $\varepsilon^\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\varepsilon^{-\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ (nach 504)

daraus folgt durch Zufügen beider der erste, durch Abziehen des zweiten der zweite Teil des Satzes.

Es ist $\varepsilon^{\alpha+\beta} = \varepsilon^{\alpha} \cdot \varepsilon^{\beta}$ nach 502, mithin ist nach 504

$\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

d. h. es ist $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Es folgt alſo hieraus der bekannte Satz der Trigonometrie.

506. **Satz. Es ist** $\varepsilon^\alpha = \varepsilon^{2a\pi + \alpha}$.

Beweis. $\varepsilon^\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(2a\pi + \alpha) + i\sin(2a\pi + \alpha)$ (nach 504)
$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos 2a\pi + i\sin 2a\pi)$ (nach 451)
$= \varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^{2a\pi}$ (nach 504)
$= \varepsilon^{2a\pi + \alpha}$ (nach 502)

507. **Satz. Wenn a, b, c ·· beliebige Zahlgrösen (auch Richtgrösen) und q eine Zahl (reell) ist, ſo ist** $a^q \cdot b^q \cdot c^q \cdots = (abc \cdots)^q \cdot \varepsilon^{2n\pi q}$, **wo** α, β, γ **die echten Winkel der Grösen a, b, c ··, und** $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 2n\pi + p$, **auch p echt ist.**

Beweis. Es ſei $a = a_1 \cdot \varepsilon^\alpha$, $b = b_1 \varepsilon^\beta$, $c = c_1 \varepsilon^\gamma \cdots$, wo $a_1 b_1 c_1 \cdots$ Plusgrösen und $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ echte Winkel, und ſei $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 2n\pi + p$, wo p ein echter Winkel, ſo ist

$$a^q \cdot b^q \cdot c^q \ldots = (a_1\varepsilon^\alpha)^q \cdot (b_1\varepsilon^\beta)^q \cdot (c_1\varepsilon^\gamma)^q \ldots$$
$$= a_1{}^q\varepsilon^{\alpha q} \cdot b_1\varepsilon^{\beta q} \cdot c_1\varepsilon^{\gamma q} \ldots \quad \text{(nach 501)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \cdot \varepsilon^{\alpha q + \beta q + \gamma q + \cdots} \quad \text{(nach 502)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \cdot \varepsilon^{(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)q} \quad \text{(nach 90)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \cdot \varepsilon^{(2n\pi + p)q} \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \cdot \varepsilon^{pq} \cdot \varepsilon^{2n\pi q} \quad \text{(nach 500)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \cdot (\varepsilon^p)^q \cdot \varepsilon^{2n\pi q} \quad \text{(nach 501)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \cdot (\varepsilon^{2n\pi + p})^q \cdot \varepsilon^{2n\pi q} \quad \text{(nach 506)}$$
$$= (a_1b_1c_1\ldots)^q \varepsilon^{(\alpha + \beta + \gamma\cdots)q} \cdot \varepsilon^{2n\pi q}$$
$$= [(a_1b_1c_1\ldots)\varepsilon^{(\alpha + \beta + \gamma\cdots)}]^q \cdot \varepsilon^{2n\pi q} \quad \text{(nach 501)}$$
$$= (a_1\varepsilon^\alpha \cdot b_1\varepsilon^\beta \cdot c_1\varepsilon^\gamma \ldots)^q \varepsilon^{2n\pi q} \quad \text{(nach 502)}$$
$$= (a \cdot b \cdot c \ldots)^q \cdot \varepsilon^{2n\pi q}$$

Satz. **Wenn a eine beliebige Zahlgröse (auch Richtgröse $= a_1\varepsilon^\alpha$), wo α ein echter Winkel, und b und c Zahlen (reell) sind, so ist $a^{bc} = (a^b)^c \varepsilon^{2n\pi c}$, wo $\alpha b = 2n\pi + p$ und p ein echter Winkel ist.** 508.

Beweis. Es ist
$$a^{bc} = (a_1\varepsilon^\alpha)^{bc} = a_1{}^{bc} \cdot \varepsilon^{\alpha bc} \quad \text{(nach 501)}$$
$$= a_1{}^{bc}\varepsilon^{(2n\pi + p)c} \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= a_1{}^{bc}\varepsilon^{pc} \cdot \varepsilon^{2n\pi c} \quad \text{(nach 502)}$$
$$= a_1{}^{bc}(\varepsilon^p)^c \cdot \varepsilon^{2n\pi c} \quad \text{(nach 501)}$$
$$= a_1{}^{bc}(\varepsilon^{2n\pi + p})^c \cdot \varepsilon^{2n\pi c} \quad \text{(nach 506)}$$
$$= a_1{}^{bc}(\varepsilon^{\alpha b})^c \cdot \varepsilon^{2n\pi c} \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= (a_1{}^b)^c \cdot ((\varepsilon^\alpha)^b)^c \cdot \varepsilon^{2n\pi c} \quad \text{(nach 501)}$$
$$= ((a_1 \cdot \varepsilon^\alpha)^b)^c \cdot \varepsilon^{2n\pi c} \quad \text{(nach 499)}$$
$$= (a^b)^c \cdot \varepsilon^{2n\pi c}$$

Satz. **Wenn a eine beliebige Zahlgröse (reine Zahl oder Richtgröse) $= a_1\varepsilon^\alpha$ (wo a_1 ein Pluswert und α ein echter Winkel) und $\beta, \gamma, \delta, \zeta$ Zahlen (reell) sind, so ist** 509.

$$a^{\beta\gamma\delta\zeta} = \left(\left(\left(a^\beta\right)^\gamma\right)^\delta\right)^\zeta \varepsilon^{2\pi(m\gamma\delta + n\delta + o)\zeta}$$

wo $\alpha\beta = 2m\pi + r_1$, $r_1\gamma = 2n\pi + r_2$ und $r_2\delta = 2o\pi + r_3$ und die Winkel r_1, r_2 und r_3 echt sind.

Beweis.

Es ist $a^{\beta\gamma\delta\zeta} = (a^{\beta\gamma\delta\zeta}) = (a^\beta)^{\gamma\delta\zeta}\varepsilon^{\cdot 2m\pi\gamma\delta\zeta}$ wo $\alpha\beta = 2m\pi + r_1$

$= \left(\left(a^\beta\right)^\gamma\right)^{\delta\zeta} \varepsilon^{2m\pi\gamma\delta\zeta} \cdot \varepsilon^{2n\pi\delta\zeta}$ wo $r_1\gamma = 2n\pi + r_2$

$$= \left(\left(\left((a)^{\beta}\right)^{\gamma}\right)^{\delta}\right)^{\zeta} \cdot \varepsilon^{2m\pi\gamma\delta\zeta} \cdot \varepsilon^{2n\pi\delta\zeta} \cdot \varepsilon^{2o\pi\zeta} \quad \text{wo } r_2\delta = 2o\pi + r_3$$
$$= \left(\left((a^{\beta})^{\gamma}\right)^{\delta}\right)^{\zeta} \cdot \varepsilon^{2\pi\zeta(m\gamma\delta + n\delta + o)}.$$

2. Die Richtgröse in der Stufe (im Exponenten).

Um die Richtgröse in der Stufe zu erklären, hat man $\varepsilon = e^{i}$ gefetzt. Man ist zu diefer Setzung durch die folgende Betrachtung gekommen. In der Folgelehre oder Funktionenlehre werden wir fehen, dass

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ ist, und dass}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \text{ dass}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ ist.}$$

Es ist einleuchtend, dass beide Formeln fich auf einander zurückführen lassen, wenn wir entweder 1, in e^{x} die Gröse ix für x einführen oder 2, in $\cos x$ und $\sin x$ die Gröse ix für x einführen.

Im ersten Falle wird dann

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\cdot\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\cdot\frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$= \cos x + i \sin x.$$

Setzen wir hier $x = 1$, fo erhalten wir nach 499

$$e^{i} = \cos 1 + i \sin 1 = \varepsilon, \text{ d. h. } e^{i} = \varepsilon.$$

Im zweiten Falle wird dann

$$\cos ix = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$-i \sin ix = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

d. h. $e^{x} = \cos ix - i \sin ix$.

Nach diefen Vorbemerkungen gehen wir auf die Sätze über.

510. **Erklärung. Um die Höhe (Potenz) mit einer Richtgröse (komplexen Gröse) in der Stufe zu erklären, fetzen wir**

1, $\varepsilon = e^{i} \qquad \varepsilon^{\alpha} = (e^{\alpha})^{i}$

2, $(a\varepsilon^{\alpha})^{i\beta} = a^{i\beta}(\varepsilon^{\alpha})^{i\beta}$ **und** $a^{i\beta} = (a^{\beta})^{i} \qquad (\varepsilon^{\alpha})^{i\beta} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha\beta}$,

wo a eine Plusgröse, β eine Zahl (reell) und α eine echte Zahl ist.

3, $a^{\alpha + i\beta} = a^{\alpha} \cdot a^{i\beta}$, **wo a eine Richtgröse, α und β Zahlen (reell) find.**

511. **Satz.** $(e^{\alpha})^{i} = (e^{i})^{\alpha} = e^{i\alpha} = \varepsilon^{\alpha}$.

Beweis. $(e^{\alpha})^{i} = \varepsilon^{\alpha} = (e^{i})^{\alpha} = e^{i\alpha} = \varepsilon^{\alpha}$ (nach 510).

512. **Satz.** $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}.$

Beweis. Es ist $\cos\alpha = \frac{\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}}{2}$ (nach 505)

$$= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \text{ (nach 511).}$$

Satz. $2^{n}(\cos\alpha)^{n} = \cos n\alpha + n\cdot\cos(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\cos(n-4)\alpha + \cdots$ 513.
$= S n^{\cdot a}\cos(n-2a)\alpha$ **wo n eine ganze Pluszahl**

Und zwar für gerades n

$$2^{n-1}(\cos\alpha)^{n} = \cos n\alpha + n\cdot\cos(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\alpha + \cdots$$
$$+ n^{\cdot(\frac{1}{2}n-1)}\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2} n^{\cdot(\frac{1}{2}n)}$$

und für ungerades n

$$2^{n-1}(\cos\alpha)^{n} = \cos n\alpha + n\cdot\cos(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\alpha + \cdots$$
$$+ n^{\cdot\frac{1}{2}(n-3)}\cos 3\alpha + n^{\cdot\frac{1}{2}(n-1)}\cos\alpha.$$

Beweis. Aus 512 folgt unmittelbar $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$, mithin
$2^{n}(\cos\alpha)^{n} = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})^{n} = e^{i\alpha n} + n e^{i\alpha(n-2)} + n^{\cdot 2}e^{i\alpha(n-4)} + \cdots$
$+ n^{\cdot n-2}e^{i\alpha(4-n)} + n^{\cdot n-1}e^{i\alpha(2-n)} + e^{i\alpha(-n)}.$
Und wenn man hier jedes Glied $e^{i\alpha a} = \cos\alpha a + i\sin\alpha a$ entwickelt und nach 426 die Glieder ohne i auf beiden Seiten gleich setzt
$2^{n}(\cos\alpha)^{n} = \cos n\alpha + n\cos(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\cos(n-4)\alpha + \cdots$
$+ n^{\cdot n-2}\cos(4-n)\alpha + n^{\cdot n-1}\cos(2-n)\alpha + \cos(-n)\alpha$
$= \underset{0,n}{S}\, n^{\cdot a}\cos(n-2a)\alpha$
mithin der erste Teil des Satzes bewiesen.

Beachtet man nun, dass $\cos(-a)\alpha = \cos a\alpha$, so kann man je zwei Glieder zusammenfassen. Bei geradem n bleibt dann in der Mitte ein unpares Glied $n^{\cdot\frac{1}{2}n}\cos(n-n) = n^{\cdot\frac{1}{2}n}$ und erhält man mithin für gerades n, und für ungerades n die im Satze aufgestellten Formeln.

Satz. Für gerades n ist, wenn n eine ganze Pluszahl 514.

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}n}(\sin\alpha)^{n} = \cos n\alpha - n\cdot\cos(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\alpha - \cdots$$
$$+ (-1)^{(\frac{1}{2}n-1)}n^{\cdot(\frac{1}{2}n-1)}\cos 2\alpha + (-1)^{(\frac{1}{2}n)}\cdot\tfrac{1}{2}n^{\cdot(\frac{1}{2}n)}$$

und für ungerades n

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(\sin\alpha)^{n} = \sin n\alpha - n\sin(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\sin(n-4)\alpha - \cdots$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}n^{\cdot\frac{1}{2}(n-3)}\sin 3\alpha + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\cdot\frac{1}{2}(n-1)}\cdot\sin\alpha.$$

Beweis. Aus 512 folgt unmittelbar $2\cdot i\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$, mithin
$2^{n}i^{n}(\sin\alpha)^{n} = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})^{n} = e^{i\alpha n} - n e^{i\alpha(n-2)} + n^{\cdot 2}e^{i\alpha(n-4)} - \cdots$
$+ (-1)^{(n-2)}n^{\cdot(n-2)}e^{i\alpha(4-n)} + (-1)^{n-1}n^{\cdot(n-1)}e^{i\alpha(2-n)} + (-1)^{n}e^{-i\alpha n}.$

Wenn man hier jedes Glied $e^{i\alpha\iota} = \cos\alpha\iota + i\sin\alpha\iota$ entwickelt und nach 426 die Glieder ohne i auf beiden Seiten gleichfetzt und ebenfo die mit i, fo erhält man für gerades n $i^n = (-1)^{1/_2 n}$ alfo Glieder ohne i, und für ungerades n $i^n = i\cdot(-1)^{1/_2(n-1)}$, mithin für gerades n die Glieder ohne i

$$2^n(-1)^{1/_2 n}\cdot(\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - n\cos(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\cos(n-4)\alpha - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-2}n^{\cdot n-2}\cos(4-n)\alpha + (-1)^{n-1}n^{\cdot n-1}$$
$$+ (-1)^{n-1}n^{\cdot n-1}\cos(2-n)\alpha + (-1)^n\cos(-n)\alpha$$

und für ungerades n die Glieder mit i

$$i2^n(-1)^{1/_2(n-1)}(\sin\alpha)^n = i[\sin n\alpha - n\sin(n-2)\alpha + n^{\cdot 2}\sin(n-4)\alpha - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-2}n^{\cdot n-2}\sin(4-n)\alpha + (-1)^{n-1}\cdot n^{\cdot n-1}$$
$$+ (-1)^{n-1}n^{\cdot n-1}\sin(2-n)\alpha + (-1)^n\cdot\sin(-n)\alpha]$$

Beachtet man hier, dass $\sin(-a\alpha) = -\sin a\alpha$ ist, dass mithin für gerades n die sin fich aufheben, dass aber für ungerades n auch die entsprechenden sin entgegengefetztes Zeichen haben, und alfo $\sin a\alpha - \sin(-a\alpha) = 2\sin a\alpha$ ist, fo kann man auch hier je zwei Glieder zufammenfassen und behält für gerades n ein unpares Glied $(-1)^{(1/_2 n)}n^{\cdot(1/_2 n)}\cos(n-n) = (-1)^{(1/_2 n)}\cdot n^{\cdot(1/_2 n)}$ und erhält mithin für gerades n, wie für ungerades n die im Satze aufgestellten Formeln.

Beispiele. Für gerades n

$2(\cos\alpha)^2 = \cos 2\alpha + 1$

$8(\cos\alpha)^4 = \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$

Für ungerades n

$4(\cos\alpha)^3 = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$

$16(\cos\alpha)^5 = \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$

Für gerades n

$-2(\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha - 1$

$8(\sin\alpha)^4 = \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3$

Für ungerades n

$-4(\sin\alpha)^3 = \sin 3\alpha - 3\sin\alpha$

$16(\sin\alpha)^5 = \sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha.$

515. **Satz.** $\varepsilon^i = \frac{1}{e}$.

Beweis. $\varepsilon^i = e^{ii} = \frac{1}{e}$ (nach 510).

516. **Satz.** $e = \cos i - i\sin i$.

Beweis. Es ist nach 510 $\varepsilon = e^i$, alfo $e = \varepsilon^{-i} = \cos i - i\sin i$ (nach 504)

517. **Satz. Jede reine Pluszahl a zu einer reinen Jgröse (reinen imaginären Gröse) ib erhöht, giebt eine Richteinheit.**

Beweis. Sei a eine Plusgröse $= e^\alpha$ wo $\alpha = \frac{a}{e}$, fo ist $a^{ib} = (a^b)^i$ (nach 510)

$a^{ib} = (a^b)^i = \left((e^\alpha)^b\right)^i = (e^{\alpha b})^i = \varepsilon^{\alpha b}$ (nach 511)

und $\varepsilon^{\alpha b} = \cos\alpha b + i\sin\alpha b$ oder

$$a^{ib} = \cos b + i \sin b \cos b \frac{a}{e} + i \sin b \frac{a}{e}$$ (nach 504).

Satz. Jede Richteinheit zu einer reinen Jgröse (reinen imaginären Gröse) ib erhöht (potenzirt), giebt eine Pluszahl. 518.

Beweis. $\cos\alpha + i\sin\alpha = \varepsilon^\alpha$ giebt zur ib erhöht nach 510

$$(\varepsilon^\alpha)^{bi} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha b}.$$

Satz. $e^{2n\pi i} = 1.$ 519.

Beweis. $e^{2n\pi i} = (e^i)^{2n\pi} = \varepsilon^{2n\pi} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1.$

Satz. Eine Richtgröse (komplexe Gröse) zu einer Richtgröse erhöht (potenzirt), giebt wieder eine Richtgröse und gelten also auch für diese Höhen (Potenzen) alle für Richtgrösen bewiesenen Sätze und zwar ist $(a + ib)^{c+id} = (e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta))^{c+id} = (e^\alpha\cdot\varepsilon^\beta)^{c+id} = e^{\alpha c - \beta d}\cdot\varepsilon^{\beta c + \alpha d}$ **wenn** β **ein echter Winkel.** 520.

Beweis. $(e^\alpha\cdot\varepsilon^\beta)^{c+id} = (e^\alpha\varepsilon^\beta)^c\cdot(e^\alpha\cdot\varepsilon^\beta)^{id}$ (nach 510)

$= (e^\alpha)^c(\varepsilon^\beta)^c\cdot(e^\alpha)^{di}(\varepsilon^\beta)^{id}$ (nach 501 u. 510)

$= e^{\alpha c}\cdot(e^{\alpha d})^i\varepsilon^{\beta c}\left(\frac{1}{e}\right)^{\beta d}$ (nach 510)

$= e^{\alpha c - \beta d}\varepsilon^{\alpha d}\cdot\varepsilon^{\beta c}$ (nach 511)

$= e^{\alpha c - \beta d}\varepsilon^{\alpha d + \beta c}$ (nach 502)

Satz. Jede Richtgröse (komplexe Gröse) lässt sich als Höhe (Potenz) darstellen, deren Base e und deren Stufe eine Richtgröse ist, in welcher die zweite Zahl ein echter Winkel ist. 521.

Beweis. Sei die Winkelgröse a + ib, und c ihr Pluswert, α ihr echter Winkel und sei $c = e^\beta$, so ist $a + ib = c\cdot\varepsilon^\alpha = e^\beta\cdot\varepsilon^\alpha$ (nach 504) mithin $a + ib = e^\beta\cdot\varepsilon^\alpha = e^\beta\cdot e^{i\alpha} = e^{\beta + i\alpha}$ (nach 511)

Satz. $(e^{a+ib})^{c+id} = e^{(a+ib)(c+id)}$ **wenn b ein echter Winkel.** 522.

Beweis. $e^{a+ib} = e^a\cdot e^{ib} = e^a\varepsilon^b$ (nach 510), mithin

$(e^{a+ib})^{c+id} = e^{ac-bd}\varepsilon^{bc+ad}$ (nach 520)

$= e^{ac-bd}(e^i)^{bc+ad}$ (nach 510)

$= e^{ac-bd}e^{ibc+iad}$ (nach 511)

$= e^{ac-bd+ibc+iad} = e^{(a+ib)(c+id)}$

Satz. $(e^a\cdot\varepsilon^b)^{c+id} = e^{ac-bd}\varepsilon^{bc+ad}\cdot\varepsilon^{-2n\pi(c+id)}$ **wenn** $b = 2n\pi + p$ **wo p echt.** 523.

Beweis. Es ſei $b = 2n\pi + p$ wo p echt oder zwischen $-\pi$ und π, ſo ist

$\varepsilon^b = \cos(2n\pi + p) + i\sin(2n\pi + p) = \cos p + i\sin p = \varepsilon^p$, alſo

$$(e^a\varepsilon^b)^{c+id} = (e^a\cdot\varepsilon^p)^{c+id} = e^{ac-pd}\cdot\varepsilon^{pc+ad} \qquad \text{(nach 520)}$$
$$= e^{ac-bd+2n\pi d}\varepsilon^{bc+ad-2n\pi c}$$
$$= e^{ac-bd}\varepsilon^{bc+ad}\cdot e^{2n\pi d}\varepsilon^{-2n\pi c}$$
$$= e^{ac-bd}\varepsilon^{bc+ad}\cdot e^{2n\pi(d-ic)}$$
$$= e^{ac-bd}\varepsilon^{bc+ad}\cdot\varepsilon^{-2n\pi(c+id)}.$$

524. **Satz.** $e^{(a+ib)(c+id)} = (e^{a+ib})^{c+id}\cdot\varepsilon^{-2n\pi(c+id)}$ **wo $b = 2n\pi + p$ und p ein echter Winkel ist.**

Beweis. Unmittelbar aus 521.

525. **Satz.** $e^{a+ib}\cdot e^{c+id} = e^{(a+c)+i(b+d)}$.

Beweis. $e^{a+ib}\cdot e^{c+id} = e^a\cdot\varepsilon^b\cdot e^c\cdot\varepsilon^d$
$$= e^{a+c}\cdot\varepsilon^{b+d} \qquad \text{(nach 502)}$$
$$= e^{a+c}e^{i(b+d)} \qquad \text{(nach 510)}$$
$$= e^{a+c+i(b+d)} \qquad \text{(nach 510)}$$

526. **Satz.** $(a+ib)^{c+id}\cdot(a+ib)^{f+ig} = (a+ib)^{(c+f+i(d+g))}$.

Beweis. Es ſei $a + ib = e^{\alpha+i\beta}$ wo β ein echter Winkel, ſo ist

$$(a+ib)^{c+id}\cdot(a+ib)^{(f+ig)} = \left(e^{\alpha+i\beta}\right)^{(c+id)}\left(e^{\alpha+\beta i}\right)^{(f+ig)}$$
$$= e^{(\alpha+i\beta)(c+id)}\cdot e^{(\alpha+\beta i)(f+ig)} \qquad \text{(nach 522)}$$
$$= e^{(\alpha+i\beta)(c+di)+(\alpha+\beta i)(f+ig)} \qquad \text{(nach 525)}$$
$$= e^{(\alpha+i\beta)(c+f+i(d+g)i)}$$
$$= \left(e^{\alpha+i\beta}\right)^{(c+f+i(d+g))} \qquad \text{(nach 522)}$$
$$= a + ib^{(c+f+i(d+g))}.$$

527. **Satz.** $(a+ib)^{-(c+id)} = \left(\frac{1}{a+ib}\right)^{(c+id)}$.

Beweis.

$$(a+ib)^{(c+id)}\cdot(a+ib)^{(-c+id)} = (a+ib)^{c+id-(c+id)} = (a+ib)^0 = 1 \qquad \text{(nach 526)}$$

alſo ist $(a+ib)^{-(c+id)} = \frac{1}{(a+ib)^{c+id}}$ (nach 332).

528. **Satz.** $(a+ia_1)^{n+im}\cdot(b+ib_1)^{n+im}\ldots = ((a+ia_1)(b+ib_1)\cdots)^{n+im}\cdot\varepsilon^{2p\pi(n+im)}$ **wo die Summe von $\alpha_1 + \beta_1 + \cdots = 2p\pi + r$, wo r ein echter Winkel, auch $a + ia_1 = e^{\alpha+i\alpha_1}$ u. ſ. w.**

Beweis. Es sei $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$., $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}\ldots$, wo $\alpha_1, \beta_1 \cdots$ echt und die Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \cdots = 2p\pi + r$ und r ein echter Winkel, so ist

$$(a + ia_1)^{n+im} \cdot (b + ib_1)^{n+im} \ldots = (e^{\alpha+i\alpha_1})^{n+im} \cdot (e^{\beta+i\beta_1})^{n+im} \ldots \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= e^{(\alpha+i\alpha_1)(n+im)} \cdot e^{(\beta+i\beta_1)(n+im)} \ldots \quad \text{(nach 522)}$$
$$= e^{[(\alpha+i\alpha_1)(n+im)+(\beta+i\beta_1)(n+im)+\cdots]} \quad \text{(nach 526)}$$
$$= e^{(\alpha+i\alpha_1+\beta+i\beta_1+\cdots)(n+im)} \quad \text{(nach 91)}$$
$$= \left(e^{(\alpha+i\alpha_1+\beta+i\beta_1+\cdots)}\right)^{n+im} \cdot \varepsilon^{2p\pi(n+im)} \quad \text{(nach 524)}$$
$$= \left(e^{\alpha+i\alpha_1} e^{\beta+i\beta_1} \ldots\right)^{n+im} \cdot \varepsilon^{2p\pi(n+im)} \quad \text{(nach 526)}$$
$$= ((a + ia_1)(b + ib_1)\cdots)^{n+im} \cdot \varepsilon^{2p\pi(n+im)} \quad \text{(nach Annahme).}$$

Satz. $(a + ia_1)^{(m+im_1)\cdot(n+in_1)} = ((a + ia_1)^{m+im_1})^{n+in_1} \cdot \varepsilon^{2p\pi(n+in_1)}$ 529.
wo α_1 echt und $\alpha_1(m + im_1) = 2p\pi + r$, und r echt, auch $a + ia_1 = e^{\alpha+i\alpha_1}$.

Beweis. Es sei $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$ wo α_1 echt und sei $\alpha_1(m + im_1) = 2p\pi + r$ wo r ein echter Winkel, so ist

$$(a + ia_1)^{(m+im_1)(n+in_1)} = (e^{\alpha+i\alpha_1})^{(m+im_1)(n+in_1)} \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= e^{(\alpha+i\alpha_1)(m+im_1)(n+in_1)} \quad \text{(nach 522)}$$
$$= \left[e^{(\alpha+i\alpha_1)(m+im_1)}\right]^{n+in_1} \varepsilon^{2p\pi(n+in_1)} \quad \text{(nach 524)}$$
$$= \left[(e^{\alpha+i\alpha_1})^{(m+im_1)}\right]^{n+in_1} \varepsilon^{2p\pi(n+in_1)} \quad \text{(nach 522)}$$
$$= ((a + ia_1)^{m+im_1})^{n+in_1} \varepsilon^{2p\pi(n+in_1)} \quad \text{(nach Annahme).}$$

Satz. Wenn $e^{a+ia_1} = e^{b+ib_1}$, so ist $a_1 = b_1 + 2a\pi$ und $a + ia_1 = b + ib_1 + 2a\pi i$. 530.

Beweis. Es ist $e^{a+ia_1} = e^a \varepsilon^{a_1}$ und $e^{b+ib_1} = e^b \varepsilon^{b_1}$ mithin ist $e^a \varepsilon^{a_1} = e^b \varepsilon^{b_1}$, d. h. es muss $e^a = e^b$ und $\varepsilon^{a_1} = \varepsilon^{b_1}$ sein. Da nun e eine Plusgröse und a und b reell, so muss auch $a = b$ sein (nach 333) und da $\varepsilon^{a_1} = \varepsilon^{b_1}$ ist, so muss auch der Winkel $a_1 = b_1 + 2a\pi$ sein, d. h. es muss $a + ia_1 = b + ib_1 + 2a\pi i$ sein.

Satz. 531.

Wenn $(a + ia_1)^x = b + ib_1$ ist, so ist $x = \dfrac{\beta + i\beta_1 + 2a\pi i}{\alpha + i\alpha_1}$ wo $a + ia_1 = e^{\alpha+i\alpha_1}$ und $b + ib_1 = e^{\beta+i\beta_1}$.

Beweis. Man setze $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$ und $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$, so ist $e^{\beta + i\beta_1} = (e^{\alpha + i\alpha_1})^x = e^{(\alpha + i\alpha_1)x}$, also $(\alpha + i\alpha_1)x = \beta + i\beta_1 + 2a\pi i$, mithin $x = \frac{\beta + i\beta_1 + 2a\pi i}{\alpha + i\alpha_1}$.

3. Die Richtgröse im Loge (im Logarithmus).

Da wir bereits die Richtgröse im Exponenten oder in der Stufe kennen, so macht die Richtgröse im Logarithmus oder im Loge keine Schwierigkeiten und können wir sofort zu den Sätzen übergehen.

532. **Erklärung. Unter dem allgemeinen oder mehrwertigen Loge (Logarithmus) $\frac{b + ib_1}{a + ia_1}$ einer Richtgröse $b + ib_1$ in Bezug auf eine andere Richtgröse $a + ia_1 \gtrless 1$ als Base verstehen wir die gesammte Reihe der Grösen x, zu welchen $a + ia_1$ erhöht (potenzirt), $b + ib_1$ liefert.**

Unter dem einfachen oder einwertigen Loge (Logarithmus) $\frac{b + ib_1}{a + ia_1}$ einer Richtgröse $b + ib_1$ in Bezug auf eine andere Richtgröse $a + ia_1 \gtrless 1$ als Base verstehen wir den Ausdruck $\frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + i\alpha_1}$, wo $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$ und $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$ und α_1 und β_1 echte Winkel sind.

Den mehrwertigen Log bezeichnen wir durch $\frac{\cdots}{a}$ wo die Punkte in der obersten Linie die mehren Werte bezeichnen. Zwei mehrwertige Grösen dürfen immer nur entsprechend gleich (Zeichen $\cong$) gesetzt werden, d. h. so, dass jeder einfache einwertige Wert derselben dem entsprechenden Werte gleich gesetzt wird.

533. **Satz.** $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \cong \frac{\beta + i\beta_1 + 2a\pi i}{\alpha + i\alpha_1}$.

Beweis. Unmittelbar aus 531 und 532.

534. **Satz.** $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e} \cong \beta + i\beta_1 + i2a\pi$.

Beweis. Unmittelbar aus 533.

535. **Satz.** $l_e(a + ib) = \frac{1}{2} l_e(a^2 + b^2) + i\,\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right)$ wo $\frac{b}{a}$ echter Winkel

$l_e(a + ib) \cong \frac{1}{2} l_e(a^2 + b^2) + i\left[\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm a\pi\right]$ wo $\frac{b}{a}$ echter Winkel und zwar ist, wenn a eine Plusgröse

$\mathfrak{l}_e(a + ib) \cong {}^1/_2 l_e(a^2 + b^2) + i\left[\text{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm 2\mathfrak{a}\pi\right]$,

dagegen wenn a eine Strichgröse

$\mathfrak{l}_e(a + ib) \cong {}^1/_2 l_e(a^2 + b^2) + i\left[\text{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm (2\mathfrak{a} - 1)\pi\right]$.

Beweis. Es ist nach 521 $a + ib = e^{\alpha + i\beta} = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$, wo β echt. Hier ist $a = e^\alpha\cos\beta$, $b = e^\alpha\cdot\sin\beta$ und $e^\alpha = (a^2 + b^2)^{1/2}$ (nach 426), mithin ist $\cos\beta = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$, $\sin\beta = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$, $\tan\beta = \frac{b}{a}$ und $\beta = \text{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm \pi$, da β zwischen $+\pi$ und $-\pi$, dagegen arc zwischen $-{}^1/_2\pi$ und $+{}^1/_2\pi$ genommen ist, mithin ist nach 534

$$\mathfrak{l}_e(a + ib) \cong (\alpha + i\beta \pm 2\mathfrak{a}\pi)$$
$$\cong l_e(a^2 + b^2)^{1/2} + i\left[\text{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm \mathfrak{a}\pi\right],$$

mithin ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wenn nun $a = e^\alpha\cdot\cos\beta$ eine Plusgröse ist, so muss, da auch $e^\alpha = (a^2 + b^2)^{1/2}$ nach 271 eine Plusgröse ist, wenn wir $b = 0$, also $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = \pm$ setzen, $\cos\beta$ eine Plusgröse $= +1$ sein. Wenn dagegen a eine Strichgröse, d. h. negativ, so muss $\cos\beta$ eine Strichgröse $= -1$ sein. Mit andern Worten, wenn a eine Plusgröse, so ist der echte Winkel $\beta = 0$, wenn a eine Strichgröse, so ist der echte Winkel $\beta = -\pi$: daraus folgt der zweite Teil des Satzes.

Beispiele. Sei z. B. $a = +1$, so ist $\mathfrak{l}_e(+1) \cong i\cdot 2\mathfrak{a}\pi$, sei dagegen $a = -1$, so ist $\mathfrak{l}_e(-1) \cong i(2\mathfrak{a} + 1)\pi$, da dann $b = 0$, also $\text{arc}(\tan = 0) = 0$ ist.

Satz. $l_e\frac{a + ia_1}{a - ia_1} = 2i\,\text{arc}\tan = \frac{a_1}{a}$ wo $\frac{a_1}{a}$ **echter Winkel;** 536.

$$\mathfrak{l}_e\left(\frac{a + ia_1}{a - ia_1}\right) \cong 2i\left[\text{arc}\left(\tan = \frac{a_1}{a}\right) \pm \mathfrak{a}\pi\right].$$

Satz. $\frac{\mathfrak{e}^\beta}{\mathfrak{e}^\alpha} \cong \frac{\beta + 2\mathfrak{a}\pi}{\alpha}$. 537.

Beweis. $\frac{\mathfrak{e}^\beta}{\mathfrak{e}^\alpha} \cong \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}} \cong \frac{i\beta + 2i\mathfrak{a}\pi}{i\alpha} = \frac{\beta + 2\mathfrak{a}\pi}{\alpha}$.

Satz. $\frac{b + ib_1}{a + ia_1} \cong \frac{b + ib_1}{a + ia_1} + 2i\mathfrak{a}\pi\frac{e}{a + ia_1}$. 538.

Beweis. Es sei $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$ und $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$, wo α_1 und β_1 echt, so ist

$$\frac{b+ib_1}{a+ia_1} \cong \frac{e^{\beta+i\beta_1}}{e^{\alpha+i\alpha_1}} \cong \frac{\beta+i\beta_1}{\alpha+i\alpha_1} + 2ia\pi\frac{1}{\alpha+i\alpha_1} \quad \text{(nach 532)}$$

$$\cong \frac{e^{\beta+i\beta_1}}{e^{\alpha+i\alpha_1}} + 2ia\pi\frac{e}{e^{\alpha+i\alpha_1}} \quad \text{(nach 533)}$$

$$\cong \frac{b+ib_1}{a+ia_1} + 2ia\pi\frac{e}{a+ia_1} \quad \text{(nach Annahme).}$$

539. **Satz.** $\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon^\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ **wenn β und α ächte Winkel ſind.**

540. **Lehrſatz für Richtloge (komplexe Logarithmen). Es ist allgemein**

$$(a+ia_1)\frac{e^{\alpha+i\alpha_1}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} + (b+ib_1)\frac{e^{\beta+i\beta_1}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} + \cdots$$

$$= \frac{(e^{\alpha+i\alpha_1})^{a+ia_1}\cdot(e^{\beta+i\beta_1})^{b+ib_1}\cdots}{e^{\varrho+i\varrho_1}} + 2in\pi\frac{e}{e^{\varrho+i\varrho_1}},$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \cdots$ und p echte Winkel und $a\alpha_1 + \alpha a_1 + b\beta_1 + \beta b_1 + \cdots = 2n\pi + p$.

Beweis. Es ist

$$\frac{(e^{\alpha+i\alpha_1})^{a+ia_1}\cdot(e^{\beta+i\beta_1})^{b+ib_1}\cdots}{e^{\varrho+i\varrho_1}} = \frac{e^{(\alpha+i\alpha_1)(a+ia_1)}\cdot e^{(\beta+i\beta_1)(b+ib_1)}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} \quad \text{(nach 522)}$$

$$= \frac{e^{[(\alpha+i\alpha_1)(a+ia_1)+(\beta+i\beta_1)(b+ib_1)+\cdots]}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} \quad \text{(nach 526).}$$

Hier ist die Gröse $e^{[(\alpha+i\alpha_1)(a+ia_1)+(\beta+i\beta_1)(b+ib_1)+\cdots)}$ (nach 517) eine Winkeleinheit ε^m wo $m = 2n\pi + p$ und p ein echter Winkel, und $\varepsilon^m = e^{im} = e^{2in\pi+ip}$

alſo ist

$$\frac{(e^{\alpha+i\alpha_1})^{a+ia_1}\cdot(e^{\beta+i\beta_1})^{b+ib_1}\cdots}{e^{\varrho+i\varrho_1}} = \frac{e^{2in\pi+ir}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} = \frac{e^{ip}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} = \frac{ip}{\varrho+i\varrho_1}$$

$$= \frac{(\alpha+i\alpha_1)(a+ia_1)+(\beta+i\beta_1)(b+ib_1)+\cdots}{\varrho+i\varrho_1} - 2in\pi\frac{1}{\varrho+i\varrho_1}$$

$$= (a+ia_1)\frac{\alpha+i\alpha_1}{\varrho+i\varrho_1} + (b+ib_1)\frac{\beta+i\beta_1}{\varrho+i\varrho_1} + \cdots - 2in\pi\frac{1}{\varrho+i\varrho_1}$$

$$= (a+ia_1)\frac{e^{\alpha+i\alpha_1}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} + (b+ib_1)\frac{e^{\beta+i\beta_1}}{e^{\varrho+i\varrho_1}} + \cdots - 2in\pi\frac{e}{e^{\varrho+i\varrho_1}}.$$

Satz. $\frac{a+ia_1}{r+ir_1}+\frac{b+ib_1}{r+ir_1}+\cdots$ 541.

$$=\frac{(a+ia_1)(b+ib_1)\cdots}{r+ir_1}+2in\pi\frac{e}{r+ir_1},$$

wo $a+ia_1=e^{\alpha+i\alpha_1}$, $b+ib_1=e^{\beta+i\beta_1}_{\cdots}$ und $\alpha_1+\beta_1+\cdots=2n\pi+p$, wo p echt ist.

Satz. $(a+ia_1)^{\frac{e^{\alpha+i\alpha_1}}{e^{\varrho+i\varrho_1}}}=\frac{(e^{\alpha+i\alpha_1})^{a+ia_1}}{e^{\varrho+i\varrho_1}}+2in\pi\frac{e}{e^{\varrho+i\varrho_1}}$, 542.

wo $a\alpha_1+a_1\alpha=2n\pi+p$ und wo α_1 und p echt sind.

Beweis. Unmittelbar aus 540.

Satz. $\frac{a+ia_1}{(e^{\varrho+i\varrho_1})^{b+ib_1}}=\frac{a+ia_1}{e^{\varrho+i\varrho_1}}:(b+ib_1)$, **wenn $\varrho b_1+b\varrho_1=c$,** 543.

wo c ein echter Winkel.

Beweis. Sei $a+ia_1=e^{\alpha+i\alpha_1}$, so ist nach 522

$$\frac{a+ia_1}{(e^{\varrho+i\varrho_1})^{b+ib_1}}=\frac{e^{\alpha+i\alpha_1}}{e^{(\varrho+i\varrho_1)(b+ib_1)}}=\frac{\alpha+i\alpha_1}{(\varrho+i\varrho_1)(b+ib_1)}$$

$$=\frac{\alpha+i\alpha_1}{\varrho+i\varrho_1}:(b+ib_1)=\frac{a+ia_1}{e^{\varrho+i\varrho_1}}:(b+ib_1).$$

Satz. Es ist 544.

$$\alpha\frac{a+ia_1}{r+ir_1}+\beta\frac{b+ib_1}{r+ir_1}+\cdots\cong\frac{(a+ia_1)^{\alpha}\cdot(b+ib_1)^{\beta}\cdots}{r+ir_1}$$

dann und nur dann, wenn $\alpha,\beta\cdots$ sämmtlich ganze Zahlen sind und es irgend zwei unter ihnen giebt, welche Eins zum grösten gemeinschaftlichen Mase haben.

Beweis. Um zu untersuchen, in welchem Falle die obige Formel gelte, prüfen wir die Ausdrücke.

$$(\alpha+i\alpha_1)\frac{a+ia_1}{r+ir_1}+(\beta+i\beta_1)\frac{b+ib_1}{r+ir_1}+\cdots\cong$$

$$\cong(\alpha+i\alpha_1)\left(\frac{a+ia_1}{r+ir_1}+2i\mathfrak{a}\pi\frac{e}{r+ir_1}\right)$$

$$+(\beta+i\beta_1)\left(\frac{b+ib_1}{r+ir_1}+2i\mathfrak{b}\pi\frac{e}{r+ir_1}\right)+\cdots,$$ wo $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\cdots$ jede beliebige ganze Zahl (nach 538)

$$\cong(\alpha+i\alpha_1)\frac{a+ia_1}{r+ir_1}+(\beta+i\beta_1)\frac{b+ib_1}{r+ir_1}+\cdots$$

$$+2i\pi\frac{e}{r+ir_1}(\mathfrak{a}(\alpha+i\alpha_1)+\mathfrak{b}(\beta+i\beta_1)+\cdots)$$

$$\cong \frac{(a+ia_1)^{\alpha+i\alpha_1}\cdot(b+ib_1)^{\beta+i\beta_1}\cdots}{r+ir_1}$$

$$+ 2i\pi\frac{e}{r+ir_1}(\nu + \mathfrak{a}(\alpha+i\alpha_1) + \mathfrak{b}(\beta+i\beta_1) + \cdots) \quad \text{(nach 540)},$$

wo $a + ia_1 = e^{\alpha'+i\alpha_1'}$, $b + ib_1 = e^{\beta'+i\beta_1'}\ldots$ und $(\alpha+i\alpha_1)(\alpha'+i\alpha_1') + (\beta+i\beta_1)(\beta'+i\beta_1') + \cdots = 2i\pi\nu + in$, wo n ein echter Winkel.

Andrerſeits ist

$$\frac{(a+ia_1)^{\alpha+i\alpha_1}\cdot(b+ib_1)^{\beta+i\beta_1}\cdots}{r+ir_1} \cong \frac{(a+ia_1)^{\alpha+i\alpha_1}\cdot(b+ib_1)^{\beta+i\beta_1}\cdots}{r+ir_1}$$

$$+ 2i\pi\frac{e}{r+ir_1}\cdot n \quad \text{(nach 538)},$$

wo n jede beliebige ganze Zahl darstellt. Somit ſind die beiden obigen Ausdrücke dann und nur dann gleich, wenn auch

$\nu + \mathfrak{a}(\alpha+i\alpha_1) + \mathfrak{b}(\beta+i\beta_1) + \cdots = n$ jede beliebige ganze Zahl und keine andere als eine ganze Zahl darstellt, d. h. wenn die Grösen $+ i\alpha_1$, $\beta + i\beta_1$ ganze Zahlen ſind, und entweder eine von ihnen oder eine durch Zufügen oder Abziehen abgeleitete Gröse gleich Eins ist.

545. **Satz.** $\frac{a+ia_1}{r+ir_1} + \frac{b+ib_1}{r+ir_1} + \cdots \cong \frac{(a+ia_1)(b+ib_1)\cdots}{r+ir_1}$.

Beweis. Unmittelbar aus 544.

4. Die Richtgröse im Winkel.

Nach den Vorbemerkungen zu Nummer 510 haben wir bereits geſehen, dass wenn man die Reihen für sin x und cos x auch für ix statt x anwendet, dass dann

$e^x = \varepsilon^{-ix} = \cos ix - i \sin ix$ und $e^{-x} = \varepsilon^{ix} = \cos ix + i \sin ix$

ist, dies führt uns bereits auf die Bedeutung der Richtgröse im Winkel; es ist hienach

$$\cos ix = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \frac{\varepsilon^{ix}+\varepsilon^{-ix}}{2} \text{ und } \sin ix = \frac{e^{-x}-e^x}{2i} = i\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon^{ix}-\varepsilon^{-ix}}{2i} = i\frac{\varepsilon^{-ix}-\varepsilon^x}{2}$$

und kann man hienach leicht die Richtgröse im Winkel erklären.

546. **Erklärung. Unter den Richtgrösen sin(a + ib) und cos(a + ib) verstehen wir die Richtgrösen, für welche**

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$
$$= \frac{\varepsilon^{(x+iy)} - \varepsilon^{-(x+iy)}}{2i}$$
$$\cos(x+iy) = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$
$$= \frac{\varepsilon^{(x+iy)} - \varepsilon^{-(x+iy)}}{2} \text{ ist.}$$

Da nach 530, wenn $e^{y-ix} = e^{c-id}$ ist, auch $x = d + 2a\pi$ fein muss, fo folgt, dass wenn $\sin(x+iy) = \sin(c+id)$, und zugleich $\cos(x+iy) = \cos(c+id)$ fein foll, dann auch $x = d + 2a\pi$ fein muss, d. h. die Formel, welche wir bereits für die Sinus und Cosinus reeller Winkel kennen gelernt haben.

Satz. $\sin iy = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}$ $\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. 547.

Beweis. Unmittelbar aus 545, wenn man $x = 0$ fetzt.

Man nennt die Formel $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$ gewöhnlich den hyperbolischen Cosinus (Zeichen cshpy) und die Formel $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{\sin iy}{i}$ den hyperbolischen Sinus (Zeichen snhpy). Viel besser ist es $\sin iy$ und $\cos iy$ einzuführen, dann behalten die Formeln ihre harmonische Gestalt, fo bleibt $(\sin iy)^2 + (\cos iy)^2 = 1$, dagegen wird $(\text{cshpy})^2 - (\text{snhpy})^2 = 1$ und fo in vielen Fällen; man tut daher besser, diefe unnütze neue Bezeichnung des hyperbolischen Sinus und Cosinus wieder abzuschaffen.

Satz. $\sin(x+iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x$ 548.
$$= (\sin x)\cos iy + (\cos x)\sin iy$$
$$\cos(x+iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x$$
$$= (\cos x)\cos iy - (\sin x)\sin iy.$$

Beweis. Nach 545 ist

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = i\frac{e^y \cdot e^{-ix} - e^{-y} \cdot e^{+ix}}{2}$$
$$= i\frac{e^y(\cos x - i\sin x) - e^{-y}(\cos x + i\sin x)}{2}$$
$$= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cdot \sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x$$
$$= (\sin x)\cos iy + (\cos x)\sin iy$$

$$\cos(x+iy)=\frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2}=\frac{e^{y}\cdot e^{-ix}+e^{-y}\cdot e^{ix}}{2}$$

$$=\frac{e^{y}(\cos x-i\sin x)+e^{-y}(\cos x+i\sin x)}{2}$$

$$=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x-i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x$$

$$=(\cos x)\cos iy-(\sin x)\sin iy.$$

549. **Satz.**

$$\tan(x+iy)=\frac{2\sin 2x+i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}}=\frac{\sin 2x+\sin 2iy}{\cos 2x+\cos 2iy}$$

$$\cot(x+iy)=-\frac{\sin 2x-\sin 2iy}{\cos 2x-\cos 2iy}.$$

Beweis. Es ist

$$\tan(x+iy)=\frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}=\frac{(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x}{(e^{y}+e^{-y})\cos x-i(e^{y}-e^{-y})\sin x}.$$

Und wenn man hier Zähler und Nenner mit

$$(e^{y}+e^{-y})\cos x+i(e^{y}-e^{-y})\sin x$$

vervielfacht, ſo wird der Nenner reell und

$$\tan(x+iy)=\frac{2\sin 2x+i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}}=\frac{\sin 2x+\sin 2iy}{\cos 2x+\cos 2iy}.$$

Ebenſo folgt $\cot(x+iy)=-\frac{\sin 2x-\sin 2iy}{\cos 2x-\cos 2iy}$.

550. **Satz.** $\operatorname{arc}(\tan=x)=\frac{1}{2i}l_e\frac{1+ix}{1-ix}$.

Beweis. Unmittelbar aus 536.

551. **Satz.** $\operatorname{arc}(\sin=x)=\frac{1}{2i}l_e\frac{(1-x^2)^{1/2}+ix}{(1-x^2)^{1/2}-ix}$.

Beweis. Es ist $\operatorname{arc}(\sin=x)=\operatorname{arc}\left(\tan=\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\right)$

(nach 491)

$$=\frac{1}{2i}l_e\frac{1+\frac{ix}{(1-x^2)^{1/2}}}{1-\frac{ix}{(1-x^2)^{1/2}}}$$

$$=\frac{1}{2i}l_e\frac{(1-x^2)^{1/2}+ix}{(1-x^2)^{1/2}-ix}.$$

Satz. 552.

$$\mathrm{arc}(\sin = a + ib) = x + iy; \qquad \mathrm{arc}(\cos = a + ib) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

Beweis.

$$\sin(x + iy) = (\sin x)\cos iy + (\cos x)\sin iy \qquad \text{(nach 548)}$$

$$= (\sin x)\frac{e^y + e^{-y}}{2} + i(\cos x)\frac{e^y - e^{-y}}{2} = a + ib$$

(nach 547)

$$\text{wo } a = (\sin x)\frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad b = (\cos x)\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Es ist aber auch

$$a + ib = \sin(x + iy) = [\cos(90^0 - x)]\cos iy + [\sin(90^0 - x)]\sin iy$$

(nach 452)

$$= \cos((90^0 - x) - y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right)$$

(nach 547).

Daraus ergiebt fich unmittelbar der Satz

$$\mathrm{arc}(\sin = a + ib) = x + iy, \qquad \mathrm{arc}(\cos = a + ib) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

Satz. $\mathrm{arc}(\sin = a + ib) + \mathrm{arc}(\cos = a + ib) = \frac{\pi}{2}$. 553.

Unmittelbar aus 552 durch Zufügung.

Satz. $\mathrm{arc}(\tan = c + id) = x + iy;$ 554.

$$\mathrm{arc}(\cot = c + id) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

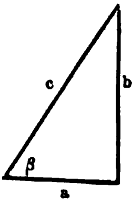
Satz. $\mathrm{arc}(\tan = c + id) + \mathrm{arc}(\cot = c + id) = \frac{\pi}{2}$. 555.

Unmittelbar aus 554.

Vierter Abschnitt der Zahlenlehre: Die erweiternde Zahlenlehre oder die Lehre von den Gleichungen.

Die Lehre von den Gleichungen bildet den höchsten Zweig der Zahlenlehre, ſie ſetzt die andern Zweige derſelben bereits voraus, namentlich ſetzt ſie den Zweigliederſatz oder binomischen Lehrſatz 393 aus dem zweiten Abschnitte und die Lehre von den Richtgrösen voraus.

Aus der Lehre von den Richtgrösen oder komplexen Grösen gebraucht man namentlich die Sätze, dass $a + ia_1 = b + ib_1$ dann und nur dann, wenn $a = b$, und $a_1 = b_1$ und wo $i = (-1)^{1/2}$, ferner dass, wenn $(a^2 + b^2)^{1/2} = c$, oder wenn $a^2 + b^2 = c^2$, d. h. wenn a und b die Katheten und c die Hypotenuſe in einem rechtwinkligen Dreiecke ſind, dass dann



$$a + ib = c\left(\frac{a}{c} + i\frac{b}{c}\right) = c(\cos\beta + i\sin\beta)$$ ist, dass $\varepsilon = \cos 1 + i \sin 1$ und dass

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha)\cdot\cos\beta - (\sin\alpha)\cdot\sin\beta + i[(\sin\alpha)\cdot\cos\beta + (\cos\alpha)\cdot\sin\beta)]$$
$$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

nach einem bekannten Satze der Trigonometrie, mithin $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$ und

$\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\varepsilon^{\alpha+\beta} = \varepsilon^{\alpha}\cdot\varepsilon^{\beta}$, auch $(a\varepsilon^{\alpha})^{c} = a^{c}\cdot\varepsilon^{\alpha c}$, wenn α zwischen $-\pi$ und $+\pi$, d. h. ein echter Winkel ist.

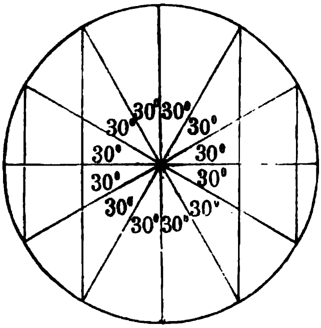
Will man nicht den dritten Abschnitt durchnehmen, ſo muss man wenigstens dieſe Sätze vollkommen anschaulich machen und beweiſen.

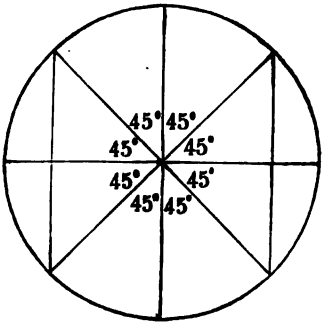
Hieraus hat ſich der Satz 498 ergeben, der für die Lehre von den höhern Gleichungen die Einleitung bildet.

Wenn $x^n = 1$, wo n eine ganze Zahl, ſo ist

$$\sqrt[n]{x^n} \cong x_a \cong \cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n} = \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}},$$

wo a alle ganzen Werte von 0 bis $n-1$ haben kann, und $2\pi = 360^0$.





Beispiele. Es ſei

$$x^8 = 1, \text{ ſo ist } \frac{2a\pi}{8} = 0^0, 45^0, 90^0, 135^0, 180^0, 225^0, 270^0, 315^0.$$

Es ſei $x^{12} = 1$, ſo ist

$$\frac{2a\pi}{12} = 0^0, 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0, 210^0, 240^0, 270^0, 300^0, 330^0.$$

Für die höhern Gleichungen pflegt man gewöhnlich die Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

zu Grunde zu legen; aber dieſe Form muss verworfen werden, da ſie nicht mit der Form der Reihen übereinstimmt und daher leicht zu Verwirrungen Anlass giebt. Bei den Reihen giebt man dem Gliede x^a die Vorzahl a_a, ebenſo muss man es daher auch bei den Gleichungen machen, ich lege daher die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

auch für die Gleichungen zu Grunde.

Die Lehre von den Gleichungen ist im Jahre 1847 von meinem Bruder und mir gemeinschaftlich ausgearbeitet worden, damals mit Benutzung der Ausdehnungslehre und der äusern Produkte Die Sätze ſind bereits damals im Weſentlichen in der jetzigen Form abgeleitet. Die Gleichungen dritten und vierten Grades ſind jedoch damals nicht von uns behandelt worden, ebenſo nicht die neuern Löſungswege für höhere Gleichungen.

Die Sätze über die Gleichungen ersten Grades ſind bereits in Satz 302 bis 314 aufgestellt; ich erlaube mir aber im Folgenden dieſe Sätze hier zu wiederholen, um alle Gleichungsſätze hier beiſammen zu haben.

Die Lehre von den quadratischen Gleichungen ist ſo gehalten, dass man dieſelben auch ſofort nach Satz 393 durchnehmen kann.

Die Lehre von den kubischen Gleichungen und von den biquadratischen Gleichungen ist ſo gehalten, dass die Löſung darnach leicht zu finden ist.

Das Buch schliest mit der Löſung der höhern Gleichungen durch Näherung.

13. Die allgemeinen Sätze über die Gleichungen.

556. **Erklärung. Die Unbekannte heist die Gröse x einer Gleichung, deren Wert gesucht werden soll.**

Eine Wurzel der Gleichung heist der bestimmte Wert, welcher, statt der Unbekannten eingeführt, der Gleichung genügt. Hat man die Wurzel gefunden, so sagt man, die Gleichung sei aufgelöst.

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so heist die Reihe von n bestimmten Werten, welche den n Gleichungen genügt, die Wurzelreihe der n Gleichungen.

Aus zwei Gleichungen mit einer Unbekannten eine neue Gleichung ableiten, welche diese Unbekannte nicht enthält, heist die Unbekannte entfernen (eliminiren).

557. **Satz. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen auf gleiche Weise knüpft, namentlich wenn man auf beiden Seiten Gleiches fügt, bei trennbarer Fügung Gleiches abzieht, mit Gleichem webt und bei trennbarer Webung durch Gleiches (ungleich Null) teilt.**

Beweis. Aus Satz 17 oder aus 303.

558. **Satz. Statt auf einer Seite der Gleichung ein Stück zuzufügen oder einen Abzug abzuziehen, kann man auf der andern Seite das Stück abziehen, oder den Abzug zufügen, und**

Statt eine Seite mit einem Fache zu vervielfachen oder durch einen Nenner zu teilen, kann man die andere Seite durch das Fach teilen, oder mit dem Nenner vervielfachen, d. h.

$$\text{wenn } a + c = b, \text{ so } a = b - c,$$
$$\text{wenn } a - c = b, \text{ so } a = b + c,$$
$$\text{wenn } ac = b, \text{ so } a = \frac{b}{c},$$
$$\text{wenn } \frac{a}{c} = b, \text{ so } a = bc.$$

Beweis. Unmittelbar aus 303.

559. **Satz. Ein Glied schafft man von einer Seite weg, indem man es mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung stellt.**

Ein Fach oder einen Nenner eines Gliedes schafft man weg, indem man alle andern Glieder durch das Fach teilt, oder mit dem Nenner vervielfacht.

Beweis. Unmittelbar aus 304.

Satz. Statt die eine Seite einer Gleichung zu einer Stufe zu erhöhen oder zu einer Senke zu tiefen, kann man die andere Seite der Gleichung zu der Stufe tiefen oder zu der Senke erhöhen, und 560.

Statt eine Seite der Gleichung mit einer Bafe a zu erhöhen oder nach einer Bafe b zu logen, kann man die andere Seite nach der Bafe a logen oder mit der Bafe b erhöhen, d. h.

wenn $a^n = b$, **fo** $a = b^{\frac{1}{n}}$, **wenn** $a^{\frac{1}{n}} = b$, **fo** $a = b^n$,

wenn $n^a = b$, **fo** $a = \frac{b}{n}$, **wenn** $\frac{a}{n} = b$, **fo** $a = n^b$.

Beweis. Unmittelbar aus 343 und 344.

Satz. Man kann die Vorzeichen aller Glieder einer Gleichung entgegengefetzt nehmen. 561.

Beweis. Man kann beide Seiten der Gleichung mit -1 vervielfachen, dann aber werden alle Zeichen entgegengefetzt (nach 158).

Beispiele. $a - x = b - c$, $x - a = c - b$.

Satz. Wenn beide Seiten der Gleichung Brüche find, deren Zähler ungleich Null, fo kann man beide Brüche umkehren. 562.

Beweis. Es fei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, fo ist $1 : \frac{a}{b} = 1 : \frac{c}{d}$ (nach 303), d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (nach 181), was zu beweifen war.

Erklärung. Eine Gleichung heist eingerichtet, wenn fie die Form einer Höhenreihe hat, in welcher die höchste Höhe das Fach 1 hat, die Glieder mit Höhen von x auf der linken Seite und das Glied ohne x auf der rechten Seite der Gleichung steht (fie heist auf Null gebracht, wenn alle Glieder auf der einen Seite und 0 auf der andern Seite der Gleichung steht). 563.

Die Gleichung heist nten Grades, wenn x^n **die höchste Höhe (Potenz) von x ist, fie heist ersten Grades, wenn die linke Seite der eingerichteten Gleichung nur x enthält.**

Aufgabe. Eine Gleichung mit einer Unbekannten x einzurichten. 564.

Auflöfung. Man schafft alle Nenner weg (nach Satz 559), löft die Klammern auf, welche x enthalten, schafft die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die ohne x auf die rechte Seite, fasst in jedem Gliede die Fache oder Faktoren x zu einer Höhe zufammen, fügt die Glieder, welche gleiche Höhen von x enthalten, in ein Glied, ordnet die Glieder fo, dass die höchste Höhe von x beginnt und die jedesmal niedere folgt. Ist dann die Vorzahl des ersten Gliedes Null,

ſo lasse man dies fort, ist ſie nicht Null, ſo teile man jedes Glied durch dieſelbe, ſo ist die Gleichung eingerichtet.

Beweis. Unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen.

565. **Satz. Eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten ist aufgelöſt, wenn ſie eingerichtet ist.**

Die Auflöſung der Gleichungen ersten Grades mit mehren Unbekannten ist in den Sätzen 309 bis 314 gelehrt.

Einen weitern Weg der Auflöſung lehrt die Ausdehnungslehre.

Die folgenden Sätze dieſer Nummer können, wenn man nur die Gleichungen zweiten Grades durchnehmen will, weggelassen werden; dagegen werden ſie für die Gleichungen höhern Grades gebraucht.

566. **Satz. Die Wurzeln der Gleichung $x^n = a$ ſind $x_a = a^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}}$, wo a alle ganzen Werte von 0 bis n — 1 haben kann.**

Beweis. $x^n = a = a \cdot 1$, mithin $x_a = a^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{1} = a^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}}$.

567. **Satz. Jede Gleichung n ten Grades hat mindestens eine Wurzel.**

Beweis. Es ſei $A = 0$ dieſe Gleichung, wo A eine Gleichung n ten Grades von x ist; es ist zu zeigen, dass es allemal einen Wert von x giebt, welcher der Gleichung genügt.

Man kann zuerst zeigen, dass man, wenn für irgend einen Wert x der Ausdruck A, alſo auch ſein Pluswert noch nicht Null ist, stets x ſo ändern kann, dass der Pluswert von A, welcher mit a bezeichnet ſein mag, kleiner wird als er war. Hieraus folgt dann, dass der kleinste Wert von a nicht von Null verschieden ſein kann, dass er alſo Null ſein muss, und da unter allen Werten, welche a bei beliebigem x annehmen kann, doch einer der kleinste ſein muss, ſo wird dann bewieſen ſein, dass es Werte von x geben muss, für welche a, und alſo auch A gleich Null wird. Man ſetze alſo in A überall $x + y$ statt x, und gehe dadurch der Ausdruck A in B über. Jedes Glied von B lässt ſich dann nach dem Zweigliederſatze (binomischen Lehrſatze 393) in einer nach y steigenden Höhenreihe entwickeln, deren erstes Glied gleich dem entſprechenden Gliede von A ist; zieht man daher A von B ab, ſo erhält man eine nach y steigende Höhenreihe, in welcher notwendig das erste Glied (d. h. die Vorzahl von y^0) Null ist, übrigens auch eines oder mehre der folgenden Glieder Null ſein können. Das erste Glied, was nicht Null ist, ſei Cy^p, wo p alſo > 0, und die folgenden Glieder höhere Höhen von y enthalten, alſo

$$B - A = Cy^p + \cdots\cdots,$$

Setzen wir, um die Pluswerte einzuführen,

$$A = a\epsilon^{\alpha},\ B = b\epsilon^{\beta},\ C = c\epsilon^{\gamma},\ y = u\epsilon^{\zeta},$$

wo a, b, c, u die Pluswerte, und wo $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ die echten Winkel der Winkelgrösen A, B, C, y ſind, ſo geht die vorige Gleichung über in

$b\epsilon^{\beta} - a\epsilon^{\alpha} = c\epsilon^{\gamma}(u\epsilon^{\zeta})^{p} + \cdots$, d. h.

$$b\epsilon^{\beta} = a\epsilon^{\alpha} + cu^{p}\epsilon^{\gamma + p\zeta} + \cdots$$
$$= a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + cu^{p}[\cos(\gamma + p\zeta) + i\sin(\gamma + p\zeta)] + \cdots$$

(nach 500)

$$= a\cos\alpha + cu^{p}\cos(\gamma + p\zeta) + \cdots + i[a\sin\alpha + cu^{p}\sin(\gamma + p\zeta) + \cdots],$$

alſo (nach 426)

$$b^{2} = [a\cos\alpha + cu^{p}\cos(\gamma + p\zeta) + \cdots]^{2} + [a\sin\alpha + cu^{p}\sin(\gamma + p\zeta) + \cdots]^{2},$$
$$= a^{2}((\cos\alpha)^{2} + (\sin\alpha)^{2}) + 2acu^{p}[(\cos\alpha)\cos(\gamma + p\zeta)$$
$$+ (\sin\alpha)\sin(\gamma + p\zeta)] + \cdots,$$

wo die folgenden Glieder schon höhere Höhen von u, als die p te, enthalten; alſo nach bekannten Sätzen der Trigonometrie

$$= a^{2} + 2acu^{p}\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) + \cdots, \text{ oder}$$
$$b^{2} - a^{2} = 2acu^{p}\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) + \cdots.$$

Da nun $y = u\epsilon^{\zeta}$ ein beliebig zu wählender Zuwachs von x ist, alſo u und ζ willkürlich gewählt werden können, ſo können wir ζ ſo wählen, dass $\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) = -1$ ſei. Dies wird der Fall ſein, wenn wir $\zeta = \dfrac{\pi + \alpha - \gamma}{p}$ ſetzen, was immer möglich ist, da $p \gtrless 0$. Dann wird in der Tat $\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) = \cos\pi = -1$ und die obige Gleichung wird $b^{2} - a^{2} = -2acu^{p} + \cdots$.

So lange a (der Pluswert von A) nicht Null ist, und auch u von Null verschieden, alſo als Plusgröse angenommen wird, bleibt $a\gamma u^{p}$ Plusgröse. Nun können wir u stets ſo klein annehmen, dass $2acu^{p}$ gröser wird als der Pluswert der Summe aller folgenden Glieder mit höhern Höhen von u. Dann wird alſo $-2acu^{p} + \cdots$ eine Strichzahl, alſo auch $b^{2} - a^{2}$ eine Strichzahl, d. h. $b^{2} < a^{2}$, alſo auch $b < a$ (nach 377), d. h. der Pluswert von B ist kleiner als der von A. Alſo, wenn A noch nicht Null ist, ſo kann man x stets ſo ändern, dass der Pluswert a von A kleiner wird als vorher. Nun muss es aber Werte von x geben, für die a kleiner wird als für alle übrigen Werte von x. Für jene Werte kann, wie eben gezeigt, a nicht von Null verschieden ſein, d. h. muss a Null ſein. Alſo giebt es Werte von x, für die a, d. h. der Pluswert von A Null ist, alſo auch A ſelbst Null ist.

568. **Satz. Es ist** $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n$
$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1})(x - \alpha)$,
wo $\alpha_0 = a_0 + \alpha a_1$ **und** $\alpha_a = a_a + \alpha a_{a+1}$ **und** $\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \alpha$ **ist.**

Beweis. Führt man die Vervielfachung auf der rechten Seite aus, so erhält man

$$\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1} \\ x - \alpha \\ \hline \qquad\quad \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n \\ -\alpha\alpha_1 - \alpha\alpha_2 x - \alpha\alpha_3 x^2 - \alpha\alpha_4 x^3 - \cdots - \alpha x^{n-1}. \end{array}$$

Es ist aber $\alpha_0 - \alpha\alpha_1 = a_0$, $\alpha_1 - \alpha\alpha_2 = a_1$, $\alpha_2 - \alpha\alpha_3 = a_2, \cdots$
$\alpha_{n-1} - \alpha = a_{n-1}$, also ist

$$(x - \alpha)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}) + \alpha_0$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

569. **Satz. Wenn** $x = \alpha$ **eine Wurzel der Gleichung**
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0$ **ist, so ist diese Gleichung gleich** $(x - \alpha)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-2}x^{n-2} + x^{n-1}) = 0$, **wo** $\alpha_{a-1} = a_a + \alpha a_a$ **ist** **oder**
Es lässt sich dann die Gleichung $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ **durch** $x - \alpha$ **ohne Rest teilen und der Bruch (der Quotient) ist ein Ausdruck** $(n - 1)$ **ten Grades.**

Beweis. Wenn man die in Satz 568 angegebenen Werte von $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ einführt, so erhält man
$\alpha_0 = a_0 + \alpha\alpha_1$, $\alpha_a = a_a + \alpha\alpha_{a+1}$, also $\alpha_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2$, $\alpha_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \alpha^3 a_3$ und endlich $\alpha_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + a^3 a_3 + \cdots + \alpha^{n-1} a^{n-1} + a^n$. Und da nun α statt x nach der Annahme der Gleichung genügt, so ist diese Gleichung $= 0$, d. h. $\alpha_0 = 0$, mithin ist nach 568

$$a_0 + a_1 x + \cdots + x^n = (x - \alpha)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}).$$

570. **Satz. Jede Gleichung n ten Grades von der Form** $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = 0$ **lässt sich als ein Zeug (Produkt) von n Grösen der Form** $x - \alpha$ **darstellen.**

Beweis. Aus 567 und 569, wenn man diese Sätze wiederholt anwendet.

571. **Satz. Jede Gleichung n ten Grades hat n Wurzeln, von denen aber mehre einander gleich werden können und**

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, **die Wurzeln einer Gleichung n ten Grades sind, so ist das Zeug der Grösen** $x - \alpha_1 \cdots x - \alpha_n$ **der Gleichung gleich, oder**

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n).$$

Beweis. Nach 570 lässt sich, wenn $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = 0$ die gegebene Gleichung ist, die linke Seite als Zeug (Produkt) von n Grösen der Form $x - \alpha$ darstellen. Es seien dies $x - \alpha_1, x - \alpha_2 \cdots$, $x - \alpha_n$, so hat man

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n) = 0.$$

Jedes Zeug (Produkt) ist nach 175 dann und nur dann Null, wenn eines seiner Fache (Faktoren) Null ist, also ist entweder $x - \alpha_1 = 0$, oder $x - \alpha_2 = 0$ u. s. w., d. h. es ist entweder $x = \alpha_1$ oder $x = \alpha_2$ u. s. w. oder $x = \alpha_n$ oder es sind diese n Grösen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung. Und umgekehrt, wenn dies n Wurzeln der Gleichung sind, so folgt nach 569 die Gleichung

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + \cdots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n) = 0.$$

Satz. In einer Gleichung n ten Grades 572.
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = 0$ ist die Summe der n Wurzeln gleich $-a_{n-1}$, die Summe der Zeuge oder Produkte von je zweien derselben $= a_{n-2}$, die Summe der Zeuge von je dreien derselben $= -a_{n-3}$ u. s. w., die Summe der Zeuge von je r derselben $= a_{n-r}\cdot(-1)^r$.

Beweis. Denn wenn die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ sind, so ist (nach 571)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Entwickelt man nun die rechte Seite nach Höhen von x, so erfolgt der zu erweisende Satz.

Satz. Wenn in einer Gleichung n ten Grades mit Vorzahlen (reellen Koeffizienten) $a + ib$ eine Wurzel ist, so ist auch $a - ib$ eine solche. 573.

Beweis. Es sei $A = 0$ die gegebene Gleichung n ten Grades für x. Setzt man nun $a + ib$ statt x, so verwandelt sich A (nach 426) in einen Ausdruck der Form $B + iC$, und wenn man $a - ib$ statt x setzt, in $B - iC$. Wenn nun $a + ib$ eine Wurzel der Gleichung ist, so muss $B + iC = 0$ sein, d. h. (nach 426), $B = 0$, $C = 0$; dann ist also auch $B - iC = 0$, d. h. auch $a - ib$ ist dann eine Wurzel der Gleichung $A = 0$.

Satz. Wenn man in einer Gleichung n ten Grades 574.
$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ statt der Unbekannten x eine neue y einführt, welche mit x durch die Gleichung

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{n}$$

verbunden ist, d. h. welche gegen x um den n ten Teil der zweiten Vorzahl (der Vorzahl von x^{n-1}) vermehrt ist und dann die Gleichung

nach y einrichtet, ſo ist die Vorzahl des zweiten Gliedes in der ſo erhaltenen Gleichung Null.

Beweis.

$$x^n = \left(y - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^n = y^n - ny^{n-1}\frac{a_{n-1}}{n} + \cdots$$

$$= y^n - a_{n-1}y^{n-1} + \cdots a_{n-1}x^{n-1} = a_{n-1}\left(y - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-1}$$

$$= a_{n-1}(y^{n-1} - \cdots) = a_{n-1}y^{n-1} - \cdots,$$

alſo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots = y^n + 0 \cdot y^{n-1} + \cdots$.

14: Die Gleichungen zweiten Grades oder die quadratischen Gleichungen.

Die quadratischen Gleichungen werden in den Schulen stets vor der Lehre von den Jgrösen (den komplexen Grösen) durchgenommen, wissenschaftlich gehören ſie erst in den letzten Abschnitt nach der Lehre von den Jgrösen (komplexen Grösen), in dieſem Buche müssen ſie alſo an dieſer Stelle ihre Behandlung finden. Um ſie aber auch Jedem verständlich zu machen, der jene schwierige Lehre nicht durchgenommen hat, füge ich die folgende Erklärung in elementarer Form hier auf.

575. **Erklärung. Jede Gröse x, welche einer Gleichung von x Genüge tut, heist eine Wurzel dieſer Gleichung. Das Zeichen der zweiten Wurzel ist $\sqrt{Fx}$, geleſen 2 te Wurzel aus Formel von x.**

Die Gleichung zweiten Grades hat zwei Werte; man darf alſo nicht allgemein ſetzen $\sqrt{x} = \sqrt{x}$, kurz die Wurzel ist keine einwertige Gröse, mit welcher man rechnen dürfte, ſo z. B. hat $\sqrt{a^2}$ die beiden Werte $+a$ und $-a$, wollte man alſo $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2}$ ſetzen, ſo wäre damit auch $+a = -a$ geſetzt. Es ist vielmehr nur $\sqrt{a^2} \backsimeq \sqrt{a^2}$, d. h. es ſind nur die entsprechenden Wurzeln aus a^2 einander gleich.

576. **Erklärung. Die Gleichung zweiten Grades wird auch eine quadratische Gleichung genannt. Dieſelbe ist eine reine, wenn das Glied erster Stufe fehlt, eine gemischte, wenn es vorhanden ist.**

Das Zeichen der zweiten Wurzel ist kurz $\sqrt{\ }$.

Die zweite Tiefe aus $-a$ heist eine reine Jgröse (imaginäre Gröse), die zweite Tiefe aus -1 heist das J (die imaginäre Eins) Zeichen i.

Beispiele. $x^2 = a$ ist eine reine, $x^2 + ax = b$ ist eine gemischte quadratische Gleichung. Jede Gleichung zweiten Grades hat zwei Wurzeln, z. B. die Gleichung $x^2 = a^2$ hat die Wurzeln $+a$ und $-a$, die Gleichung $x^2 = -a^2$ hat, wie wir später ſehen werden, die Wurzeln $+ia$ und $-ia$.

Satz. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 577.

Das Quader der Summe zweier Grösen erhält man, indem man zu der Summe der beiden Quader der Grösen das doppelte Zeug (Produkt) dieſer Grösen zufügt (addirt).

Beweis. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ (nach 318)

$= a^2 + 2ab + b^2$ (nach 180)

Beispiele. $(3 + 5)^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = 64$

$(7 + 3)^2 = 49 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 9 = 100$.

Satz. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. 578.

Das Quader des Unterschiedes zweier Grösen erhält man, indem man von der Summe der beiden Quader der Grösen das doppelte Zeug (Produkt) der beiden Grösen abzieht.

Beweis. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ (nach 318)

$= a^2 - 2ab + b^2$ (nach 180).

Beispiele. $(5 - 3)^2 = 25 - 2 \cdot 5 \cdot 3 + 9 = 4$

$(7 - 3)^2 = 49 - 2 \cdot 7 \cdot 3 + 9 = 16$.

Satz. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. 579.

Das Zeug oder Produkt der Summe und des Unterschiedes zweier Zahlen ist gleich dem Unterschiede der beiden Quader der Zahlen oder

Der Unterschied der Quader zweier Zahlen ist gleich dem Zeuge (Produkte) aus der Summe und dem Unterschiede der beiden Zahlen.

Beweis. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (nach 180).

Beispiele. $(7 + 3)(7 - 3) = 49 - 9 = 40$

$(8 + 5)(8 - 5) = 64 - 25 = 39$.

Satz der reinen quadratischen Gleichung. Die reine Gleichung zweiten Grades $x^2 = a^2$ hat, wenn a^2 eine Plusgröse $+ a^2$ ist, zwei Zahlwurzeln (reelle Wurzeln) $+ a$ und $- a$, welche entgegengeſetzt ſind, wenn a^2 eine Strichgröse $- b^2$ ist, ſo hat ſie zwei Jwurzeln (imaginäre Wurzeln). 580.

Beweis. a. Wenn a^2 eine Plusgröse ist, ſo folgt aus $x^2 = a^2$ ſofort $x^2 - a^2 = 0$, mithin nach 578 $(x + a)(x - a) = 0$.

Wenn aber ein Zeug (Produkt) Null ist, ſo ist nach 114 notwendig einer der beiden Fache (Faktoren) Null, alſo ist entweder $x + a = 0$, oder $x - a = 0$, d. h. x ist entweder $- a$ oder $+ a$.

b. Wenn a^2 eine Strichgröse, ſo ist die Wurzel derſelben eine Jgröse nach 425.

Satz der gemischten quadratischen Gleichung. Eine gemischte quadratische Gleichung löſt man auf, indem man ſie einrichtet, dann auf beiden Seiten das Quader der halben Vorzahl (des 581.

halben Koeffizienten) des Gliedes erster Stufe zufügt, auf beiden Seiten die Wurzel zieht und der rechten Seite das Zeichen $\mp$ vorſetzt, oder

Wenn $x^2 + ax = b$ ist, ſo ist

$$x + \frac{a}{2} \cong \mp\left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2} \text{ und } x \cong -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Beweis. 1. Man füge zu $x^2 + ax = b$ auf beiden Seiten $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, ſo ist $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Hier ist die linke Seite nach 576 das Quader von $x + \frac{a}{2}$, alſo ist

$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, mithin nach 340

$$x + \frac{a}{2} \cong \mp\left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}, \text{ alſo } x \cong -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Beweis. 2. Man vervielfache die Gleichung mit 4, alſo $4x^2 + 4ax = 4b$ und betrachte $2x$ als Unbekannte, dann ist $(2x)^2 + 2a\cdot(2x) = 4b$, man füge nun auf beiden Seiten a^2, ſo ist $(2x)^2 + 2a\cdot(2x) + a^2 = (2x + a)^2 = 4b + a^2$, dann ist nach 340 die Wurzel

$$2x + a \cong \mp (4b + a^2)^{1/2}, \text{ mithin } x \cong \frac{-a \mp (4b + a^2)^{1/2}}{2}.$$

Beiſpiele. $x^2 + 5x = 6$, mithin $x \cong -\frac{5}{2} \mp \left(6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{1/2}$, d. h. entweder $x = -6$ oder $x = +1$

$x^2 + 3x = 7$, mithin $x \cong -\frac{3}{2} \mp \left(7 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{1/2}$, d. h. $x = \frac{-3 \mp 6{,}082763}{2}$.

582. **Satz. Wenn $x^2 - ax = b$ ist, ſo ist**

$$x - \frac{a}{2} = \mp\left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}; \quad x = \frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Beweis. Unmittelbar aus 581, wenn man $-a$ ſtatt a ſetzt.

Beiſpiele. $x^2 - 3x = 4$, mithin $x = \frac{3}{2} \mp \left(4 + \frac{9}{4}\right)^{1/2}$, d. h. $x = -1$, oder $x = +4$

$x^2 - 4x = 12$, mithin $x = 2 \mp (12 + 4)^{1/2}$, d. h. $x = -2$, oder $x = +6$.

583. **Satz der Löſung durch Winkelgröſen.**

Wenn $x^2 + ax = +b$, und b eine Plusgröſe, ſo ist

$$\left.\begin{array}{l} x = b^{1/2}\tan \tfrac{1}{2}\varphi \text{ oder} \\ x = -b^{1/2}\cot \tfrac{1}{2}\varphi \end{array}\right\} \text{ wo } \tan\varphi = \frac{2\cdot b^{1/2}}{a}.$$

Beweis. Man hat $x \cong -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$, oder

$$x \cong \frac{a}{2}\left[-1 \mp \left(1 + \frac{4b}{a^2}\right)^{1/2}\right].$$

Da hier b eine Plusgröse ist, so setze man

$(\tan\varphi)^2 = \frac{4b}{a^2}$, oder $\tan\varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$, dann hat man

$$x \cong \frac{a}{2}\left[-1 \mp (1 + (\tan\varphi)^2)^{1/2}\right]$$

und da $1 + (\tan\varphi)^2 = 1 + \frac{(\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^2} = \frac{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^2} = \frac{1}{(\cos\varphi)^2}$,

so ist $x \cong \frac{a}{2}\left[-1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right] \cong \frac{a}{2}\left(\frac{-\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}\right)$

und da $\tan\varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$, so ist $\frac{a}{2} = \frac{b^{1/2}}{\tan\varphi}$ und da $(\cos\varphi)\tan\varphi = \sin\varphi$,

so ist $x \cong b^{1/2}\left(\frac{-\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}\right)$.

Nun ist aber nach 472

$\tan{}^1/_2\varphi = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$ und $\cot{}^1/_2\varphi = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}$, mithin ist

entweder $x = b^{1/2}\tan{}^1/_2\varphi$, oder $x = -b^{1/2}\cot{}^1/_2\varphi$.

Beispiele.

$x^2 + 7x = 12$

$\log\tan\varphi = \log\frac{2\cdot(12)^{1/2}}{7}$	$= 9{,}99552$	$\varphi = 44^0 42' 17''$
$\log\tan{}^1/_2\varphi$	$= 9{,}61405$	$^1/_2\varphi = 22^0 21' 8''$
$\log b^{1/2}$	$= 0{,}53959$	
$\log x$	$= 0{,}15364$	$x = 1{,}4243.$

Satz. Wenn $x^2 + ax = -b$, und b eine Plusgröse, so ist 584.

$$\left.\begin{array}{l} x = -a(\sin{}^1/_2\varphi)^2 \text{ oder} \\ x = -a(\cos{}^1/_2\varphi)^2 \end{array}\right\} \text{ wo } \sin\varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}.$$

Beweis. Man hat in obiger Formel $-b$ statt b zu setzen, dann ist

$$x \cong \frac{a}{2}\left(-1 \mp \left(1 - \frac{4b}{a^2}\right)^{1/2}\right).$$

Da hier b eine Plusgröse ist, so setze man

$(\sin\varphi)^2 = \frac{4b}{a^2}$, oder $\sin\varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$,

dann ist $x \cong \frac{a}{2}(-1 \mp (1-(\sin\varphi)^2)^{1/2} = \frac{a}{2}(-1 \mp \cos\varphi)$ (nach 441).

Nun aber ist nach 455

$(\sin {}^1/_2\varphi)^2 = \frac{1-\cos\varphi}{2}$, $(\cos {}^1/_2\varphi)^2 = \frac{1+\cos\varphi}{2}$, mithin ist

entweder $x = -a(\sin {}^1/_2\varphi)^2$, oder $x = -a(\cos {}^1/_2\varphi)^2$.

Beispiele.

$x^2 + 11x = -25$

$\log\sin\varphi = \log\frac{2\cdot(25)^{1/2}}{11} = 9{,}95861$ $\varphi = 65^0 22' 50''$

$\log(\sin {}^1/_2\varphi)^2 = 9{,}46494$ ${}^1/_2\varphi = 32^0 41' 25''$

$\log(-x) = 0{,}50633$ $x = -3{,}2087$

Bemerkt möge hier werden, dass die beiden trigonometrischen Löſungen nur wenig Vorteile bieten, die gewöhnliche Löſung ist, wenn man Loge oder Logarithmen anwendet, ebenſo bequem.

15. Die Gleichungen dritten Grades oder die kubischen Gleichungen.

Um die Gleichungen dritten Grades löſen zu können, muss man zunächst das zweite Glied der Gleichung nach Satz 574 entfernen. Es kann dies leicht geschehen, auch ohne auf einen frühern Satz zurückzugehen.

Die vollständige Gleichung dritten Grades hat die Form

$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$

Setzen wir hier $x = y - {}^1/_3 a_2$, ſo wird daraus

$$\left.\begin{array}{l} y^3 - a_2y^2 + {}^1/_3 a_2^2\, y - {}^1/_{27} a_2^3 \\ \quad + a_2y^2 - {}^2/_3 a_2^2\, y + \frac{1}{9} a_2^3 \\ \qquad + a_1 y \quad - {}^1/_3 a_1a_2 \\ \qquad\qquad + a_0 \end{array}\right\} = 0$$

$$y^3 \quad + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right)y + a_0 + {}^2/_{27} a_2^3 - {}^1/_3 a_1a_2 = 0,$$

oder kurz $y^3 - \mathfrak{A}\cdot y + \mathfrak{B} = 0.$

Wir bringen die Gleichung auf die Form

$y^3 + 3py = 2q$, wo $p = {}^1/_3\left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right)$ und $q = {}^1/_2({}^1/_3 a_2a_1 - a_0 - {}^2/_{27} a_2^3)$.

585. **Satz. Die Gleichungen dritten Grades bringt man auf die Form $x^3 + 3px = 2q$.**

Wenn q das entgegengeſetzte Zeichen erhält, ſo erhält auch die Wurzel das entgegengeſetzte Zeichen.

Es empfiehlt ſich, für die Auflöſung dieſer Gleichungen demnach drei Fälle zu unterscheiden: 1, wo p eine Pluszahl ist, 2, wo p eine Strichzahl und zugleich $q^2 > p^3$ ist, und 3, wo p eine Strichzahl und zugleich $p^3 > q^2$ ist.

Die Auflöſung ist dann folgende:

Fall 1. Für $x^3 + 3px = 2q$ ist:

$$(\tan\varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}, \qquad \tan\psi = \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}. \qquad x^1 = 2\cdot p^{1/2} : \tan 2\psi,$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + i(3(p + {}^1/_4 x_1^2))^{1/2}, \qquad x_3 = -\frac{x_1}{2} - i(3(p + {}^1/_4 x_1^2))^{1/2}$$

Fall 2. Für $x^3 - 3px = 2q$, wo $q^2 > p^3$ ist:

$$(\sin\varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}, \qquad \tan\psi = \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}, \qquad x_1 = 2\cdot p^{1/2} : \sin 2\psi,$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + (3(p - {}^1/_4 x_1^2))^{1/2}, \qquad x_3 = -\frac{x_1}{2} - (3(p - {}^1/_4 x_1^2))^{1/2}$$

Fall 3. Für $x^3 - 3px = 2q$, wo $p^3 > q^2$ ist:

$$\sin 3\varphi = \left(\frac{q^2}{p^3}\right)^{1/2}, \qquad -x_1 = 2\cdot p^{1/2}\cdot\sin\varphi,$$

$$-x_2 = 2\cdot p^{1/2}\sin(60^0 - \varphi), \qquad +x_3 = 2\cdot p^{1/2}\cdot\sin(60^0 + \varphi).$$

Beweis. A. Wir beweiſen zunächst, dass wenn q entgegengeſetztes Zeichen erhält, dass dann auch jede Wurzel das entgegengeſetzte Zeichen erhält.

Sei alſo $x = a_1$ eine Wurzel der Gleichung $x^3 + 3px = 2q$, wo die Zeichen von p und q beliebig ſeien, ſo ſetze $x = -y$ und führe dies ein, ſo erhalten wir $-y^3 - 3py = 2q$, mithin nach Umkehr der Zeichen $y^3 + 3py = -2q$ und hier ist $y = -x = -a_1$ eine Wurzel der Gleichung.

B. Um die kubische Gleichung $x^3 + 3px = 2q$ zu löſen, wo das Zeichen von p verschieden ſein kann, ſetze* man $x = u + v$ und zugleich $uv + p = 0$ (durch welche beiden Gleichungen die Grösen u und v bestimmt ſind), dann erhält man

$$u^3 + v^3 + 3x(uv + p) = 2q \text{ und da } uv + p = 0, \text{ auch}$$

$$u^3 + v^3 = 2q,$$

alſo $u^3 = 2q - v^3$ $\qquad$ $v^3 = 2q - u^3$.

Ferner $uv = -p$, mithin $\qquad$ $u^3v^3 = -p^3$, alſo

$$u^3(2q - u^3) = -p^3 \qquad v^3(2q - v^3) = -p^3$$

oder $u^6 - 2qu^3 = p^3$ $\qquad$ $v^6 - 2qv^3 = p^3$

und durch Auflöſung dieſer Gleichungen zweiten Grades

*Dieſe Löſung ist von Euler. Setzt man $x = u + v$, ſo ist

$(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3$, mithin

$(u + v)^3 - 3uv(u + v) = u^3 + v^3$. Alſo

$p = -3uv$ und $2q = u^3 + v^3$.

$$u^3 = q + (q^2 + p^3)^{1/2} \qquad v^3 = q - (q^2 + p^3)^{1/2}, \text{ mithin}$$

(○) $$x = u + v = \left(q + (q^2 + p^3)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(q - (q^2 + p^3)^{1/2}\right)^{1/3}$$

$$= q \cdot \left[\left(1 + \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(1 - \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^{1/2}\right)^{1/3}\right].$$

Fall 1. Wenn p ein Pluszeichen hat, d. h. $x^3 + 3px = 2q$, fo fetze

(*) $$(\tan\varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}, \text{ mithin } q = \frac{p^{3/2}}{\tan\varphi} \text{ und } q^{1/3} = \frac{p^{1/2}}{(\tan\varphi)^{1/3}}$$

$$\left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^{1/2} = (1 + (\tan\varphi)^2)^{1/2} = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \text{(nach 467).}$$

Dann ist

$$x = \frac{p^{1/2}}{(\tan\varphi)^{1/3}}\left[\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}\right)^{1/3} - \left(\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}\right)^{1/3}\right]$$

$$x = p^{1/2}\left(\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{1/3} - \left(\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{1/3}\right)$$

$$= p^{1/2}\left(\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3} - \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}\right).$$

(**) Man fetze hier $\quad \tan\psi = \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3},$

fo ist

$$x = p^{1/2}(\cot\psi - \tan\psi) = p^{1/2}\left(\frac{(\cos\psi)^2 - (\sin\psi)^2}{(\sin\psi)\cos\psi}\right)$$

$$= p^{1/2}\frac{2\cos 2\psi}{\sin 2\psi} = 2 \cdot p^{1/2} \cdot \cot 2\psi = \frac{2 \cdot p^{1/2}}{\tan 2\psi}.$$

Um die andern Wurzeln x_2 und x_3 zu finden, beachte man, dass die gegebene Gleichung für alle 3 Wurzeln gelten muss. Es ist alfo $\quad x_1^3 + 3px_1 = 2q \quad$ und $x_2^3 + 3px_2 = 2q$, mithin

$$x_2^3 - x_1^3 + 3p(x_2 - x_1) = 0 \qquad \text{und} \quad \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} + 3p = 0,$$

mithin, wenn man die Divifion oder Teilung ausführt

$$x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 + 3p = 0$$

und demnach, wenn man die Wurzel auszieht

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + i\left(3\left(p + \frac{x_1^2}{4}\right)\right)^{1/2}$$

$$x_3 = -\frac{x_1}{2} - i\left(3\left(p + \frac{x_1^2}{4}\right)\right)^{1/2} \qquad \text{wo } i = (-1)^{1/2}.$$

Fall 2. Wenn p ein Strichzeichen hat, d. h. $x^3 - 3px = 2q$ und $q^2 > p^3$, so ist nach (o), da p ein Strichzeichen hat,

$$x = q^{1/3}\left[\left(1 + \left(1 - \frac{p^3}{q^2}\right)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(1 - \left(1 - \frac{p^3}{q^2}\right)^{1/2}\right)^{1/3}\right].$$

Man setze nun

$$(\sin\varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}, \text{ also } q = \frac{p^{3/2}}{\sin\varphi}, \quad q^{1/3} = \frac{p^{1/2}}{(\sin\varphi)^{1/3}} \text{ und} \qquad (*)$$

$$x = \frac{p^{1/2}}{(\sin\varphi)^{1/3}}\left[(1 + \cos\varphi)^{1/3} + (1 - \cos\varphi)^{1/3}\right]$$

$$= p^{1/2}\left[\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3} + \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}\right].$$

Hier setze man $\tan\psi = \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}$, (**)

so ist

$$x = p^{1/2}(\tan\psi + \cot\psi) = p^{1/2}\frac{(\sin\psi)^2 + (\cos\psi)^2}{(\sin\psi)\cdot\cos\psi}$$

$$= \frac{2\cdot p^{1/2}}{\sin 2\psi}.$$

Die andern Wurzeln finden sich ebenso wie im ersten Falle, sofern man dem p ein Strichzeichen giebt, es ist also

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + \left(3\left(p - \frac{x_1^2}{4}\right)\right)^{1/2}, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} - \left(3\left(p - \frac{x_1^2}{4}\right)\right)^{1/2}.$$

Fall 3. Wenn p ein Strichzeichen hat, d. h. $x^3 - 3px = 2q$ und $p^3 > q^2$, so benutze man die Formel

$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4(\sin\varphi)^3$ (nach 464) und setze $\sin\varphi = -\frac{x}{r}$, so ist

$$\sin 3\varphi = -3\cdot\frac{x}{r} + 4\frac{x^3}{r^3}, \text{ mithin}$$

$$x^3 - \frac{3r^2}{4}x = +\frac{r^3}{4}\cdot\sin 3\varphi, \text{ also}$$

$$p = \frac{r^2}{4} \text{ und } \frac{r}{2} = p^{1/2}. \text{ Ferner } q = +\frac{r^3}{8}\cdot\sin 3\varphi = +p^{3/2}\sin 3\varphi.$$

Also $\sin 3\varphi = \left(\frac{q^2}{p^3}\right)^{1/2}$.

Dann ist $x = -r\cdot\sin\varphi = -2\cdot p^{1/2}\cdot\sin\varphi$.

Es ist aber ferner

$$\sin 3\varphi = \sin(180^0 - 3\varphi) = -\sin(180^0 + 3\varphi).$$

Daraus erhalten wir die drei Werte von x.

$$x_1 = -2\cdot p^{1/2}\cdot\sin\varphi, \qquad x_2 = -2\cdot p^{1/2}\sin(60^0 - \varphi),$$

$$x_3 = 2\cdot p^{1/2}\sin(60^0 + \varphi).$$

Beispiele. Fall 1. $\mathbf{x^3 + 39x = 152}$

$\log(\tan\varphi)^2 = \log\frac{13^3}{76^2}$	$= 9{,}58020$	$\varphi = 31^0 39' 50''$
$\log\tan {}^1/_2\varphi$	$= 9{,}45267$	${}^1/_2\varphi = 15^0 49' 55''$
$\log\tan\psi$	$= 9{,}81756$	$\psi = 33^0 18' 17''$
$\log x_1 = {}^1/_2\log 13 + \log 2 - \log\tan 2\psi$	$= 0{,}49403$	$x_1 = 3{,}1191$
$\log {}^1/_4 x_1^2$	$= 0{,}38600$	${}^1/_4 x_1^2 = 2{,}4322$
$\log(3(p + {}^1/_4 x_1^2))$	$= 1{,}66555$	$3(p + {}^1/_4 x_1^2) = 46{,}2966$
$\log[3(p + {}^1/_4 x_1^2)]^{1/2}$	$= 0{,}83277$	$i[3(p + {}^1/_4 x_1^2)]^{1/2} = i\,6{,}8042$

$x_2 = -1{,}5595 + i\cdot 6{,}8042$ $\qquad x_3 = -1{,}5595 - i\cdot 6{,}8042.$

Fall 2. $\mathbf{x^3 - 24x = 60}$ $\qquad 900 > 512$

$\log(\sin\varphi)^2 = \log\frac{8^3}{30^2}$	$= 9{,}75503$	$\varphi = 48^0 57' 32''$
$\log\tan\psi = {}^1/_3\left(\log\tan\frac{\varphi}{2}\right)$	$= 9{,}88609$	$\psi = 37^0 34' 7''$
$\log x_1 = \log\left(2\cdot p^{1/2}\right) - \log\sin 2\psi$	$= 0{,}76735$	$x_1 = 5{,}85263$
$\log {}^1/_4 x_1^2$	$= 0{,}93266$	${}^1/_4 x_1^2 = 8{,}5636$
$\log[3(p - {}^1/_4 x_1^2)]^{1/2}$	$= 0{,}11405$	$[3(p - {}^1/_4 x^2]^{1/2} = -1{,}3003$

$x_2 = -4{,}25292$ $\qquad x_3 = -1{,}65232.$

Fall 3. $\mathbf{x^3 - 42x = 80}$ $\qquad 2644 > 1600$

$\log\sin 3\varphi = \log\left(\frac{q^2}{p^3}\right)^{1/2}$	$= 9{,}76573$	$\varphi = 11^0 53' 21''$
$\log(-x_1) = \log\left(2\cdot p^{1/2}\right) + \log\sin\varphi$	$= 0{,}18800;$	$x_1 = -1{,}5417$
$\log(-x_2) = \log\left(2\cdot p^{1/2}\right) + \log\sin(60^0 - \varphi)$	$= 0{,}74592;$	$x_2 = -5{,}5708$
$\log x_3 = \log\left(2\cdot p^{1/2}\right) + \log\sin(60^0 + \varphi)$	$= 0{,}85202;$	$x_3 = 7{,}1125.$

16. Die Gleichungen vierten Grades oder die biquadratischen Gleichungen.

Um die Gleichungen vierten Grades löfen zu können, schafft man das 2te Glied fort. Sei alfo die allgemeine Gleichung $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, fo fetze man $x = y - {}^1/_4 a_1$ und entwickle die Formel, fo fällt das zweite Glied fort und die Formel wird $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

586. **Satz. Die Gleichung vierten Grades bringt man auf die Form $\mathbf{x^4 + ax^2 + bx + c = 0}$, dann ist**

$$x = \pm \tfrac{1}{2} \cdot e^{1/2} \pm \left(\tfrac{1}{4} e \pm f \cdot e^{1/2} - d\right)^{1/2},$$

wo $e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2$ **und** $d = \tfrac{1}{2}(a + e)$, $f = -\dfrac{b}{2e}$ **ist.**

Beweis. Die Gleichung $(x^2 + d)^2 - e(x + f)^2 = 0$ giebt entwickelt und nach Höhen von x geordnet

$$x^4 + (2d - e)x^2 - 2efx + d^2 - ef^2 = 0.$$

Wenn diese der obigen gleich sein soll, so müssen die Vorzahlen (die Koeffizienten) gleich sein, d. h. es muss

$$a = 2d - e, \qquad b = -2ef, \qquad c = d^2 - ef^2 \text{ sein.}$$

Letztere mit 4e vervielfacht giebt

$$4ec = 4ed^2 - 4e^2f^2 = e(e + a)^2 - b^2, \qquad \text{da } 2d = a + e \text{ ist,}$$

mithin nach den Höhen von e geordnet

$$e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2, \qquad d = \tfrac{1}{2}(a + e), \qquad f = -\frac{b}{2e}.$$

Die Gleichung $(x^2 + d)^2 - e(x + f)^2 = 0$ ergiebt aber ferner

$$x^2 + d = \pm (x + f) \cdot e^{1/2}, \qquad \text{oder } x^2 \mp x \cdot e^{1/2} = -d \pm f \cdot e^{1/2},$$

mithin $$x = \pm \tfrac{1}{2} \cdot e^{1/2} \pm \left(\tfrac{1}{4} e \pm f \cdot e^{1/2} - d\right)^{1/2}.$$

Ein Zahlenbeispiel möge die Art der Lösung erläutern. Es sei gegeben

$$x^4 + 312x^3 + 23337x^2 - 14874x + 2360 = 0.$$

Man setze $x = y - \frac{312}{4} = y - 78$, so ergiebt sich

$$y^4 - 13167y^2 + 140970y + 32'099'672 = 0,$$

mithin

$$e^3 - 26334e^2 + 44'971'201e - 19'872'540'900 = 0.$$

Hier setze man $e = z + \frac{26334}{3} = z + 8778$, so ergiebt sich

$$z^3 - 186'188'651z - 977'858'792'426 = 0.$$

Vergleichen wir dies mit $z^3 - 3pz = 2q$, so ist $p^3 > q^2$ und liegt also der Fall 3 der kubischen Gleichung vor. Es ist

$$\log q^2 = 23{,}3784922$$
$$\log p^3 = 23{,}3784960$$
$$\log(\sin 3\varphi)^2 = \overline{9}{,}9999962$$
$$\log \sin 3\varphi = 9{,}9999981$$
$$3\varphi = 89^0 49' 50''$$
$$\varphi = 29^0 56' 36^2/_3{}'' \qquad 60^0 - \varphi = 30^0 3' 23^1/_3{}'' \qquad 60^0 + \varphi = 89^0 56' 36^2/_3{}'',$$

mithin $z_1 = -2(p)^{1/2} \cdot \sin\varphi$ $z_2 = -2(p)^{1/2} \sin(60^0 - \varphi)$ $z_3 = 2(p)^{1/2} \sin(60^0 + \varphi)$

$$z_1 = -7864{,}545 \qquad z_2 = -7891{,}447 \qquad + z_3 = 15756,$$

also $e_1 = z_1 + 8778 = 913{,}455$ $e_2 = z_2 + 8778 = 886{,}553$

$e_3 = z_3 + 8778 = 24534$ und $e_1 + e_2 + e_3 = 26334.$

Daraus ergiebt sich $x_1 = 0{,}31666$, $x_2 = 0{,}31666$, $x_3 = -126{,}31666$,

$x_4 = -186{,}31666$ und $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -312$.

d. h. die zweite Vorzahl der Gleichung negativ genommen.

17. Die Gleichungen höhern Grades und ihre Löfung durch Näherung.

587. **Satz. Zu jeder Gleichung**

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

lässt fich eine andere finden, deren n Wurzeln die Quadern von den n Wurzeln der gegebenen Gleichung find.

Beweis. Es fei y die Unbekannte der zu findenden Gleichung, fo hat man $y = x^2$, alfo $x = y^{1/2}$. Führt man diefen Wert von x in die gegebene Gleichung ein, fo erhält man

$$y^{\frac{n}{2}} + a_{n-1}y^{\frac{n-1}{2}} + a_{n-2}y^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + a_0 = 0,$$

oder $y^{\frac{n}{2}} + a_{n-2}y^{\frac{n-2}{2}} + \cdots = -a_{n-1}y^{\frac{n-1}{2}} - a_{n-3}y^{\frac{n-3}{2}} - \cdots.$

Erhebt man beide Seiten diefer letztern Gleichung aufs Quader, um die gebrochnen Stufen (Exponenten) wegzuschaffen, fo erhält man

$$\begin{array}{r|l|l|l}
y^n + 2a_{n-2}y^{n-1} + a^2_{n-2} & y^{n-2} + 2a_{n-2}a_{n-4} & y^{n-3} + a^2_{n-4} & y^{n-4} + \cdots \\
+2a_{n-4} & \quad +2a_{n-6} & \quad +2a_{n-2}a_{n-6} & \\
 & & \quad +2a_{n-8} & \\ \hline
= a^2_{n-1}y^{n-1} + 2a_{n-1}a_{n-3} & y^{n-2} + a^2_{n-3} & y^{n-3} + 2a_{n-3}a_{n-5} & y^{n-4} + \cdots \\
 & \quad +2a_{n-1}a_{n-5} & \quad +2a_{n-1}a_{n-7} &
\end{array}$$

Alfo ist die zu findende Gleichung folgende:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
0 = y^n - a^2_{n-1} & y^{n-1} + a^2_{n-2} & y^{n-2} - a^2_{n-3} & y^{n-3} + a^2_{n-4} & y^{n-4} + \cdots \\
+2a_{n-2} & \quad -2a_{n-1}a_{n-3} & \quad +2a_{n-2}a_{n-4} & \quad -2a_{n-3}a_{n-5} & \\
 & \quad +2a_{n-4} & \quad -2a_{n-1}a_{n-5} & \quad +2a_{n-2}a_{n-6} & \\
 & & \quad +2a_{n-6} & \quad -2a_{n-1}a_{n-7} & \\
 & & & \quad +2a_{n-8} &
\end{array}$$

588. **Aufgabe. Den Näherungswert einer Wurzel einer höhern Gleichung zu verbessern (Weg von Newton arithmetica universalis 1707).**

Auflöfung. Es fei

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

die gegebene Gleichung und c der Näherungswert einer Wurzel. Man fetze $x = c + z$, fo wird

$$\begin{aligned}
0 &= (c + z)^n + a_{n-1}(c + z)^{n-1} + a_{n-2}(c + z)^{n-2} + \cdots \\
&\qquad + a_1(c + z) + a_0 \\
&= c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \cdots + a_0 \\
&\qquad + z[nc^{n-1} + (n-1)a_{n-1}c^{n-2} + (n-2)a_{n-2}c^{n-3} + \cdots + a_1] + \cdots \\
&= f_0c + zf_0'c \qquad \text{(nach 393)}
\end{aligned}$$

wo die folgenden Glieder höhere Höhen von z enthalten. Wenn nun z fo klein ist, dass die Glieder mit diefen höhern Höhen gegen das Glied mit der ersten Höhe zu vernachlässigen find, fo kann man als nächste Annäherung

$$0 = c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \cdots + a_0 + z[nc^{n-1} + (n-1)a_{n-1}c^{n-2} + (n-2)a_{n-2}c^{n-3} + \cdots + a_1]$$

fetzen und alfo

$$z = -\frac{c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \cdots + a_0}{nc^{n-1} + (n-1)a_{n-1}c^{n-2} + (n-2)a_{n-2}c^{n-3} + \cdots + a_1}.$$

Dann ist die nächste Annäherung $c + z$; und man hat dann die Probe zu machen, ob $c + z$, statt x gefetzt, den Ausdruck $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ der Null näher führt, als der Wert c. Ist dies der Fall, fo kann man denfelben Weg aufs Neue anwenden, indem man jetzt den gefundenen Wert $c + z$ statt c fetzt und ihn aufs Neue verbessert. Durch Wiederholung diefes Verfahrens kann man den Wert fo genau finden, als man will.

Beispiel. Es fei gegeben

$$f_0x = x^5 - 6x - 10 = 0$$
$$f_0'x = 5x^4 - 6 \quad \text{und } c = 1,8.$$

Dann ist $f_0(c_1 + z_1) = f_0c_1 + z_1f_0'c_1 = 0$,

alfo $z_1 = -\frac{f_0c_1}{f_0'c_1} = -\frac{-1,904}{+46,488} = +0,04$, alfo $c_2 = 1,8 + 0,04 = 1,84$.

Nun ist $f_0c_2 + z_2f_0'c_2$, alfo $z_2 = -\frac{f_0c_2}{f_0'c_2} = -\frac{0,0506}{51,3114} = -0,00099$,

alfo $c_3 = 1,84 - 0,00099 = 1,83901$.

Nun ist $z_3 = -\frac{f_0c_3}{f_0'c_3} = -\frac{-0,00013}{+51,18820} = +0,0000025$,

alfo $c_4 = 1,8390125$.

Wenn es zwei Wurzeln der Gleichung giebt, für welche der Näherungswert c gleich oder fast gleich nahe liegt, fo lassen fich die höhern Höhen von z nicht vernachlässigen. In diefem Falle muss man die Gleichung in z weiter entwickeln und zunächst einen Näherungswert von z zu bestimmen fuchen, welcher diefer Gleichung genügt.

Satz. Wenn man eine höhere Gleichung von x für zwei Werte x und c aufstellt und die eine von der andern abzieht, fo ist der Unterschied der Gleichungen ohne Rest teilbar durch x — c und das Ergebniss der Teilung eine Gleichung nächst niederen Grades. 589.

Beweis. Es fei $f_0x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$,

fo ist $f_0x - f_0c = a_1(x - c) + a_2(x^2 - c^2) + \cdots$,

mithin ist

$$\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = a_1 + a_2\frac{x^2 - c^2}{x - c} + a_3\frac{x^3 - c^3}{x - c} + \cdots,$$

d. h. wenn wir dieſe Teilung ausführen

$$\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = a_1 + a_2(x + c) + a_3(x^2 + xc + c^2) + \cdot\cdot$$
$$+ a_n(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdot\cdot + xc^{n-2} + c^{n-1})$$
$$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdot\cdot\cdot + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}.$$

590. **Satz. Wenn man eine höhere Gleichung f_0x von x durch den Unterschied zweier Werte $x - c$ teilt, ſo ist das Ergebniss eine Gleichung von x nächst niedern Grades und ein Rest f_0c, welcher den beſondern Wert von f_0x für x gleich c darstellt und ist, wenn $a_n, a_{n-1} \cdot\cdot a_0$ die Vorzahlen für die gegebene Gleichung**

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot + a_0 \text{ und } b_{n-1}, b_{n-2} \cdot\cdot b_0$$

die entsprechenden Vorzahlen der Gleichung nächst niederen Grades $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + b_0$ bezeichnen

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}c,\ b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2}c, \cdot\cdot\cdot$$
$$b_0 = a_1 + b_1c,\ f_0c = a_0 + b_0c,$$

oder es ist jede Vorzahl b_a der zweiten Reihe gleich der Summe aus der vorhergehenden Vorzahl a_{a+1} der ersten und dem Zeuge von c mit der vorhergehenden Vorzahl b_{a+1} der zweiten Gleichung und die letzte Summe ist der Wert f_0c.

Beweis. Es ſei die gegebene Gleichung

$f_0x = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_0,$ ſo ist nach 589

$$\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + b_1x + b_0,$$

mithin

$$\frac{f_0x}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + b_1x + b_0 + \frac{f_0c}{x - c}$$

und vervielfachte man dieſe Gleichung mit $x - c$, ſo ergiebt ſich

$$f_0x = b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + b_{n-3}x^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + b_0x$$
$$- b_{n-1}cx^{n-1} - b_{n-2}cx^{n-2} - \cdot\cdot\cdot - b_1cx - b_0c + f_0c.$$

Vergleicht man dieſe mit der gegebenen Gleichung, ſo folgt

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}c,\ b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2}c, \cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$b_0 = a_1 + b_1c \text{ und } f_0c = a_0 + b_0c.$$

Es bietet dies einen Weg für eine höchst bequeme Berechnung eines Näherungswertes der Gleichung, wie das folgende Beispiel zeigt. Es ſei gegeben

$$x^5 - 7x^4 + 63x^2 - 27x - 160 = 0 \text{ und ſei der Näherungswert } c = 3.$$

ſei st $a_5 = 1,\ a_4 = -7,\ a_3 = 0,\ a_2 = 63,\ a_1 = -27,\ a_0 = -160$

und es ist $b_4 = a_5 = 1,\ b_3 = a_4 + b_4 \cdot 3 = -4,\ b_2 = a_3 + b_3 \cdot 3 = -12.$

$b_1 = +27,\ b_0 = +54$

und $f_03 = a_0 + b_0 \cdot 3 = +2.$

Es ergiebt fich hieraus die folgende bequeme Rechenregel:

Man schreibt die Vorzahlen der gegebenen Gleichung a_n, $a_{n-1}, \cdots a_0$ mit ihren Vorzeichen in eine Reihe, vervielfacht die erste Vorzahl a_n mit dem Näherungswerte c der Wurzel, fetzt das Zeug oder Produkt unter die nächste Vorzahl a_{n-1} und fügt beide zu; die Summe vervielfacht man wieder mit c, schreibt das Zeug unter die nun nächste Vorzahl a_{n-2} und nimmt die Summe u. f. w. Die gewonnenen Summen find die Vorzahlen b_{n-2}, b_{n-3} u. f. w., die letzte Summe ist der Wert der Gleichung $f_0 c$.

Beispiel. $f_0 x = x^5 - 13x^4 - 52x^2 + 15x + 5$.

Näherungswert $x = 4$ Die Rechnung ergiebt

+1	0	−13	0	−52	+15	+5
	+4	+16	+12	+48	−16	−4
+1	+4	+3	+12	−4	−1	+1

Man hat demnach

$$\frac{f_0 x}{x-4} = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 4x - 1 + \frac{1}{x-4} \text{ und } f_0 4 = +1.$$

Aufgabe. Aus einer gegebenen Gleichung eine zweite Gleichung abzuleiten, deren Wurzeln um c kleiner find als die Wurzeln der gegebenen Gleichung. 591.

Auflöfung. Es fei die gegebene Gleichung

$$f_0 x = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Die gefuchte Gleichung fei

$$b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \cdots + b_1 y + b_0 = 0.$$

Es foll die Wurzel der letzteren $y = x - c$ fein, daraus folgt

$$b_n (x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + b_{n-2}(x-c)^{n-2} + \cdots$$
$$+ b_1(x-c) + b_0 = f_0 x.$$

Hieraus folgt für $x = c$ die Formel $b_0 = f_0 c$.

Zieht man diefe von der vorigen ab und teilt man nach 590 durch $x - c$, fo erhält man eine ganze Gleichung, welche wir φx nennen wollen

$$b_n(x-c)^{n-1} + b_{n-1}(x-c)^{n-2} + b_{n-2}(x-c)^{n-3} + \cdots$$
$$+ b_2(x-c) + b_1 = \varphi x.$$

Diefe Gleichung giebt für $x = c$ wieder $b_1 = \varphi c$.

Man kann nun diefelbe Handlung mehrfach wiederholen und erhält hiebei die einzelnen Vorzahlen als Funktionen von c. Die gefuchten Vorzahlen $b_0, b_1, b_2 \cdots$ find alfo die Reste, welche entstehen, wenn $f_0 x$ durch $x - c$, das Ergebniss der Teilung wieder durch $x - c$, das demnächst folgende Ergebniss nochmals durch $x - c$ geteilt wird und fo fort, bis alle Vorzahlen gewonnen find.

Beispiel. Die gegebene Gleichung fei

$$x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 9x + 108 = 0.$$

Die Wurzeln ſollen um 3 kleiner ſein, d. h. c = 3. Man hat.

+1	−9	+5	+9	+108	c = 3
	+3	−18	−39	−90	
+1	−6	−13	−30	+18 = b_0	
	+3	−9	−66		
+1	−3	−22	−96 = b_1		
	+3	0			
+1	+0	−22 = b_2			
	+3				
+1	+3 = b_3,				

mithin iſt die geſuchte Gleichung

$$y^4 + 3y^3 - 22y^2 - 96y + 18 = 0.$$

Nach demſelben Verfahren kann man die Sache auch ſo einrichten, dass $b_{n-1} = 0$ wird, ſetzt man nämlich $y = x - c$ und entwickelt $x = y + c$, ſo wird $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots = a_n y^n + (a_{n-1} + n a_n c) y^{n-1} + \cdots$, mithin $b_n = a_n$ und $b_{n-1} = a_{n-1} + n a_n c \cdots$, ſoll alſo $b_{n-1} = 0$ ſein, ſo muss

$$c = -\frac{a_{n-1}}{n a_n} \text{ geſetzt werden.}$$

Wenn c eine mehrziffrige Zahl iſt, ſo kann man die Verminderung der Wurzel jedesmal mit nur einer Ziffer ausführen.

592. **Aufgabe. Die weiteren Nährungswerte einer Wurzel zu finden. Weg nach Horner Abhandlung in Philosophical transactions vom Jahre 1819.**

Auflöſung. Die gegebene Gleichung ſei

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

und ſei nach dem Wege von Newton der erſte Näherungswert

$$x_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$$

gefunden, während der genaue Wert $x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots$ ſei, ſo iſt $y = x - x_1 = \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots$ und iſt $y < {}^1/_{10}$. Nach

(*) 591 iſt nun $y^n + b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \cdots + b_1 y + b_0 = 0$

Hier kann man für den nächſten Näherungswert von x die höhern Höhen von y (da $y < {}^1/_{10}$ iſt) vernachläſsigen und hat alſo als nächſten Näherungswert für $y = \frac{\alpha_2}{10^2}$ die Gleichung

$$b_1 y + b_0 = 0, \qquad \text{oder } \frac{\alpha_2}{10^2} = y = -\frac{b_0}{b_1}.$$

Der nächſte Näherungswert von x iſt dann

$$x_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}.$$

Um zu prüfen, ob der wahre Wert über oder unter α_2 ist, führt man in die Gleichung (*) den Wert

$$x_2' = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2 + 1}{10^2}$$

ein, liegt dann der Wert der Wurzel in der 2ten Bruchstelle zwischen α_2 und $\alpha_2 + 1$, ſo muss $f_0 x$ bei Einführung von x_2 und x_2', verschiedene Werte erhalten.

In der Gleichung (*) vermindert man nun y um $\frac{\alpha_2}{10^2}$ und erhält dann $z = y - \frac{\alpha_2}{10^2} = \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \cdots$, wo $z < {}^1/_{100}$. Nach 591 ist dann

$$z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0 \qquad (^{**})$$

Hier kann man wieder für den nächsten Näherungswert $z = \frac{\alpha_3}{10^3}$ die höhern Höhen von z vernachlässigen und behält alſo

$$c_1 z + c_0 = 0, \qquad \text{oder } z = \frac{\alpha_3}{10^3} = -\frac{c_0}{c_1}$$

und dadurch den nächsten Näherungswert von x

$$x_3 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3}.$$

Man prüft nun wieder, ob der wahre Wert von x in der dritten Bruchstelle zwischen α_3 und $\alpha_3 + 1$ liegt und geht dann ganz in gleicher Weiſe zu den folgenden Stellen über.

Wenn es ſich um die Bestimmungen von Strichwurzeln (negativen Wurzeln) handelt, ſo giebt man den Vorzahlen $a_1, a_3, a_5, \cdots$ kurz den Vorzahlen a_{2n+1} entgegengeſetztes Zeichen und verwandelt ſie dadurch in Pluswurzeln (poſitive Wurzeln).

Wenn zwei Wurzeln ſehr nahe bei einander liegen, z. B.

$$x_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots \quad x_2 = \alpha_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \cdots,$$

ſo genügt der Gleichung (*) ſowohl

$$y = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots, \text{ als auch } y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \cdots.$$

Die Gleichung * erleidet mithin ſowohl zwischen

$y = \frac{\alpha_1}{10}$ und $y = \frac{\alpha_1 + 1}{10}$ als auch zwischen $y = \frac{\beta_1}{10}$ und $y = \frac{\beta_1 + 1}{10}$

einen Zeichenwechsel, auserdem ändert das letzte Glied der Gleichung (**) nämlich c_0 ſein Zeichen, wenn β_1 für α_1 eingeſetzt wird.

Beispiel. $x^3 + 8x^2 + 6x - 75{,}9 = 0$ $\qquad x_1 = 2{,}4$

$c_0 = \mathbf{2}$;

1	8	6	− 75,9
	2	20	52
1	10	26	**− 23,9**
	2	24	
1	12	**50**	
	2		
1	**14**		

$c_1 = \mathbf{0{,}4}$

1	14	50	− 23,9
	0,4	5,76	22,304
1	14,4	55,76	− **1,596** $= b_0$
	0,4	5,92	
1	14,8	**61,68** $= b_1$	
	0,4		
1	15,2 $= b_2$		

$y^3 + 15{,}2\,y^2 + 61{,}68y - 1{,}596 = 0$ Prüfung $\dfrac{-b_3}{b_2} = \dfrac{1{,}596}{61{,}68} = 0{,}02$

$c_2 = 0{,}02$ $\qquad x_2 = 2{,}42$

1	15,2	61,68	− 1,596
	0,02	0,3044	1,239688
1.	15,22	61,9844	− **0,356312** $= c_0$
	0,02	0,3048	
1.	15,24	**62,2892** $= c_1$	
	0,02		
1.	**15,26** $= c_2$		

$z^3 + 15{,}26z^2 + 62{,}2892z - 0{,}356312 = 0$ Prüfung $\dfrac{-c_3}{c_2} = \dfrac{0{,}356312}{62{,}2892} = 0{,}005$

$c_3 = 0{,}005$ $\qquad x_3 = 2{,}425$

1.	15,26	62,2892	− 0,356312
	0,005	0,076325	0,311827625
1.	15,265	62,365525	− **0,044484375** $= d_0$
	0,005	0,076350	
1.	15,270	**62,441875** $= d_1$	
	0,005		
1.	**15,275** $= d_2$		

$u^3 + 15{,}275\,u^2 + 62{,}441875\,u - 0{,}044484375 = 0$

$-\dfrac{d_3}{d_2} = \dfrac{0{,}044484375}{62{,}441875} = 0{,}0007, \qquad x_4 = 2{,}4257.$

593. **Aufgabe. Die Pluswerte der Wurzeln einer Gleichung zu finden. (Weg von Graeffe. Auflöfung der höhern numerischen Gleichungen Zürich 1837).**

Auflöfung. Aus der gegebenen Gleichung leite man (nach 587) eine neue Gleichung ab, deren Wurzeln die Quader von den Wurzeln der gegebnen Gleichung find, und auf diefe Gleichung wende man wiederholt dasfelbe Verfahren an. Hat man dann z. B. das Verfahren 8 Mal angewandt, fo gelangt man zu einer Gleichung, deren Wurzeln die 256ten Höhen der Wurzeln der gegebnen Gleichung find. Angenommen nun, die gegebene Gleichung habe a Wurzeln, deren Pluswert α, b Wurzeln, deren Pluswert β fei, u. f. w., fo dass alfo $a + b + \cdots = n$, d. h. gleich dem Grade der Gleichung ist, und zwar fei $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma, \cdots$. Hat man dann eine Gleichung abgeleitet, deren Wurzeln die mten Höhen von den Wurzeln der gegebnen Gleichung

find, fo hat diefe abgeleitete Gleichung a Wurzeln, deren Pluswert α^m, b Wurzeln, deren Pluswert β^m ist u. f. w. Nun wird man m stets fo gros wählen können, dass die Brüche $\frac{\beta^m}{\alpha^m}, \frac{\gamma^m}{\beta^m}, \cdots$ kleiner werden als eine verlangte Grenze, z. B. kleiner als 10^{-6}. Denn foll z. B. $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m < 10^{-6}$, d. h. $\frac{\alpha^m}{\beta^m} > 10^6$, fo hat man $m(\log\alpha - \log\beta) > 6$, d. h. $m > \frac{6}{\log\alpha - \log\beta}$. Haben wir alfo m hinlänglich gros gewählt, fo kann in der beabfichtigten Annäherung β^m gegen α^m vernachlässigt werden, ebenfo γ^m gegen β^m u. f. w. Nun ist (nach 572), wenn $0 = y^n - c_{n-1}y^{n-1} + c_{n-2}y^{n-2} - \cdots$ die abgeleitete Gleichung ist, c_{n-r} die Summe der Zeuge oder Produkte von je r der Wurzeln, namentlich enthält c_{n-a} das Zeug der a Wurzeln, deren Pluswerte $= \alpha^m$ find. Dies Zeug ist α^{ma}, denn wenn $u + iv$ eine Wurzel der gegebnen Gleichung ist, deren Pluswert α ist, fo ist auch (nach 573) $u - iv$ eine Wurzel der Gleichung; es ist aber dann $(u + iv)(u - iv) = \alpha^2$ (nach 432). Hieraus folgt alfo, dass das Zeug der a Wurzeln, deren Pluswerte $= \alpha$ find, gleich $\mp \alpha^a$ ist. Aber das Zeug der m ten Höhen diefer Wurzeln ist (nach 323, 499) gleich der m ten Höhe des Zeuges diefer Wurzeln, d. h. gleich $(\mp \alpha^a)^m$; da aber m eine gerade Zahl ist, fo ist $(-\alpha^a)^m = (\alpha^a)^m = \alpha^{am}$. Die übrigen Zeuge, aus denen c_{n-a} besteht, haben mindestens statt eines der Fache oder Faktoren, deren Pluswerte α^m find, ein Fach, dessen Pluswert β^m oder noch kleiner als β^m ist, diefe Glieder können alfo bei der erlangten Annäherung gegen das erste vernachlässigt werden und es wird alfo c_{n-a} fehr nahe $= \alpha^{am}$ fein. Aus gleichen Gründen wird $c_{n-(a+b)}$ fehr nahe $\alpha^{am}\beta^{bm}$, d. h. $= c_{n-a}\beta^{bm}$, $c_{n-(a+b+c)} = \alpha^{am}\beta^{bm}\gamma^{cm}$, d. h. $= c_{n-(a+b)}\gamma^{cm}$ fein u. f. w. Dann wird alfo in der Annäherung $\alpha = c_{n-a}{}^{\frac{1}{am}}$, $\beta = \left(\frac{c_{n-(a+b)}}{c_{n-a}}\right)^{\frac{1}{bm}}$, $\gamma = \left(\frac{c_{n-(a+b+c)}}{c_{n-(a+b)}}\right)^{\frac{1}{cm}}$, und kann man auf diefe Weife die Pluswerte der Wurzeln einer Gleichung finden.

Aufgabe. Die Zahlwurzeln oder reellen Wurzeln einer Gleichung zu finden. 594.

Auflöfung. Man fucht zunächst die Pluswerte aller Wurzeln der Gleichung. Jede Zahlwurzel ist einem folchen Pluswerte gleich oder entgegengefetzt. Ist der Grad der Gleichung ein ungerader, fo

muss, da die Anzahl der Winkelwurzeln oder imaginären Wurzeln nach 573 stets eine gerade ist, eine Wurzel eine Zahl oder eine reelle Wurzel ſein. Man muss nun durch unmittelbares Einſetzen der Pluswerte ermitteln, ob einer dieſer Werte oder ob einer der entgegengeſetzten Werte der Gleichung genügt. Hat man eine Zahlwurzel w gefunden, ſo kann man die Gleichung durch x — w nach 569 teilen, ſie wird dann um einen Grad niedriger. Jede ſo gewonnene Gleichung kann man dann ebenſo behandeln, bis keine Zahlwurzel mehr bleibt. Die ſo gefundenen Näherungswerte der Zahlwurzeln kann man dann nach 588 verbeſſern, und erhält ſo die ſämmtlichen Zahlwurzeln der Gleichung.

595. **Aufgabe. Zwei Gleichungen höherer Grade durch zwei andere zu erſetzen, von denen die erstere eine der Unbekannten nicht mehr enthält.**

Auflöſung (durch Teilung). Es ſeien

(a) $A = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = 0$

(b) $A_1 = x^m + a_1x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots = 0$

die beiden Gleichungen, wo $a, b, \cdots a_1, b_1, \cdots$ Ausdrücke ſind, welche die übrigen Unbekannten, aber nicht mehr x enthalten, und zwar ſei $n \geqq m$. Man wende dasſelbe Verfahren wie bei der Aufſuchung des grösten gemeinschaftlichen Mases zweier Zahlen an, nämlich man teile mit A_1 in A ſo lange, bis der Rest von niederm Grade wird als der Teiler, teile ebenſo mit dieſem Reste in den vorigen Teiler und ſo überhaupt mit dem jedesmaligen Reste in den vorigen Teiler, bis endlich der letzte Rest nicht mehr x enthält; der letzte Rest ſei A_{r+1}, der letzte Teiler A_r, ſo ſind

(c) $A_r = 0$

(d) $A_{r+1} = 0$

zwei Gleichungen, welche die ursprünglichen beiden erſetzen und von denen die letztere nicht mehr x enthält.

Beweis 1. Wenn die beiden Gleichungen (a) und (b) zugleich stattfinden ſollen, ſo heist das, es muss mindestens einen Wert von x geben, der beiden zugleich genügt. Es ſei $x = \alpha$ ein ſolcher Wert, der den Gleichungen $A = 0$ und $A_1 = 0$ genügt, ſo müssen (nach 569) A und A_1 durch $x - \alpha$ teilbar ſein. Nun hatte man mit A_1 in A geteilt. Der Bruch oder Quotient ſei Q und der Rest A_2, ſo ist $A - A_1Q = A_2$. Da nun A und A_1 durch $x - \alpha$ teilbar ſind, ſo ist auch $A - A_1Q$ durch $x - \alpha$ teilbar, alſo auch A_2. Folglich ſind A_1 und A_2 durch $x - \alpha$ teilbar. Aus A_1 und A_2 gehen aber A_2 und A_3

auf gleiche Weiſe hervor wie jene aus A und A_1, folglich ſind auch A_2 und A_3 durch $x - \alpha$ teilbar u. ſ. w., alſo endlich auch A_r und A_{r+1}. Aber A_{r+1} enthält kein x mehr; ſoll es alſo $x - \alpha$ zum Fache oder Faktor haben, ſo muss der andere Fach Null, alſo auch

(d) $A_{r+1} = 0$

ſein; und da ferner A_r der Fach $x - \alpha$ enthält, ſo ist $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung

(c) $A_r = 0$,

d. h. alle Werte für x, welche den Gleichungen (a) und (b) genügen, genügen auch der Gleichung (c). Alſo wenn die Gleichungen (a) und (b) erfüllt werden, ſo müssen auch die Gleichungen (c) und (d) erfüllt werden.

2. Aber auch umgekehrt folgen aus den Gleichungen (c) und (d) wieder die Gleichungen (a) und (b). Denn wenn $A_{r+1} = 0$ ist, und $x = \alpha$ ein Wert ist, der die Gleichung $A_r = 0$ erfüllt, ſo ist A_r durch $x - \alpha$ teilbar. Nun war aber nach der Auflöſung

$$A_{r+1} = A_{r-1} - A_r Q_{r-1},$$

alſo

$$A_{r-1} = A_{r+1} + A_r Q_{r-1},$$

oder da A_r durch $x - \alpha$ teilbar ist, und A_{r+1} Null ist, ſo ist auch A_{r-1} durch $x - \alpha$ teilbar; alſo A_r und A_{r-1}; auf dieſelbe Weiſe aber wie A_{r-1} aus A_r und A_{r+1} hervorging, geht auch A_{r-2} aus A_{r-1} und A_r hervor; alſo ſind auch A_{r-2} und A_{r-1} durch $x - \alpha$ teilbar u. ſ. w., endlich auch A und A_1 durch $x - \alpha$ teilbar, d. h. $x = \alpha$ ist eine Wurzel der Gleichungen (a) und (b). Alſo wenn die Gleichungen (c) und (d) richtig ſind, ſo ſind auch die Gleichungen (a) und (b) richtig.

3. Alſo erſetzen ſich das Gleichungspar (a) und (b) und das Gleichungspar (c) und (d) gegenſeitig.

Es lassen ſich hiernach alſo n höhere Gleichungen mit n Unbekannten schliesslich (wenn nicht die Unbekannten schon früher verschwinden) auf **eine** höhere Gleichung mit einer Unbekannten zurückführen.

Aufgabe. Die Richtwurzeln oder komplexen Wurzeln einer Gleichung zu finden. (Weg von Encke in Crelles Journal der Mathematik Bd. 22 S. 193). 596.

Auflöſung. Jede Wurzel, deren Pluswert α ist, muss ſich (nach 439) in der Form $\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ darstellen lassen. Es ist alſo nur φ zu ſuchen. Man ſetze statt x jenen Wert ein, ſo erhält man

$$\alpha^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + a\alpha^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1} + \cdots = 0.$$

Entwickelt man diefe Gleichung nach dem Zweigliederfatze (dem binomischen Satze), fo erhält man eine Gleichung der Form

$$A + i\sin\varphi B = 0,$$

in welcher A und B nur Höhen von $\cos\varphi$ und gerade Höhen von $\sin\varphi$ enthalten, und zwar ist die Summe der Stufen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in jedem Gliede von A gleich n, in jedem Gliede von B gleich $n - 1$. Aus diefen Ausdrücken kann man noch $\sin\varphi$ ganz wegschaffen. Denn jede Höhe von $\sin\varphi$ mit gerader Stufe, z. B. $(\sin\varphi)^{2m}$ lässt fich in der Form $(\sin\varphi^2)^m = (1 - (\cos\varphi)^2)^m$ darstellen, und letzteres giebt, nach dem Zweigliederfatze entwickelt, nur Höhen von $\cos\varphi$. Somit werden A und B Ausdrücke, welche nur $\cos\varphi$ enthalten, und zwar wird A in Bezug auf $\cos\varphi$ vom n ten, B vom $(n - 1)$ ten Grade. Da nun nach dem obigen $A + i\sin\varphi B = 0$ war, fo muss (nach 426) fowohl $A = 0$ fein, als auch $\sin\varphi B = 0$. Da ferner die Wurzel $\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine Winkelgröse fein foll, fo kann $\sin\varphi$ nicht Null fein, alfo erhält man $B = 0$. Setzen wir noch $\cos\varphi = z$, fo hat man 2 Gleichungen der Form

$$A = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots = 0 \text{ und}$$
$$B = z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} + \cdots = 0.$$

Durch wiederholte Teilung erhält man hieraus auf dem Wege in 595 eine Gleichung, die im Allgemeinen vom ersten Grade fein wird, aber auch zu höhern Graden anwachfen kann, und deren Wurzeln die fämmtlichen Werte z liefern, welche den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ genügen. Da $z = \cos\varphi$ nach der Annahme eine Zahl (reell) ist, fo lassen fich diefe Wurzeln (nach 593) fämmtlich finden. Ist aber $\cos\varphi$ gefunden, fo ist damit der echte Winkel $\mp\varphi$ gefunden, und damit find auch die Winkelwurzeln oder imaginären Wurzeln $\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $\alpha(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ gefunden.

Die

Folgelehre oder Funktionenlehre

der

höhere Zweig der Analyſe.

Zweiter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

Die

Folgelehre oder Funktionenlehre

streng wissenschaftlich in strenger Formel-Entwicklung.

Von

Robert Grassmann.

Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Vorwort.

Die **Funktionenlehre**, zu welcher der Verfasser auch die Differential- und Integralrechnung heranzieht, leidet zur Zeit noch an einer Reihe von Schwierigkeiten und Unklarheiten, welche die Erlernung dieſer Wissenschaft erschweren und Unſicherheiten erzeugen, die einer strengen Wissenschaft nicht entsprechen und den ſichern Fortgang weſentlich erschweren.

Wollte der Verfasser auch für dieſen Zweig des Wissens zu streng wissenschaftlichem Fortschritte kommen, der jeden Zweifel und jede Unklarheit ausschliest, so musste er neue Wege einschlagen und jeden unklaren und Zweifel zulassenden Begriff, bez. jedes derartige Zeichen ausmerzen, bez. einwertig bestimmen. Der Verfasser hat dies, wie er glaubt, strenge durchgeführt; ob es ihm gelungen ist, das überlässt er billiger Weise dem Urteile ſeiner Leſer.

Der Begriff der Funktion bedurfte zunächst einer Berichtigung, derſelbe umfasst jetzt ſowohl einwertige, wie mehrwertige Grösen. Unter dieſen Umständen ist es zweifelhaft und muss in jedem Falle erst unterſucht werden, ob man die Funktion ſich ſelbst gleichſetzen darf. So z. B. ist $\sqrt{a^2} = \pm a$, ſetzt man nun $+ a = \sqrt{a^2} = - a$, was nach den bisherigen Geſetzen der Mathematik zulässig ist, wenn überhaupt $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2}$ ist, ſo ergiebt ſich $+ a = - a$ und damit jeder Trugschluss z. B. $1 = {}^1/_2 + {}^1/_2 = {}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2 - {}^1/_2 = 0$. Damit hört jede Strenge der Wissenschaft auf.

Der Verfasser trennt daher die Funktion, deutsch Folge, Zeichen $f_\circ$, $F_\circ$, $\cdots$, als einwertige Formel von dem Funktional, deutsch Gefolge, Zeichen $g_\circ$, $G_\circ$, der mehrwertigen Formel. Nur die Funktionen darf man einander durch das Gleichheitszeichen $=$ gleich ſetzen, die Funk-

tionale darf man nur entſprechend gleich ſetzen durch das Entſprechungszeichen $\cong$, welches bezeichnet, dass je zwei einander entſprechende Werte gleich ſind. So unterscheidet der Verfasser z. B. die einwertige Funktion $(a^n)^{\frac{1}{n}} = + a$, von dem n wertigen Funktional $\sqrt[n]{a^n} \cong a\varepsilon^{\frac{2\alpha\pi}{n}}$ wo α eine ganze Zahl von 0 bis n — 1 ist. So unterscheidet der Verfasser in der Integralrechnung die einwertige Integre

$$\underset{x}{d}^{-n} ax = \frac{ax^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n+1},$$ wo alle willkürlichen Constanten gleich Null geſetzt ſind, von dem mehrdeutigen Integral

$$\underset{x}{\mathfrak{S}}^{n} ax \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_n x^n + \frac{ax^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n+1},$$

wo n willkürliche Constante geſetzt werden.

Ebenſo bedurfte die Klammerſetzung einer Umgestaltung. Nach der Zahlenlehre ist der klammerlose Ausdruck $abcde = \Big(\big((ab)c\big)d\Big)e$, entſprechend müsste nun $f_0 ax^n \sin x = \big((f_0 a) x^n\big) \sin x$ sein, und müsste $df_0 ax^n = \big((df_0)a\big) x^n$ ſein, ebenſo $d\sin x = (d\sin) x$, $\sin x^2 = (\sin x)^2$ sein. Die Mathematiker weichen hiervon ab und lassen die Klammern fort, ohne dafür irgend ein Geſetz zu haben, ſie werden dadurch unklar und mehrfach zweideutig. Hier musste Klarheit und Sicherheit geschafft werden. Dieſelbe ist leicht erreicht und bietet bei Vermeidung unzähliger Klammern volle Sicherheit, wenn jedes Funktionszeichen ohne Klammer auf alle folgenden Grösen desselben Gliedes bezogen wird, alſo $df_0 ax^n \sin x = d\big(f_0\,(ax^n \sin x)\big)$ geſetzt wird. Dies Geſetz führt der Verfasser streng durch. Er schreibt deshalb $\sin(x + y) = (\sin x)\cos y + (\cos x)\sin y$, da nach jenem Geſetze $\sin x \cos y = \sin(x \cos y)$ ſein würde. Er hat alſo in einzelnen Fällen Klammern nötig, wo man jetzt keine Klammer ſetzt (dies aber auch nur fehlerhafter Weise; denn nach dem jetzigen Geſetze müsste $\sin x \cos y = (\sin x \cos) y$ sein, dafür aber gebraucht man bei dieſer Regel überaus wenig Klammern trotz voller Strenge und Sicherheit.

In der Funktionenlehre hat man es nun mit ſich stetig verändernden Grösen zu tun, während die Zahlen der Zahlenlehre durch Zufügen von Eins entstandene Diskrete oder ſprungweise ſich ändernde Grösen ſind. Dieſe ſich stetig verändernden Grösen hat man nun in den Bewegungen im Raume angeschaut und dieſe Anschauungen für die Funktionenlehre zu Grunde gelegt. Es ist dies, ſofern man den Schülern die Sache recht anschaulich machen will, ein ganz praktischer Weg,

dagegen ist es ein ganz unbrauchbarer Weg, wenn man eine streng wissenschaftliche Base für die Funktionenlehre gewinnen will.

Die Funktionenlehre ist der höhere Zweig der Analyse, der einzig und allein auf den niedern Zweig der Analyse, d. h. auf die Zahlenlehre, gegründet werden kann. Alle bedeutenden Mathematiker seit Leibniz haben die Funktionenlehre oder Folgelehre stets als höhern Zweig der Rechenlehre oder Análysis angesehn und sie deshalb höhere Análysis genannt. Keinem dieser ausgezeichneten Gelehrten ist es eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Bewegungslehre oder Mēchanikḗ zu behandeln. Ebenso wenig ist es je einem derselben eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Raumlehre oder Geōmetría zu betrachten, wenn sie auch zahlreiche Anwendungen der Funktionenlehre auf die Raumlehre gegeben, und dadurch die Gesetze der Análysis anschaulich und leichter begreiflich und anwendbar gemacht haben.

Nur in der Zahlenlehre haben wir streng einwertige Begriffe, und streng mathematische Beweise, nur in der Zahlenlehre haben wir durch die Dezimalbrüche mit unendlich vielen Stellen eine stetig wachsende Zahlreihe von Minusunendlich bis Plusunendlich, jede Zahl einwertig, jeder Zahl, in welcher auch nur eine Ziffer verschieden ist, ungleich, nur durch diese stetig wachsende Zahlenreihe einwertiger Zahlen können wir zu einwertigen, stetig wachsenden Funktionen gelangen.

Jede reelle Funktion ist nun eine einwertige Formel, in welcher nur Zahlen vorkommen, jede komplexe Funktion ist eine einwertige Formel, welche, wie in Satz 6 bewiesen wird, die Summe ist aus einer reellen Funktion und dem Produkt von $i = (-1)^{1/2}$ mit einer reellen Funktion, die ganze Funktionenlehre kann und muss also auf die stetig wachsende Zahlreihe gegründet werden. In Satz 15 wird nun streng bewiesen, dass jede reelle Funktion von x, welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die Gröse x wächst, auch, sofern x stetig wächst, eine stetig wachsende bez. eine stetig abnehmende Gröse ist, d. h. dass die reelle Funktion $F_0 x$ von x, wenn x alle Werte der wachsenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $F_0 a$ bis $F_0 b$ durchläuft oder, dass die reelle Funktion von x in den Grenzen des x von a bis b eine stetige Funktion von x ist und in Satz 16 wird das Entsprechende für jede komplexe Funktion von x bewiesen. Hiermit ist eine streng wissenschaftliche Grundlage für die Funktionenlehre ge-

wonnen, wo jede Unklarheit und Zweideutigkeit beſeitigt ist und die Entwicklung der Funktionenlehre beginnen kann.

Die erste Frucht dieſer einwertigen ſichern Grundlage bildet demnächst die Lehre von den echten oder konvergenten Reihen Satz 17 bis 30 und darauf gegründet die Ableitung der Geſetze für die Höhen oder Potenzen von Summen bei beliebiger Zahl im Exponenten oder in der Stufe Satz 31 bis 53 mit dem Binomischen und dem Polynomischen Lehrſatz.

Aus dieſen Sätzen konnten nun die Formeln für die Berechnung der Logarithmen Satz 54 bis 59 abgeleitet und demnächst in Satz 60 bis 67 nachgewieſen werden, wie man die Logarithmentafel prüfen und berechnen kann. Jeder wissenschaftliche Mathematiker ſollte nach Anſicht des Verfassers eine Reihe von Logarithmen ſelbst berechnet haben, um eine Sicherheit von der Richtigkeit der Logarithmen zu gewinnen.

Ebenſo konnten nun in den Sätzen 68 bis 75 die Geſetze für die Berechnung der trigonometrischen Funktionen und in den Sätzen 76 bis 79 die Geſetze für die Berechnung der Logarithmen dieſer Funktionen und für die Logarithmen der trigonometrischen Tafeln gegeben werden.*

Im zweiten Abschnitte der Funktionenlehre wird nun die Lehre von der Differential- und Integralrechnung bei einer Veränderlichen entwickelt. Hier zeigen ſich ſowohl bei den Zeichen, wie auch bei den üblichen Methoden bedenkliche Mängel.

Hier schreibt man den Differentialquotienten als wirklichen Quotienten $\frac{dy}{dx} = f_0 x$. Aber da die Funktionen Zahlgrössen ſind, für welche die Zahlgeſetze gelten, ſo kann man nach Zahlenlehre 167 $\frac{d}{d}$ heben und erhält alſo $y = x f_0 x$, kurz eine Gröse, welche man gar nicht ſucht. Man muss alſo dem Differentialquotienten ein Zeichen geben, wo ſich nichts heben lässt; ich habe dafür das unzweideutige Zeichen $\frac{d}{x}$ geleſen „Diff x von“ eingeführt.

Die meisten Mathematiker auch neuester Zeit leiten den Differentialquotienten dadurch ab, dass ſie von dem Quotienten der Differenzen

* Der Verfasser hat fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln Stettin 1895, Preis 50 Pf., herausgegeben, welche für die trigonometrischen Funktionen 9200 neue Logarithmen enthalten, die, obwohl ſie für die genaue Berechnung unumgänglich nothwendig ſind, doch in allen andern Tafeln fehlen.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ausgehen und diesen Quotienten in den Differentialquotienten übergehen lassen, wenn jede der beiden Differenzen Null wird; dann wird also $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, d. h. eine Gröse, welche jeder beliebigen Gröse gleich ist, da $0 \cdot b = 0$ für jede Gröse ist, es ist dann also $\frac{dy}{dx}$ nicht einer einwertigen Gröse, sondern einer Gröse von unendlich vielen Werten gleichgesetzt, also zweifellos keine einwertige Funktion, und wird auch nie einwertig, mag man auch noch so viel Redensarten und geometrische Zeichnungen vorführen, welche dies plausibel machen sollen. Wissenschaftlich lässt sich so nie ein einwertiger Diff nach x gewinnen.

Hier ist der einzig wissenschaftliche und auf die Zahlenlehre, wie auf die Grundlehren der Funktionenlehre zu gründende Weg der, dass man die $f_0(x + y)$ in einer steigenden Höhenreihe von y entwickelt, also $f_0(x + y) = f_0 x + y f_0' x + \cdots$ ableitet und den ersten Diff x $\frac{d}{x}$ der ersten abgeleiteten Funktion von x d. h. $f_0' x$ gleichsetzt. Diese Form der Ableitung ist bereits von Leibniz gegeben, ist die einzige Form, in welcher der Diff x wissenschaftlich abgeleitet werden kann, und hat durch Lagrange Théorie des fonctions analytiques Paris 1797 (3. Aufl. 1847) die eleganteste Form erhalten, an welcher, nachdem die Gesetze der echten Reihen streng wissenschaftlich entwickelt sind, nichts auszusetzen ist. Nachdem diese Mängel verbessert sind, bietet die Ableitung sämmtlicher Diffe nach x, bez. nach x + iy Satz 83 bis 153 keine weitern Schwierigkeiten dar.

Die Sätze 154 bis 184 leiten aus den Diffen die Eigenschaften der ursprünglichen Funktionen mit ihren Beugungen, ihrem Maximum und Minimum und ihren Wurzelwerten ab.

Die Integralrechnung beginnt nun mit dem Satze 185. Hier mussten wieder neue Wege eingeschlagen werden. Jedes Integral hat nämlich eine oder mehre willkürliche Constante. Schon das erste Integral z. B. $\underset{x}{\mathfrak{S}} x^m \cong w_0 + \frac{x^{m+1}}{m+1}$ hat die eine willkürliche Constante w_0, welche jeden beliebigen Wert annehmen kann. Jedes Integral ist demnach eine vielwertige Gröse, kurz ein Funktional. Das erste Integral kann man nun zwar einwertig machen, indem man x zwischen den Grenzen a und b nimmt, denn dann wird $\overset{a,\,b}{\underset{x}{\mathfrak{S}}} x^m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ d. h. einwertig.

Aber bei den höhern Integralen konnte man hierdurch die Willkürlichen nicht fortschaffen; hier blieb alſo jedes Integral vielwertig. Die Mathematiker konnten daher nichts mit den höhern Integralen anfangen, ſie haben daher auch keine höhern Integrale behandelt. Aber dieſe höhern Integrale haben doch eine weſentliche Bedeutung; und kann man dieſelben leicht einwertig machen, indem man ſämmtliche willkürliche Constante gleich Null ſetzt. Ich nenne das einwertige Integral, dessen ſämmtliche willkürliche Constante gleich Null geſetzt ſind, eine Integre. Dieſe Integre ist dann einwertig, als Zeichen derſelben nehme ich $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m} f_0 x$. Sei dies $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m} = F_0 x$; dann ist

$$\underset{x}{\mathfrak{S}}^{m} f_0 x = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + F_0 x.$$

Die Ableitung der mten Integre ist dann nicht schwer; die Sätze 185 bis 231 zeigen uns dieſe Ableitung. Von 232 bis 256 werden dann die Integren zu den Diffgleichungen abgeleitet. Die höhere Funktionenlehre ist hiermit vollendet.

Den dritten Abschnitt der Funktionenlehre bilden nun die Sätze der Funktionen von zwei oder mehren Veränderlichen. Für dieſe musste ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden. Hier hat man bisher fast nur das Integern von vollständigen Differential-Quotienten verſucht, da aber fast nie ein vollständiger Differentialquotient mit allen ſeinen zu einander passenden Gliedern gegeben ist, ſo kann man gegenwärtig auch die Diffe mit zwei Veränderlichen fast nie integriren. Ja die Diffe höherer Stufen erscheinen den Mathematikern noch ganz unlösbar; an dieſe hat man ſich überhaupt noch nicht gewagt.

Soll hier ein besseres Ergebniss erzielt werden, ſo muss ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden. Ueberdies ſind in den weitaus meisten Fällen uns Teildiffe (partielle Differentialquotienten) gegeben, für welche die Integre bez. das Integral gefunden werden ſoll. Auch dies zwingt uns, einen ganz neuen Weg zu verſuchen.

Aber auch nicht jede zwei gegebenen Teildiffe lassen ſich integriren. Es kommt nicht ſelten vor, dass zwei gegebene Teildiffe gar nicht auf ein und dieſelbe urſprüngliche Folge zurückgeführt werden können. Es muss alſo unterſucht und festgestellt werden, in welchen Fällen zwei gegebene Teildiffe auf dieſelbe urſprüngliche Folge zurückgeführt werden können, in welchen nicht.

Der Verfasser hat daher die für alle theoretischen Wissenschaften am meisten gebrauchten und vielfach ebenſoleicht zu integernden Teil-

diffe (partiellen Differentialquotienten) wie die im zweiten Abschnitte behandelten einer einzigen Veränderlichen einer eingehenden Unterſuchung unterworfen.

Er nennt den mten Diff einer Funktion mehrer Veränderlichen, in welcher zwar die Höhen verschiedener Veränderlicher vorkommen, in welcher aber der mte Diff nur nach einer Veränderlichen y $\underset{y}{d}^m$ genommen ist, den mten **Eckdiff** nach y. Dagegen eine Funktion, in welcher die Diffe nach zwei oder mehren Veränderlichen $\underset{x}{d}^a \underset{y}{d}^b \cdots$, wo $a + b + \cdots = m$ ist, einen **Mitteldiff**.

Der mte Eckdiff nach x einer Funktion mehrer Veränderlichen ist dann gleich dem mten Diffe nach x einer Funktion einer Veränderlichen, indem man alle andern Veränderlichen als Konstante behandelt (Satz 380).

Der Verfasser unterscheidet dann für das Integern dieſer Eckdiffe die getrennten, die trennbaren, die ergänzenden und die ergänzbaren Eckdiffe, bei denen ſich jede Differentialgleichung auf eine Integre zurückführen lässt, während bei den andern Eckdiffen und bei den Mitteldiffen das Integern nicht zulässig ist.

Es ergeben ſich dann zahlreiche Anwendungen für die Verſuche und für die auf Verſuche gegründeten Wissenschaften.

Den vierten Abschnitt der Funktionenlehre, die Lehre von den erweiterten Funktionen, d. h. von den Fournierschen-, den Bernouillischen-, den Gamma-, den elliptischen Funktionen u. s. w., hat der Verfasser nicht herausgegeben, da er hier nicht zu neuen Methoden gelangt ist. Hier kann er nur auf die Arbeiten anderer Mathematiker verweiſen.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung in die Folgelehre oder Funktionenlehre.

		Nummer.	Seite.
1.	Die allgemeinen Erklärungen der Folgelehre	1	1
2.	Das stetige Wachsen bez. Abnehmen der Grösen	9	4

Erster Abschnitt der Folgelehre: Die niedere Folgelehre oder die Lehre von den echten Reihen.

3.	Die echten oder die konvergenten Reihen	17	10
4.	Die Höhen einer Summe bei beliebiger Zahl in der Stufe	31	18
5.	Die Reihe für Loge oder Logarithmen und die Berechnung der Logarithmentafel	54	31
6.	Die Reihen für die Winkelfolgen und Bogen und die Berechnung der trigonometrischen Logarithmentafeln	68	45

Zweiter Abschnitt der Folgelehre: Die höhere Folgelehre oder die Lehre von den Diffen und von den Integren einer Veränderlichen.

7.	Die allgemeinen Sätze über Diffe oder Differentialquotienten	80	60
8.	Die Diffe (die Differentialquotienten) für die Formeln der Zahlenlehre oder der niedern Analyse	104	72
9.	Die Eigenschaften für die Folgen der Zahlen- und Folgelehre	154	86
10.	Die Integrale und die Integren der Diffe oder der Differentialquotienten	185	106
11.	Die Integern zu den Diffgleichungen	232	119
	A. Das Integern durch Einführung einer neuen Veränderlichen	232	119
	B. Das Integern durch Reihen	257	125
	C. Das Integern der Brüche von Folgen	259	126
	D. Die Integren von Stufen, Logen, von Winkel- und Logenfolgen	300	148

Dritter Abschnitt der Folgelehre: Die dehnende Folgelehre oder die Lehre von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen.

	Nummer.	Seite.
12. Die allgemeinen Sätze über die Folgen zweier und mehrer Veränderlichen	361	167
13. Die Diffe (Differentialquotienten) von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen	369	169
14. Die Integren und Integrale von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen	382	174
15. Die Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen	392	181

Vierter Abschnitt der Folgelehre: Die erweiternde Folgelehre oder die Lehre von den erweiterten Folgen oder Funktionen.

16. Die erweiterten Folgen	408	189

1. Die allgemeinen Erklärungen der Folgelehre.

Erklärung. **Die Folgelehre oder die Funktionenlehre ist der höhere Zweig der Rechenlehre oder Análysis und heist daher auch die höhere Analyſis. Es behandelt dieſer Zweig die Rechnungen mit Folgen oder Funktionen, welche aus den Rechnungen der Zahlenlehre oder der niedern Analyſis hervorgegangen ſind oder noch hervorgehen werden.** 1.

Erklärung. **Die Folge oder Funktion von x heist eine einwertige Formel von x, welche durch Knüpfungen der Rechenlehre entstanden ist, und in welcher die Folge ihre Werte ändert, wenn x ſie ändert.** 2.

Die Veränderliche (die Variable) heist die Gröse x, welche ihren Wert in der Formel ändert. Die Beständige oder Konstante heist eine Gröse, welche in der Formel ihren Wert unverändert beibehält.

Erklärung. **Das Zeichen der Veränderlichen ist einer der letzten Buchstaben im Abece: x, y, z, u, v ⋯; das Zeichen der Beständigen ist einer der ersten Buchstaben im Abece: a, b, c, ⋯** 3.

Das Zeichen der Folgen oder Funktionen ist ein f mit einem kleinen o: f_0, F_0, φ_0, Φ_0, ψ_0, Ψ_0. Jedes Folgezeichen bezieht ſich stets auf die ſämmtlichen folgenden Grösen desſelben Gliedes.

Die Mathematiker wenden für die Folgen oder Funktionen meist ein f ohne ein kleines o an; dies aber ist fehlerhaft. Jeder Buchstabe ist in der Formenlehre oder Mathematik das Zeichen einer Gröse, ſo auch f. Die Zeichen fx, f·x, f(x) bezeichnen demnach das Zeug oder Produkt f mal x, nicht aber eine Folge oder Funktion von x. Dagegen ist das Zeichen f noch nicht verwandt, es kann demnach verwandt werden um die Folge oder Funktion zu bezeichnen; ich führe es dafür in die Wissenschaft ein.

Jedes Folgezeichen bezeichnet in derſelben Nummer der Folgelehre stets nur eine und dieſelbe Formel und hat alſo nur einen Wert. Im Uebrigen kann jedes Folgezeichen jede beliebige Formel der Rechenlehre bezeichnen.

Jedes Folgezeichen bezieht ſich auf das ganze demnächst folgende Glied. So z. B. ist $F_0\,x\cdot y = F_0\,(x\cdot y)$ die Folge von $x\cdot y$, ſo ist $F_0\frac{x}{y} = F_0\left(\frac{x}{y}\right)$ die Folge von $\frac{x}{y}$, ſo ist $F\;a\,x^n = F\;(ax^n)$ die Folge von ax^n, ſo ist $F_0\,a\cdot\sin x = F_0\,(a\cdot\sin x)$ die Folge von $a\sin x$ u. ſ. w.; dagegen ist $F\;a \pm b = \pm b + F_0\,a$, oder $\pm b$ plus der Folge von a und ganz verschieden von $F\;(a \pm b)$. Soll ſich das Folgezeichen nur auf die nächstfolgenden Grösen desſelben Gliedes beziehen, ſo muss es mit dieſen in eine Klammer eingeschlossen werden. So z. B. ist $(F\;x)a^m = a^m F_0\,x$.

Es ist ſehr wichtig, dass man auf dieſen Gebrauch in der Mathematik oder Formenlehre achte, da man ſonst in die grösten Verwirrungen gerät. So ist $\sin a x = \sin(a x)$, $\sin\frac{x}{b} = \sin\left(\frac{x}{b}\right)$, $\sin x^n = \sin(x^n)$, dagegen $\sin a + b \gtrless \sin(a+b)$. Das Folgezeichen bezieht ſich alſo auf alle Grösen des nächstfolgenden Gliedes und unterscheidet ſich dadurch weſentlich von den Knüpfungszeichen der einfachen Grösen, wo immer nur eine Gröse an die nächst vorhergehenden angeknüpft wurde. Z. B. $F_0\,\sin a^x = F_0\,[\sin(a^x)]$, dagegen $abcd = [(ab)c]\,d$. Es ist dieſer Unterschied aber nicht ein willkürlicher, ſondern notwendig in der Sache begründet. Denn bei den Knüpfungen der einfachen Grösen geht man von einer einfachen Gröse aus und verknüpft dieſe mit einer Gröse, das Geſammt wieder mit einer Gröse und ſofort. Dagegen bei der Funktion ſetzt man bereits die ſämmtlichen Knüpfungen der Zahlenlehre voraus, das Folgezeichen bezieht ſich demnach auf die Geſammtheit der folgenden zu einem Gliede verknüpften Grösen. Die obige Regel ist alſo in der Sache begründet. Beachtet man dieſelbe nicht, ſo gebraucht man unzählige Klammern. Die Mathematiker, welche dieſe Regel nicht beachten, und alſo Klammern ſetzen müssten, finden nun aber dieſe Klammern grosenteils höchst unbequem, lassen ſie daher möglichst weg und werden dadurch ungenau. Schon hierdurch entstehen mancherlei Schwierigkeiten und Dunkelheiten, welche ſämmtlich vermieden werden, wenn man die obige Regel befolgt. Ueberdies kann man, wenn man dieſe Regel stets beobachtet, nach den Folgezeichen die Klammern in den meisten Fällen entbehren.

4. **Erklärung. Die Folge (die Funktion) einer Veränderlichen heist die Folge, wenn die Formel nur eine Veränderliche enthält.**

Die Folge mehrer Veränderlichen heist die Folge wenn die Formel mehre Veränderliche enthält.

Da die Folgen einer Veränderlichen die einfachern ſind, ſo werden wir uns im Folgenden zunächst vorzugsweiſe mit dieſen beschäftigen.

5. **Erklärung. Die Reinfolge (die reelle Funktion) heist eine Folge, in deren Formel nur Zahlen vorkommen.**

Die Richtfolge (die komplexe Funktion) heist eine Folge, in deren Formel Richtgrösen (komplexe Grösen) vorkommen. Das Zeichen

der Richtfolge ist $f_0(x, i)$. Die Reinfolgen und die Richtfolgen heisen gemeinſam Zahlfolgen.

Die Richtgröse (komplexe Gröse) heist die Gröse $a + ib$, wo a und b Zahlen ſind, i aber gleich $(-1)^{1/2}$ ist.

Die Mathematiker teilen noch die Reihenfolgen in Baſenfolgen (algebraische Funktionen), wo die Veränderliche nur in der Baſe (ſei es in der Summe oder im Unterschiede, im Zeuge (Produkte) oder im Nenner, in der Baſe einer Höhe oder einer Tiefe) vorkommt und in Stufenfolgen (transſcendente Funktionen), wo die Veränderliche in der Stufe einer Höhe a^x oder im Loge $\frac{x}{a}$, oder in der Winkelfolge sin x, oder im Bogen arc (sin = x) vorkommt. Dieſe Unterscheidung ist jedoch von untergeordnetem Werte.

Satz. $f_0(x, i) = \varphi_0 x + i \psi_0 x$. 6.

Jede Richtfolge (komplexe Funktion) von x ist gleich der Summe einer Reinfolge und einer Jfolge von x, wo die Jfolge das Zeug oder Produkt von i und einer Reinfolge von x ist.

Beweis; Jede Gröse, welche auser den Zahlen noch i enthält, lässt ſich, wie wir in der Zahlenlehre ſahen, auf die Form der Richtgröse (komplexen Gröse) $a + ib$ bringen, wo a und b reine Zahlen ſind, indem i^n, wenn n gerade ist, eine Zahl ± 1, wenn n ungerade ist, i mal einer Zahl ergiebt und zwei ſolche Richtgrösen $a + ib$ und $c + id$ ſind nach Zahlenlehre 426 dann und nur dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$.
Jede Folge $f_0(x, i)$, welche auser der Veränderlichen x noch das i enthält, lässt ſich alſo auf die Form bringen $\varphi_0 x + i \psi_0 x$ wo $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ nicht mehr i enthalten, ſondern Reinfolgen (reelle Funktionen) von x ſind und ſie muss auf dieſe Form gebracht werden, da ſich ſonst gar nicht beurteilen lässt, ob ſie einer andern Gröse gleich ist oder nicht. Denn ſei $F_{01}(x, i) = \varphi_{01} x + i \psi_{01} x$ und $f_{02}(x, i) = \varphi_{02} x + i \psi_{02} x$, ſo ist $f_{01}(x, i) = f_{02}(x, i)$ nach Zahlenlehre 426 dann und nur dann, wenn ſowohl $\varphi_{01} x = \varphi_{02} x$, als auch $\psi_{01} x = \psi_{02} x$ ist.

Erklärung. Das Gefolge oder das Funktional von x heist jede mehrwertige Formel von x, wo demſelben Werte von x mehre Werte der Formel entsprechen. Das Zeichen des Gefolges ist G_0. 7.

Satz. Zwei Gefolge können einander nur entsprechend gleich geſetzt werden (Zeichen $\cong$ geleſen entsprechend gleich), d. h. es darf nur ein Wert des einen Gefolges dem entsprechenden Werte des andern Gefolges gleich geſetzt werden. Dagegen darf nie ein Gefolge dem andern Gefolge gleich geſetzt werden. 8.

Beweis: Das Gefolge von x habe für den Wert $x = a$ die

beiden verschiedenen Werte b und c, wo b $\gtrless$ c. Setzt man nun G_0 a = b und G_0 a = c, so erhält man b = G_0 a = c, d. b = c, da zwei Grösen, welche einer dritten gleich sind, auch einander gleich sind. Es wäre also gleichzeitig b $\gtrless$ c und auch b = c. Da nun eine Gröse nach Zahlenlehre 10 nie einer andern ungleich und zugleich gleich sein kann, so ist dies unmöglich; man darf also nicht G_0 a = G_0 a setzen, auch nicht G_0 a = b oder = c, vielmehr muss man setzen G_0 a $\cong$ b, c.

In der Mathematik hat man diese Vorschrift vernachlässigt. Man setzt $\sqrt{a^2} = +a$ und auch $\sqrt{a^2} = -a$, und müsste also auch $+a = \sqrt{a^2} = -a$ folgern; aber diese Folgerung lässt man nun fort, weil dies fehlerhaft wäre. Aber nicht diese Folgerung ist fehlerhaft; diese ist vielmehr streng richtig. Fehlerhaft ist nur, dass man die $\sqrt{a^2}$ wie eine einwertige Folge behandelt und einer Gröse gleich setzt, während sie nur entsprechend gleich gesetzt werden darf. Richtig ist also $\sqrt{a^2} \cong \pm a$. Ebenso bei jedem andern Gefolge, z. B. bei den Integralen.

Die Gefolge haben in der Mathematik eine wichtige Bedeutung; aber man muss sie richtig behandeln, wenn man nicht in lauter Trugschlüsse fallen und Fehler machen will.

2. Das stetige Wachsen bez. Abnehmen der Grösen.

Um die Aenderung der Veränderlichen und ihre Wirkung auf die Folge oder Funktion betrachten und den Begriff des stetigen Wachsens bez. Abnehmens richtig fassen zu können, betrachten wir zunächst die Zahlreihe und gehen, um auch unendlich kleine Aenderungen betrachten zu können, auf die unendlichen Zehntbrüche oder Dezimalbrüche zurück.

9. **Erklärung. Ein unendlicher Zehntbruch oder Dezimalbruch heist ein Zehntbruch, welcher unendlich viele Stellen hat. Der Zehntbruch oder Dezimalbruch heist abgebrochen, wenn man ihn nur bis zu einer bestimmten Stelle hin nimmt. Die Summe aller folgenden Stellen heist der Rest des Zehntbruches.**

Beispiel: $\frac{1}{9} = 0{,}11111 \cdots$ ist ein unendlicher Dezimalbruch. Brechen wir denselben bei der zehnten Stelle, $0{,}1111111111$ ab, so ist der Rest gleich $\left(\frac{1}{10}\right)^{10} \cdot 0{,}11111 \cdots = {}^1/_9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$.

10. **Satz. Der Rest eines Zehntbruches oder Dezimalbruches ist stets kleiner oder gleich einer Einheit in der letzten Stelle, bei der abgebrochen ist.**

Beweis: Sei der Zehntbruch bei $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ abgebrochen, so umfasst der Rest nur Ziffern der folgenden Stellen und ist also

$$a_1\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^{n+2} + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^{n+3} + \cdots =$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \left[a_1\left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdot\cdot\right]$$

Hier ist jede der Zahlen $a_1, a_2 \cdot\cdot$ eine ganze Zahl kleiner als 10, alſo höchstens 9 und ist mithin

$$a_1\left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots \overline{\overline{<}}$$

$$9\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1 + 9\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 9\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

$$\overline{\overline{<}}\ 0{,}_{999}\cdots$$

nun ist aber $0{,}_{999}\cdots = 9\cdot 0{,}_{111}\cdots = 9\cdot {}^1/_9 = 1$ mithin ist der Rest der Reihe

$$a_1\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^{n+2} + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^{n+3} + \cdots \overline{\overline{<}} \left(\frac{1}{10}\right)^n\cdot 1.$$

was zu beweiſen war.

Erklärung. Stetig wachſend heist eine Reihe von Zahlen, wenn zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern der Reihe, deren Unterschied einer endlichen Zahl gleich ist, mag dieſe übrigens ſo klein ſein, wie ſie wolle, noch unendlich viele Glieder der Reihe liegen, von denen jede gröser ist als die vorhergehenden und kleiner als die folgenden Glieder der Reihe. 11.

Satz der Zahlreihe. Die Zahlreihe, d. h. die ſämmtlichen Zehntzahlen mit den ſämmtlichen endlichen und unendlichen Zehntbrüchen (Dezimalbrüchen), bildet eine stetig wachſende Reihe von Zahlen, welche von Strichunendlich bis zu Plusunendlich wachſen. Alle Zahlwerte beliebiger Grösen gehören dieſer Reihe an und giebt es keinen Zahlwert auser den Gliedern der Zahlreihe. 12.

Beweis: 1. Die Zahlreihe bildet eine stetig wachſende Reihe. Denn nehmen wir zwei Glieder der Zahlreihe, deren Unterschied auch nur $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, z. B. $\left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$ betrage, ſo liegen doch zwischen dieſen beiden Gliedern noch unendlich viele Glieder der Reihe, nämlich alle Glieder der unendlichen Reihe $\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \overline{\mathfrak{S}_{1,} a_\alpha\left(\frac{1}{10}\right)^\alpha}$, wo a_α jeden der 10 Werte von 0 bis 9 haben kann. Brechen wir dieſe Reihe z. B. nach 100 Gliedern ab, ſo erhalten wir bereits 10^{100} Glieder der Reihe, die zwischen jenen beiden Gliedern liegen, lassen wir die Reihe ſich aber

bis ins Unendliche fortfetzen, fo erhalten wir auch unendlich viele Glieder der Reihe, die zwischen jenen beiden Gliedern liegen.

2. Wenn irgend ein Zahlwert gegeben ist, fo muss er einwertig fein, mithin eine bestimmte Gröse haben, er muss fich aber auch in Zahlen ausdrücken lassen, mithin muss er der Zahlreihe angehören. Gehörte er der Zahlreihe nicht an, fo hätte er auch nicht einen bestimmten Zahlwert, wäre nicht gröser als bestimmte Zahlen, nicht kleiner als andere, und liese fich überhaupt nicht mit andern Zahlen vergleichen, kurz er wäre nicht ein bestimmter Zahlwert.

13. **Satz der Reihe der Richtgrösen. Die Reihe von Richtgrösen a + ib, wo a und b jede alle Werte der Zahlenreihe von Strichunendlich bis Plusunendlich befitzen können, bildet eine unendliche Doppelreihe. Alle Richtgrösen gehören diefer Reihe an und giebt es keine Richtgröse auser den Gliedern diefer Reihe.**

Beweis: Jede Richtgröse a + ib ist eine Gröse, in welcher a und b reine Zahlen find. Was nun auch a und b für Zahlen find, fo umfasst die Reihe der Richtgrösen alle Grösen, wo a eine beliebige Zahl und ebenfo b eine beliebige Zahl zwischen Strichunendlich und Plusunendlich ist und kann es keine Richtgröse auser den Gliedern diefer Reihe geben.

14. **Erklärung. Eine Zahl wächft stetig in den Grenzen von a bis b heist, fie nimmt der Reihe nach alle Zahlwerte der Zahlreihe von a bis b an, diefe eingeschlossen. Zeichen x = Mitt. [a, b].**

Eine Zahl wächft stetig in den Grenzen zwischen a und b heist, fie nimmt der Reihe nach alle Zahlwerte der Zahlreihe zwischen a und b an, diefe ausgeschlossen. Zeichen x = Mitt. (a[,]b).

Es ist bei den Grenzbestimmungen überaus wichtig, dass man die Unterscheidung mache, ob die Grenzen felbst eingeschlossen oder ausgeschlossen find; da fonst notwendig Verwirrung entstehen muss.

15. **Satz. Jede Reinfolge (reelle Funktion) von x, welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächft, bez. stets abnimmt, wenn die Gröse x wächft, ist fofern x stetig wächft, auch eine stetig wachfende bez. eine stetig abnehmende Gröse, d. h. die Reinfolge $F_0 x$ von x durchläuft, wenn x alle Werte der wachfenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls alle Werte der wachfenden Zahlreihe von $F_0 a$ bis $F_0 b$ oder die Reinfolge ist in den Grenzen des x von a bis b eine stetige Reinfolge von x.**

Beweis: 1. Sei die Reinfolge von x gleich $F_0 x$ und fei für jedes beliebige x in den Grenzen von a bis b, wenn $x + c > x$ ist,

auch $F_0(x + c) > F_0 x$, auch ſei x eine stetig wachſende Gröse, d. h. nach 13 und 11 eine Gröse, bei der zwischen je zwei Werten, deren Unterschied einer endlichen Gröse c gleich ist, mag dieſe ſo klein ſein, wie ſie wolle, noch unendlich viele Werte liegen, ſo ſoll bewieſen werden, dass auch $F_0 x$ eine stetig wachſende Gröse ſei.

Sei alſo $F_0(x + c) - F_0 x = A$ zunächst eine Gröse, welche noch gröser ist als c, ſo kann man, da x zwischen den Werten $x = a$ und $x + c = a + b$ nach 11 noch unendlich viele Werte $x_1, x_2 \cdots$ hat, welche in der Weiſe steigen, dass jeder folgende Wert $x_{a+1} > x_a$ ist, auch unendlich viele Werte der $F_0 x$ zwischen jenen Werten einführen und muss auch hier nach der Vorausſetzung des Satzes jeder folgende Wert $F_0 x_{a+1} > F_0 x_a$ ſein. Der Unterschied A zerfällt alſo auch hier in unendlich viele Zwischenwerte, bei denen stets der folgende gröser als der nächst vorhergehende ist; man kann demnach stets $F_0 x_n$ und $F_0 x_m$ in der Art wählen, dass $F_0 x_n - F_0 x_m$ zwar grösser als Null, aber kleiner als die endliche Gröse c ſei. Sei nun $x_n - x_m = u$, ſo giebt es nach 11 zwischen dieſen beiden Werten von x noch unendlich viele Werte von x, bei denen jeder folgende wieder gröser als die vorhergehenden ist. Da aber jedem x eine Reinfolge $F_0 x$ entspricht und dieſe bei gröserem x auch gröser wird, ſo giebt es auch zwischen den Werten $F_0 x_n$ und $F_0 x_m$ auch unendlich viele Werte von $F_0 x$, bei denen gleichfalls jeder folgende Wert gröser als die vorhergehenden ist, d. h. $F_0 x$ ist innerhalb jener Grenzen eine stetig wachſende Gröse.

Wenn nun x zwischen zwei endlichen Werten x_m und x_n alle unendlich vielen Werte der wachſenden Zahlreihe durchläuft, ſo durchläuft auch die Formel $F_0 x$ zwischen den Werten $F_0 x_m$ und $F_0 x_n$ die unendlich vielen Werte der wachſenden Zahlreihe zwischen dieſen Grenzen und kann es nicht einen Wert von x_a geben, dem nicht ein Wert von $F_0 x_a$ entspreche, und nicht einen Wert von $F_0 x_b$, dem nicht ein Wert von x_b entspreche.

2. Der Beweis ist ganz entsprechend, wenn $F_0 x$ stets abnimmt, während x wächſt.

Es könnte Manchem, welcher die bisherigen Erklärungen und Beweiſe der Funktionenlehre gewohnt ist, ſo erscheinen, als ſei der Beweis in n 15 nicht vollständig und fehle der Beweis, dass die Reinfolge von x nur einen und nicht mehre Werte habe. Aber nach n 2 ist jede Folge oder Funktion nur einwertig, und bedurfte es alſo hierfür gar keines Beweiſes. Ebenſo ist nach Zahlenlehre n 2 jede Gröse und nach Zahlenlehre n 5 auch jedes Ergebniss jeder Knüpfung, alſo auch jede Formel oder Folge nur einwertig und ist alſo auch aus dieſem Grunde jeder Beweis unnöthig.

Ich bemerke hier nochmals, dass ſich das Zeichen F_0 auf das ganze folgende Glied bezieht, auch wenn dies nicht in eine Klammer geschlossen ist so ist $F_0 \frac{x}{a}$ die Formel von $\frac{x}{a}$ alſo gleich $F_0 \left(\frac{x}{a}\right)$, ſo ist $F_0\, a\, x^n = F_0\, (a\, x^n)$ oder Formel von $a x^n$; dagegen ist $F_0\, a + b = b + F_0 a$ oder b plus der Formel von a und ganz verschieden von $F_0\,(a + b)$ oder der Formel von $a + b$. Es ist notwendig, dass man genau auf dieſen Gebrauch achte, damit man nicht in Verwirrung gerate.

16. **Satz. Die Richtfolge (die komplexe Funktion) von x, nämlich $F_0\,(x, i) = \varphi_0\, x + i\, \psi_0\, x$, in welcher die Reinfolgen $\varphi_0\, x$ und $\psi_0\, x$ in den Grenzen des x von a bis b stets wachſen, bez. stets abnehmen, wenn die Gröse x wächſt, ist ſofern x stetig wächſt, auch eine Richtgröse, in welcher die beiden Reinfolgen $\varphi_0\, x$ und $\psi_0\, x$ stetig wachſen oder stetig abnehmen, d. h. die Reinfolgen von x $\varphi_0\, x$ und $\psi_0\, x$ durchlaufen, wenn x alle Werte der wachſenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls alle Werte der wachſenden Zahlreihe von $\varphi_0\, a$ bis $\varphi_0\, b$ bezüglich von $\psi_0\, a$ bis $\psi_0\, b$ oder die Richtfolge ist in den Grenzen des x von a bis b eine stetige Richtfolge von x.**

Beweis: Unmittelbar aus 15.

Die Folge oder Funktion wird in den meisten Lehrbüchern durch das Bild der Bewegung erklärt, und werden daraus die Begriffe der stetigen Veränderung, der Grenze, der unendlich kleinen Differenz genommen. Es ist dieſes Bild der Bewegung nun auch ungemein geeignet, um die Vorgänge anschaulich zu machen und werde ich deshalb von dieſem Bilde zur Veranschaulichung vielfach Gebrauch machen; aber die wissenschaftliche Entwicklung darf man darauf nicht gründen, wenn man nicht verworren, unklar und unwissenschaftlich werden will.

Die Formenlehre oder Mathematik namentlich die Zahlenlehre gewinnt ihre Grösen durch Setzen von Einheiten und deren Verknüpfung; ihre Grösen ſind daher endlich verschieden, diskrete Grösen, ſo alle Zahlgrösen. Erst durch den unendlichen Reihenbruch, den unendlichen Dezimalbruch, gewinnt man in der Zahlenlehre Grösen, welche ſich von andern ſo wenig unterscheiden als man will, gewinnt man eine stetige Reihe von Grösen, welche stetig in einander übergehen und jeden Wert annehmen können, der überhaupt nur möglich ist. Auf dieſe unendlichen Reihenbrüche muss man demnach den Begriff der stetigen Gröse zurückführen und daraus den Begriff der stetigen Folge ableiten, wie dies in den Sätzen 9 bis 16 geschehen ist.

Alle bedeutenden Mathematiker haben daher auch ſeit Leibniz die Funktionenlehre oder Folgelehre stets als höhern Zweig der Rechenlehre oder Análysis angeſehn und ſie deshalb höhere Analyſis genannt. Keinem dieſer ausgezeichneten Gelehrten ist es eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Bewegungslehre oder Mēchanikē zu behandeln. Ebenſo wenig ist es je einem derſelben eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Raumlehre oder Geōmetría zu betrachten, wenn ſie auch zahlreiche Anwendungen der Funktionenlehre auf die Raumlehre gegeben, und dadurch die Geſetze der

Analyfis anschaulich und leichter begreiflich und anwendbar gemacht haben.

Im Gegenfatze hiezu will nun Herr Paul Du Bois-Reymond „Die allgemeine Funktionentheorie. Erster Teil. Metaphyfik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Gröse, Grenze, Argument und Funktion“ Tübingen 1882 die Funktionenlehre nicht als höhern Zweig aus der niedern Analyfis, fondern aus der geometrischen Gröse und zwar speziell aus der linearen Gröse ableiten, ganz wie er auch die Zahl aus diefer Gröse ableiten will. Aber der Verfuch, den er in dem genannten Buche hiefür macht, ist gänzlich verfehlt und unwissenschaftlich. Herr Paul Du Bois-Reymond ist unzweifelhaft ein fehr tüchtiger Mathematiker, der in der höhern Analyfis fehr Bedeutendes geleistet hat, und den ich daher hoch schätze; aber das obige Buch hätte er nicht schreiben follen, er zeigt fich darin als ungeübt im strengen Denken und schadet bei dem Anfehen, welches er geniest, der Wissenschaft felbst. Ich habe bereits in der Zahlenlehre n2 und n11 nachgewiefen, wie fehlerhaft und gänzlich unwissenschaftlich feine Erklärungen von „Gröse“, von „gleich und ungleich“ find und dass er damit auf strenge Beweisführung und reine Mathematik überhaupt verzichtet. Hier kann ich darauf verweifen. Aber eben wegen diefer fehlerhaften Grundbegriffe kommt er nun auch bei den die Funktionenlehre betreffenden Fragen zu ganz unwissenschaftlichen und fehlerhaften Sätzen. So fagt er a. a. O., Seite 74 „Zwei endliche Grösen, deren Unterschied unendlich klein ist, „find einander gleich“.

„Eine endliche Gröse ändert fich nicht, wenn ihr Unendlichkleines hin„zugefügt oder hinweggenommen wird“. Und gleich darauf a. a. O., Seite 75 „Das Unendlichkleine ist eine mathematische Gröse und hat mit dem Endlichen „dessen fämmtliche Eigenschaften gemein“.

Da es nun eine Eigenschaft des Unendlichkleinen nach ihm ist, dass fich eine endliche Gröse nicht ändert, wenn ihr Unendlichkleines hinzugefügt oder hinweggenommen wird, und das Endliche mit dem Unendlichen fämmtliche Eigenschaften gemein hat, fo folgt daraus, dass auch eine endliche Gröse fich nicht ändert, wenn ihr Endliches hinzugefügt oder hinweggenommen wird. Aehnliche Fehler finden fich wiederholt in der Schrift.

Die Folgelehre zerfällt, wie die Zahlenlehre in vier Abschnitte. Diefelben find: Die niedere Folgelehre, die höhere Folgelehre, die dehnende Folgelehre und die erweiternde Folgelehre. Die niedere Folgelehre behandelt die echten oder die konvergenten Reihen, die höhere Folgelehre behandelt die Differentialrechnung und Integralrechnung für alle Folgen einer Veränderlichen, die dehnende Folgelehre dehnt die Betrachtung auf mehre Veränderliche aus und auf die dadurch entstehenden partiellen Differentialgleichungen, wie auf die Variationen, die erweiternde Folgelehre endlich behandelt die Lehre von den höhern Folgen, z. B. den Fourierschen, Bernoullischen, den Gamma und den elliptischen Funktionen.

Erster Abschnitt der Folgelehre: Die niedere Folgelehre oder die Lehre von den echten Reihen.

3. Die echten oder die konvergenten Reihen.

Die echten oder die konvergenten Reihen find für die Folgelehre dasfelbe, wie die Zahlreihen für die Zahlenlehre; auf ihnen beruht die ganze Folgelehre als auf ihrer Bafe.

Es kommt hier daher auf volle Schärfe an; denn ist man hier ungenau oder folgt man hier Trugschlüssen, fo werden fich die Fehler bald geltend machen und die ganze Folgelehre verwirren. In früherer Zeit hatte man hier mancherlei Fehler begangen. Cauchy hat, um diefen Fehlern zu entgehen, die Berechnung des Restes der Reihe eingeführt; aber diefe Berechnung ist gänzlich unnütz, und zu verwerfen, da fie gar keine Vorteile gewährt. Viel richtiger ist es, man führt die echten oder konvergenten Reihen einfach auf die Dezimalbrüche, und damit auf die Reihenzahlen überhaupt zurück, in deren Gebiet fie allein Geltung haben follen, und vermeidet einfach die Fehler, welche hier im Anfange der Lehre begangen find; dann werden auch von felbst die daraus gefolgerten Fehler schwinden.

17. **Erklärung. Eine unendliche Reihe heist die Summe von unendlich vielen Gliedern von denen jedes eine Grösse ist, $u_0 + u_1 + u_2 \cdots$ Das Glied u_m heist ihr mtes Glied, das Glied u_a, wo a eine beliebige Pluszahl ist, ihr allgemeines Glied, der Bruch $\frac{u_{a+1}}{u_a}$, sofern u_a ungleich Null ist, ihr Fortschreitungsfach (Fortschreitungsfaktor).**

Das Zeichen der Summe ist Su_a wo a die ganzen Zahlen von Null bis Plusunendlich bezeichnet.

Die Reihe heist fortgesetzt bis zum nten Gliede, wenn man die ersten Glieder bis zum nten Gliede hin nimmt, alle folgenden aber fortlässt. Die Summe der folgenden Glieder $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ heist der nte Rest der Reihe, Zeichen r_n.

Das Summenzeichen bezieht sich, wie jedes Folgezeichen auf alle folgenden Grösen desselben Giedes, so ist $S u_a = S(u_a) = u_0 + u_1 + \cdots$ so ist $S \alpha_a x^a = S(\alpha_a x^a) = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots$ so ist $S(a+1)x^a = S[(a+1)x^a]$ dagegen ist $S \alpha_a x^a + by = (S \alpha_a x^a) + by$. Es ist überaus wichtig, strenge auf diese Regel zu achten, welche von den meisten Mathematikern noch vernachlässigt wird, man kann darnach die grose Mehrzahl der Klammern vermeiden, in der Folgelehre oder Funktionenlehre vermeidet man dadurch $\frac{9}{10}$ bis $\frac{99}{100}$ der Klammern, welche erforderlich sind, wenn man ganz strenge verfährt. Die Formeln werden dadurch viel einfacher und wissenschaftlicher; man muss daher dies Gesetz strenge beobachten. Das Zeichen $\underset{n}{S} a$ bezeichnet, dass a alle ganzen Pluswerte von n an haben solle, also $\underset{n}{S} a = n + (n+1) + (n+2) + \cdots$. Für $n = 0$ kann man den Zeiger weglassen; es ist also $S u_a = \underset{0}{S} u_a$.

Erklärung. Eine echte Reihe oder konvergente Reihe heist die unendliche Reihe, wenn sie sich stets soweit fortsetzen lässt, dass der Pluswert des Restes kleiner ist als eine beliebige gegebene Pluszahl e. und auch kleiner bleibt, wenn man die Reihe noch weiter fortsetzt. Wenn eine Reihe einem bestimmten endlichen Werte gleich gesetzt wird, so soll damit immer zugleich gesagt sein, dass die Reihe echt ist. 18.

Eine Reihe, welche nicht echt ist, heist eine unechte Reihe oder eine divergente Reihe. Die unechte Reihe heist eine Uebergangsreihe, wenn sämmtliche Glieder der Reihe endlich bleiben, dagegen eine fehlerhafte Reihe, wenn die Glieder der Reihe unendlich werden.

Satz. Jede echte oder konvergente Reihe ist eine Gröse, welche nur einen und nicht mehre bestimmte Werte hat. Man kann sich derselben beliebig nähern, wenn man die Glieder derselben genügend weit zufügt. 19.

Beweis: Nach n 17 ist die unendliche Reihe die Summe von unendlich vielen Gliedern, von denen jedes eine Gröse ist. Nach Zahlenlehre n 2 hat aber jede Gröse nur einen und nicht mehre Werte, also hat auch jedes der unendlich vielen Glieder der Reihe nur einen und nicht mehre Werte. Nach Zahlenlehre Satz 79 ist ferner das Zufügen eine Grösenknüpfung, d. h. nach Zahlenlehre Satz

5 eine Verbindung von Grösen, deren Ergebniss nur einen und nicht mehre Werte hat. Das Ergebniss des Zufügens ist aber die Summe; alſo hat die unendliche Reihe d. h. die Summe von unendlich vielen Gliedern auch nur einen und nicht mehre Werte. Bei der echten oder konvergenten Reihe ist aber nach Satz 18 der Pluswert des Restes von einem bestimmten Gliede ab kleiner als eine beliebige gegebene Pluszahl c und bleibt auch kleiner, wenn man die Reihe noch weiter fortſetzt, und kann man ſich mithin dem Werte der echten Reihe beliebig weit nähern.

Um der echten oder konvergenten Reihe den Wert der Summe, der an ein mtes Glied folgenden n Glieder bestimmen, bez. mit dem mten Gliede vergleichen zu können, gehen wir auf die Betrachtung dieſer Summe ein.

20. **Satz. Wenn in einer Reihe von Pluszahlen u_0, u_1, $u_2 \cdots$ jedes Glied gleich oder kleiner ist als das pfache des nächst vorhergehenden Gliedes und p eine Pluszahl kleiner als 1 ist, ſo ist die Summe aller Glieder bis zu einem beliebigen nten Gliede u_n hin kleiner als ein Bruch, dessen Zähler das nullte Glied u_0 und dessen Nenner $1-p$ ist.**

Beweis: Gegeben ist nach dem Satze

$$u_1 \leqq u_0 p \quad , \quad u_2 \leqq u_1\, p, \cdots\cdots u_n \leqq u_{n-1}\, p.$$

Hier ſind alle Grösen $u_0 \cdots u_n$ Pluszahlen, alſo auch die Zeuge oder Produkte $u_0 p$, $u_1 p \cdots u_{n-1} p$ Pluszahlen, da auch p eine Pluszahl ist. Alſo ist auch $o < u_n p$, da u_n und p Pluszahlen ſind nach Zahlenlehre 145. Fügt man nun die Grösen jeder Seite zu, ſo erhält man nach Zahlenlehre 147

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + o < u_0 p + u_1 p + \cdots u_{n-1} p + u_n p$$

Setzen wir hier $s = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, ſo geht dieſe Vergleichung über in

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + o < sp$$

und fügt man auf beiden Seiten u_0 zu, ſo erhält man

$$s < sp + u_0 \qquad \text{oder} \qquad s(1-p) < u_0$$

mithin da $p < 1$ ist, ſo ist $1-p$ eine Pluszahl und ist nach Zahlenlehre 201

$$s < \frac{u_0}{1-p} \qquad \text{oder} \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n < \frac{u_0}{1-p}$$

21. **Satz. Wenn a eine Pluszahl $\gtrless 1$ ist und k eine beliebige Zahl, ſo lässt ſich stets eine ganze Pluszahl n von der Art finden, dass**

wenn $a > 1$, auch $a^n > k$ ſei, dagegen

wenn $a < 1$, auch $a^n < k$ ſei,

und diese Vergleichungen auch fortbestehen, wenn n noch gröser wird.

Beweis: 1. Es sei $a > 1$ so ist nach Zahlenlehre 379 $\log \cdot a$ eine Pluszahl, also auch $\gtrless 0$. Dann kann man $n > \frac{\log \cdot k}{\log \cdot a}$ setzen, dann ist nach Zahlenlehre 201 auch $n \cdot \log a > \log k$, mithin nach Zahlenlehre 373 $\log \cdot a^n > \log k$ also nach Zahlenlehre 378 auch $10^{\log \cdot a^n} > 10^{\log k}$, d. h. es ist $a^n > k$ nach Zahlenlehre 362.

2. Es sei $a < 1$, so ist nach Zahlenlehre 206 $\frac{1}{a} > 1$. Dann kann man nach Beweis 1 die Gröse n so setzen, dass $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{k}$ ist. Dann ist $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{k}$ mithin $a^n < k$ nach Zahlenlehre 206.

22. **Satz. Jede unendliche Reihe, in welcher von irgend einem Gliede an der Pluswert des Fortschreitungsfaches gleich oder kleiner als ein bestimmter echter Bruch p ist, ist eine echte Reihe.**

Beweis: Seien $a_0, a_1 \cdots$ die Glieder der Reihe und seien $u_0, u_1 \cdots$ die Pluswerte dieser Glieder und sei die Bedingung des Satzes vom m ten Gliede a_m an erfüllt, so ist also

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \leqq p, \ \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \leqq p, \cdots \text{ d. h. es ist}$$

$$u_{m+1} \leqq u_m p, \ u_{m+2} \leqq u_{m+1} p, \cdots$$

dann ist der Pluswert r_m des Restes $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$

$$r_m = u_m p + u_{m+1} p + \cdots \quad \text{, also nach Zahlenlehre 147}$$

$$r_m \leqq u_m + u_{m+1} + \cdots \quad \text{und da nach 20}$$

$$u_m + u_{m+1} + \cdots < \frac{u_m}{1-p} \quad \text{so ist nach 17 auch}$$

$$r_m < \frac{u_m}{1-p} \quad \text{und ebenso } r_{m+n} < \frac{u_{m+n}}{1-p}$$

da diese Vergleichung auch bestehen bleibt, wenn man statt m eine grösere Zahl, z. B. $m + n$ setzt.

Da ferner nach der Bedingung des Satzes auch

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \leqq p \ , \ \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \leqq p \cdots \ \frac{u_{m+n}}{u_{m+n-1}} \leqq p,$$

so ist nach Zahlenlehre 204 auch das Zeug oder Produkt dieser n Grösen

$$\frac{u_{m+1} \cdot u_{m+2} \cdots \cdot u_{m+n}}{u_m \cdot u_{m+1} \cdots \cdot u_{m+n-1}} \leqq p^n \text{ , also nach Zahlenlehre 182}$$

$\frac{u_{m+n}}{u_m} \leqq p^n$, alſo nach Zahlenlehre 201 auch

$\frac{u_{m+n}}{1-p} \leqq \frac{u_m p^n}{1-p}$ d. h. da $r_{m+n} < \frac{u_{m+n}}{1-p}$, ſo ist auch

$r_{m+n} < \frac{u_m p^n}{1-p}$.

Die Reihe wird nun echt ſein, wenn ſie ſich ſoweit fortſetzen lässt, dass der Pluswert des Restes d. h. r_{m+n} kleiner ist als eine beliebige gegebene Pluszahl c und auch kleiner bleibt, wenn man die Reihe noch weiter fortſetzt. Da hier $p < 1$ ist, ſo kann man nach 21 n stets ſo bestimmen, dass $p^n < \frac{c(1-p)}{u_m}$ wird und auch bleibt, wenn n weiter wächſt. Dann ist nach Zahlenlehre 201

$\frac{u_m p^n}{1-p} < c$ und da $r_{m+n} < \frac{u_m p^n}{1-p}$, ſo ist auch $r_{m+n} < c$

und dieſe Vergleichung bleibt auch bestehen, wenn n wächſt.

23. **Satz. Wenn der Pluswert des nten Restes einer unendlichen Reihe kleiner ist als c und auch kleiner bleibt, wenn man die Reihe noch weiter fortſetzt, ſo ist der Pluswert von jedem der auf das nte Glied noch folgenden Glieder kleiner als 2c.**

Beweis: Sei u_r eines der auf u_n folgenden Glieder und ſei A die Summe der ganzen Reihe, und bezeichnet P (u) den Pluswert von u, ſo ist nach der Annahme

$$P[u_0 + u_1 + \cdots + u_r - A] < c$$

und ebenſo

$$P[A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1})] < c$$,alſo nach Zahlenlehre 149

auch die Summe

$$P u_r < 2c,$$

Nachdem wir hiemit die allgemeinen Sätze über die echten oder konvergenten Reihen entwickelt haben, wenden wir uns nun zur Betrachtung der echten Höhenreihen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Wir führen zunächst die verschiedenen Arten der echten Höhenreihen, namentlich die fallende echte Höhenreihe und die echte Höhenreihe mit gebrochner Stufe auf die Form der steigenden echten Höhenreihe zurück, und entwickeln für letztere das Geſetz der Vorzahlen.

24. **Satz. Die steigende Höhenreihe**

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = S a_\alpha x^\alpha$$

ist stets echt, wenn x^2 kleiner als Eins, und zugleich keine der Vorzahlen unendlich ist.

Beweis: Unmittelbar aus 22.

Satz. Die fallende Höhenreihe 25.

$$a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots = S a_s x^{-s}$$

ist ſofern die Vorzahlen endlich bleiben, stets echt, wenn x^2 gröser als Eins ist.

Beweis: Setze $x = \frac{1}{z}$, ſo wird die Reihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

und ist $z = \frac{1}{x}$ kleiner als eins nach Zahlenlehre 206, alſo die Reihe echt nach 24.

Satz. Jede echte fallende Höhenreihe lässt ſich in eine echte steigende Höhenreihe und jede echte Höhenreihe mit gebrochner Stufe lässt ſich in eine echte Höhenreihe mit ganzer Stufe umwandeln. Jede echte Höhenreihe lässt ſich demnach auf die Form der steigenden Höhenreihe zurückführen. 26.

Beweis: Für die fallende Höhenreihe folgt der Satz unmittelbar aus dem Beweiſe zu 25. Für die Höhenreihe mit gebrochner Stufe

z. B. $$a_0 + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

ſetze $z = x^{\frac{1}{n}}$, ſo folgt der Satz unmittelbar. Kommen mehre verſchiedene Nenner vor, ſo bringe man dieſe auf den kleinsten Gemeinnenner etwa u und ſetze $z = x^{\frac{1}{u}}$.

Satz. Wenn eine steigende Höhenreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ gleich Null ist, für jeden Wert des x von 0 bis zu c hin, ſo ſind die ſämmtlichen Vorzahlen Null. 27.

Beweis: Wenn der Satz gilt für die ersten n Vorzahlen, ſo ſoll bewieſen werden, dass er auch für die n + 1te Vorzahl gilt. Sei alſo $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $\cdots a_n = 0$ (Annahme) ſo ſind die ersten Glieder a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2$, $\cdot\cdot$ bis $a_n x^n$ ſämmtlich gleich Null nach Zahlenlehre 174 und wird die Reihe

$$a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdot\cdot = 0.$$

Da dieſe Reihe für $x = c$ gelten ſoll, ſo kann man dieſelbe durch $x^{n+1} = c^{n+1}$ teilen und erhält dann

$$a_{n+1} + a_{n+2} x + a_{n+3} x^2 + \cdot\cdot = 0.$$

Da dieſe Reihe aber auch für $x = 0$ gelten ſoll, ſo werden alle die Glieder, welche x enthalten, nach Zahlenlehre 174 für $x = 0$ gleich Null und die Reihe wird $a_{n+1} = 0$.

Der Satz gilt mithin wenn er für die n ersten Vorzahlen gilt, auch für die n + 1 ersten Vorzahlen. Nun gilt er für a_0, denn es ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = 0$$

und da diese Reihe für $x = 0$ gelten soll, so sind nach Zahlenlehre 174 alle Glieder, welche x enthalten, für $x = 0$ auch Null, also ist auch $a_0 = 0$, mithin gilt der Satz ganz allgemein.

28. **Satz. Wenn zwei steigende Höhenreihen**

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad \text{und}$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

für jeden Wert des x von Null bis c hin gleich sind, so sind die entsprechenden Vorzahlen gleich.

Beweis: Es ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

nach der Annahme

mithin ist $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \cdots = 0$

d. h. $a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \cdots = 0$

mithin ist nach 26

$$a_0 - b_0 = 0 \;,\; a_1 - b_1 = 0 \;,\; a_2 - b_2 = 0 \cdots \text{ d. h.}$$

$$a_0 = b_0 \;,\; a_1 = b_1 \;,\; a_2 = b_2, \cdots.$$

Die allgemeinen Sätze über die steigende echte Höhenreihe sind hienach entwickelt. Wir gehen nun dazu über die Reinfolgen (reellen Funktionen) von x und die Richtfolgen (komplexen Funktionen) von x mit den echten steigenden Höhenreihen von x zu vergleichen und nachzuweisen, wie weit man dieselben auf die Form einer echten steigenden Höhenreihe zurückführen kann.

Die Aufgabe ist für die Folgelehre oder Funktionenlehre ganz die entsprechende als die Zurückführung einer beliebigen Zahlformel auf einen unendlichen Zehntbruch (Dezimalbruch) in der Zahlenlehre. Wie dort in der Zahlenlehre ist auch hier das Ergebniss der Arbeit die Berechnung des Zahlwertes der Folge von x für einen bestimmten Zahlwert von x in einem Zehntbruche oder Dezimalbruche. Die Folgelehre führt uns dadurch zu der Berechnung von x^n, wo n eine beliebige Zahl, zur Berechnung von $l_n x$, wo n eine beliebige Pluszahl, zur Berechnung der Winkelfolgen und Bogenfolgen ($\sin x$, $\cos x$, arc ($\sin = x$), arc ($\cos = x$) u. s. w. und zeigt sich auch hiedurch als der höhere Zweig der Rechenlehre oder Analysis.

29. **Satz. Jede stetige Reinfolge (stetige reelle Funktion) von x (d. h. jede Reinfolge von x, welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die Grösse x wächst) kann, sofern $x^2 < 1$ ist, einer steigenden Höhenreihe von x gleichgesetzt werden und diese ist, sofern in ihr nicht eine der Vorzahlen unendlich wird, eine echte Reihe** oder

$$f_0 x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \stackrel{*}{=} S a_a x^a, \quad {}^*\text{wo } x = M\,[a, b]$$

auch $x^2 < 1$ und jedes a_a endlich ist.

Beweis: Da $x^2 < 1$ ist, so ist die steigende Höhenreihe nach 24 stets echt, wenn keine Vorzahl unendlich ist, sie ist demnach auch nach 19 einwertig und einer bestimmten Gröse gleich, wenn alle ihre Vorzahlen endlich bestimmt und auch x einen bestimmten Wert hat. Da aber diese Reihe unendlich viele Vorzahlen hat, so kann man die Vorzahlen so bestimmen, dass die Reihe für jeden bestimmten Wert von x auch dem entsprechenden Werte der einwertigen Formel von x gleich ist.

Da die Reinfolge (die reelle Funktion) in den Grenzen des x von a bis b stetig ist, d. h. in diesen Grenzen stets wächst bez. stets abnimmt, wenn die Gröse x wächst, so durchläuft sie nach 15, wenn x nach der Reihe alle Werte der wachsenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls nach der Reihe alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $f_0 a$ bis $f_0 b$. Ebenso durchläuft dann auch die echte stetige Höhenreihe von x nach der Reihe alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $S a_a a^a$ bis $S a_a b^a$.

Es wird zweckmäsig sein die Fälle zu untersuchen, in denen man nicht die $f_0 x$ einer steigenden Zahlreihe von x gleichsetzen kann, weil einzelne Vorzahlen unendlich werden.

Setzen wir zunächst $\frac{1}{x^n}$ **oder** x^{-n} einer echten steigenden Höhenreihe von x gleich. Setzen wir zunächst also $\frac{1}{x^n} = S a_a x^a$, so ergiebt sich, wenn wir $x = 0$ setzen $\frac{1}{0^n} = a_0$ d. h. die Vorzahl a_0 wird unendlich, die Höhenreihe ist also nicht echt.

Setzen wir demnächst

$$x^{\frac{1}{n}} = S a_a x^a, \text{ so folgt } x = (S a_a x^a)^n = a_0^n + n a_0^{n-1} a_1 x + \cdots$$

Hier muss, wenn die Reihe echt sein soll, nach 27

$$a_0^n = 0 \text{ d. h. } a_0 = 0 \text{ sein und } 1 = n a_0^{n-1} a_1, \text{ d. h. } a_1 = \frac{1}{n a_0^{n-1}} = \frac{1}{0}$$

sein, d. h. hier wird a_1 unendlich, also die Höhenreihe gleichfalls nicht echt.

Setzen wir ferner

$$l_e x = S a_a x^a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

so wird, wenn wir $x = 0$ setzen $l_e 0 = a_0$.

Es ist also $l_e 0 = -\infty = \pm \frac{1}{0}$; also auch $a_0 = -\frac{1}{0}$, die Höhenreihe also wiederum nicht echt.

Setzen wir $c^x = S a_a x^a$, so erhalten wir, wenn wir $x = 0$ und zugleich $c = 0$ setzen $0^0 = a_0$ und da $0^0 = 0^{n-n} = \frac{0}{0}$ ist, so wird die Vorzahl a_0 unendlich, die Höhenreihe ist also nicht echt.

In allen diesen Fällen kommt man aber zu echten Höhenreihen wenn man statt x, die Gröse $1 \pm x$, bezüglich im letzen Falle $1 \pm c$ einführt; so geben $\frac{1}{(1 \pm x)^n}$

$\frac{1}{(1 \pm x)^{\frac{1}{n}}}$, $l_e (1 \pm x)$ wo $x^2 < 1$, ſo $(1 \pm c)^x$, wo $c^2 < 1$ ist, echte Reihen. So darf man ferner nicht ſetzen $\cot x = Sa_a x^a$, denn für $x = 0$ wird $\cot 0 = a_0$ unendlich, ebenſo ist es mit $\operatorname{cosec} x$; dagegen kann man in dieſem Falle $\cot (90^0 \pm x) = Sa_a x^a$ und ebenſo $\operatorname{cosec} (90^0 \pm x) = Sa_a x^a$ ſetzen.

30. **Satz. Jede stetige Richtfolge (stetige komplexe Funktion) in den Grenzen des x von a bis b (d. h. jede Richtfolge $\varphi_0 x + i \psi_0 x$ von x, in welcher die beiden Reinfolgen $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ in den Grenzen des x von a bis b stets wachſen, bez. stets abnehmen, wenn die Gröse x wächſt) kann, ſofern $x^2 < 1$ ist, einer Richtgröse $a + ib$ gleichgeſetzt werden, in welcher jede der beiden Zahlen a und b eine echte steigende Höhenreihe von x darstellt oder**

$$\varphi_0 x + i \psi_0 x \overset{*}{=} Sa_a x^a + i Sb_b x^b \quad * \text{ wo } x = M[a, b], \text{ auch } x^2 < 1.$$

Beweis: Unmittelbar aus 17 und 29.

4. Die Höhen einer Summe bei beliebiger Zahl in der Stufe.

Um die Sätze für die Höhen von Summen ableiten zu können, ist es notwendig, zunächst einige Hülfsſätze über die Geschiedszahlen abzuleiten. In der Zahlenlehre 482 bis 486 haben wir bereits die Geschiedszahlen $n^{\cdot m}$ behandelt, wo die Baſe n und die Stufe m ganze Zahlen ſind; hier wollen wir ſie auch für die Fälle behandeln, wo die Baſe n eine beliebige Zahl ist.

Bemerkt wird, dass n im Folgenden immer eine ganze Pluszahl bezeichnen ſoll.

31. **Erklärung. Die Geschiedszahl $a^{\cdot n}$ (geleſen a Punkt n oder Geschiedszahl von a zur nten Stufe), wo n eine ganze Pluszahl ſein ſoll, heist ein Bruch, dessen Zähler ein Zeug oder Produkt von n Zahlen ist, deren erste gleich a, und jede folgende um 1 kleiner ist als die nächstvorhergehende und dessen Nenner ein Zeug oder Produkt ist von den n ersten ganzen Zahlen 1 bis n. Oder**

$$a^{\cdot n} = \frac{a\,(a-1)\,(a-2) \cdots\cdots (a-n+1)}{1 \cdot \quad 2 \cdot \quad 3 \cdot \cdots \quad n}.$$

32. **Erklärung. Die Tauschzahl (die facultas) von n heist das Zeug oder Produkt der n ersten ganzen Zahlen 1 bis n, wo n eine ganze Pluszahl ist. Zeichen n! (geleſen n Tausche) Oder**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n.$$

Beispiele:

$$5^{\cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10\ ;\ 8^{\cdot 3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56\ ;\ 9^{\cdot 7} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 36$$

$$\frac{1}{2}^{\cdot 3} = \frac{{}^1/_2\,({}^1/_2 - 1)\,({}^1/_2 - 2)}{1 \cdot \quad 2 \cdot \quad 3} = \frac{1}{16}\ ;\ \frac{1}{3}^{\cdot 4} = \frac{{}^1/_3\,({}^1/_3 - 1)\,({}^1/_3 - 2)\,({}^1/_3 - 3)}{1 \cdot \quad 2 \cdot \quad 3 \cdot \quad 4} = -\frac{10}{243}$$

Tafel der Tauschzahlen von 1! bis 15!

1! = 1	2! = 2	3! = 6	4! = 24	5! = 120	6! = 720
7! = 5040		8! = 40320		9! = 362880	
10! = 3'628'800		11! = 39'916800		12! = 479'001600	
13! = 6227'020800		14! = 87'178'291200		15! = 1'307674'368000.	

Tafel der Brüche $\frac{1}{n!}$.

$\frac{1}{2!} = 0{,}50000'00000$	$\frac{1}{6!} = 0{,}00138'88889$	$\frac{1}{10!} = 0{,}00000'02756$
$\frac{1}{3!} = 0{,}16666'66667$	$\frac{1}{7!} = 0{,}00019'84127$	$\frac{1}{11!} = 0{,}00000'00251$
$\frac{1}{4!} = 0{,}04166'66667$	$\frac{1}{8!} = 0{,}00002'48016.$	$\frac{1}{12!} = 0{,}00000{,}00021$
$\frac{1}{5!} = 0{,}00833'33333$	$\frac{1}{9!} = 0{,}00000'27557$	$\frac{1}{13!} = 0{,}00000'00002$

Erklärung. Die Geschiedszahl $a^{\cdot n}$ wird, wenn n Null ist, gleich 1, wenn n eine Strichzahl ist, gleich 0 gefetzt. Die Tauschzahl wird wenn n Null ist gleich 1 gefetzt. 33.

$$a^{\cdot 0} = 1 \qquad a^{\cdot -n} = 0 \qquad 0! = 1.$$

Satz. $a^{\cdot 1} = a \qquad a^{\cdot n} \overset{*}{=} \frac{a!}{n!\,(n-a)!}$ *** wo a ganze Pluszahl** 34.

Die Geschiedszahl jeder Zahl zur ersten Stufe ist der Zahl gleich. Die Geschiedszahl jeder ganzen Pluszahl a zur nten Stufe ist, fofern a $\geqq$ n ist, gleich a Tausche geteilt durch das Zeug oder Produkt von n Tauschen und (a — n) Tauschen.

Beweis: Nach 31 ist $a^{\cdot 1} = \frac{a}{1} = a$ und ebenfo

$$a^{\cdot n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)\,(a-n)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots (a-n).}$$

Satz. Die Geschiedszahl ($a^{\cdot n}$) ist nur in den Fällen gleich Null, wenn entweder die Stufe n eine Strichzahl (negativ) ist, oder wenn die Bafe (a) eine ganze Pluszahl und zugleich die Stufe (n) gröser als die Bafe ist. 35.

Beweis: Die Stufe (n) kann nur entweder eine Strichzahl, oder Null oder eine Pluszahl fein. Im ersten Falle ist $a^{\cdot n} = 0$ nach 33. Im zweiten Falle ist $a^{\cdot n} = a^{\cdot 0} = 1$ nach 30, alfo nicht gleich Null. Im dritten Falle ist $a^{\cdot n}$ nach 29 ein Bruch

$$a^{\cdot n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

Diefer Bruch ist nach Zahlenlehre 175 nur gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist, der Zähler aber ist ein Zeug oder Produkt und diefes ist nach demfelben Satze nur dann gleich Null, wenn eines der Fache oder Faktoren Null ist, d. h. wenn entweder $a = 0$, oder $a - 1 = 0$ u. f. w., d. h. wenn entweder $a = 0$ oder $a = 1$, oder $a = 2$ u. f. w. oder endlich $a = n - 1$, d. h. wenn a eine ganze Pluszahl und zugleich n gröser als a ist.

Es ist zweckmäsig nach diefen Sätzen einige Uebungen mit Aufstellung von Geschiedszahlen vorzunehmen, zunächst für ganze Bafen. Ich lasse daher eine kleine Tafel von Geschiedszahlen folgen, die jeder leicht berechnen kann.

Tafel der Geschiedszahlen für ganze Basen.

Base a	Stufe n. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	5005	3003	1365
14	1	14	91	364	910	1638	2184	2184	1638	910	364
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—1	1	—1	+1	—1	+1	—1	+1	—1	+1	—1	+1
—2	1	—2	+3	—4	+5	—6	+7	—8	+9	—10	+11
—3	1	—3	+6	—10	+15	—21	+28	—36	+45	—55	+66
—4	1	—4	+10	—20	+85	—56	+84	—120	+165	—220	+286
—5	1	—5	+15	—35	+70	—126	+210	—330	+495	—715	+1001
—6	1	—6	+21	—56	+126	—252	+462	—792	+1287	—2002	+3003
—7	1	—7	+28	—84	+210	—462	+924	—1716	+3003	—5005	+8008
—8	1	—8	+36	—120	+330	—792	+1716	—3432	+6435	—11440	+19448
—9	1	—9	+45	—165	+495	—1287	+3003	—6435	+12870	—24310	+43758
—10	1	—10	+55	—220	+715	—2002	+5005	—11440	+24310	—48620	+92378

Satz. Es ist $(-a)^{\cdot n} = (-1)^n (a+n-1)^{\cdot n}$ 36.

$$= (-1)^n \cdot \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\ \cdots\ n}$$

Beweis: Es ist $(-a)^{\cdot n}$

$$= \frac{-a(-a-1)(-a-2)\cdots\cdots(-a-n+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\ \cdots\cdots\ n}$$ (nach 31)

$$= (-1)^n \frac{a(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\ \cdots\ n}$$

$$= (-1)^n (a+n-1)^{\cdot n}.$$ (nach 31)

Satz. $\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = (-1)^{n-1} \frac{(a-1)(2a-1)\cdots((n-1)a-1)}{2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\ n} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n$ 37.

Beweis: Es ist $\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n}$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{a}-(n-1)\right)}{1\cdot\ 2.\ 3\cdot\ \cdots\ n}$$ (nach 31)

$$= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{1-2a}{a}\right)\cdots\left(\frac{1-(n-1)a}{a}\right)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\ n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(a-1)(2a-1)\cdots((n-1)a-1)}{2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\ n} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Satz. 38.

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = (-1)^n \frac{(a+1)(2a+1)\cdots\cdots((n-1)a+1)}{2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\cdots\ n} \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Beweis: Es ist $\left(-\frac{1}{a}\right)^{\cdot n}$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}-1\right)\left(-\frac{1}{a}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{a}-(n-1)\right)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\ n}$$

(nach 31)

$$= (-1)^n \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1+a}{a}\right)\left(\frac{1+2a}{a}\right)\cdots\left(\frac{1+(n-1)a}{a}\right)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\ n}$$

$$= (-1)^n \frac{(a+1)(2a+1)\cdots((n-1)a+1)}{2\cdot\ 3\cdot\ \cdots\ n} \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Es wird wieder sehr zweckmäsig sein, einige Beispiele abzuleiten, ich habe demnach die folgende Tafel berechnet, und möchte raten, einige Uebungen in

diefen Berechnungen vorzunehmen, um mit den Geschiedszahlen vertraut zu werden.

Tafel der Geschiedszahlen für Brüche.

Bafe a	Stufe n. 0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{6}$	1	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{72}$	$+\frac{55}{1296}$	$-\frac{935}{31104}$	$+\frac{4301}{186624}$	$-\frac{124729}{6718464}$	$+\frac{623645}{40310784}$
$\frac{1}{5}$	1	$+\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{25}$	$+\frac{6}{125}$	$-\frac{21}{625}$	$+\frac{399}{15625}$	$-\frac{1596}{78125}$	$+\frac{6612}{262144}$
$\frac{1}{4}$	1	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$+\frac{7}{128}$	$-\frac{77}{2048}$	$+\frac{231}{8192}$	$-\frac{1463}{65536}$	$+\frac{4807}{262144}$
$\frac{1}{3}$	1	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{5}{81}$	$-\frac{10}{243}$	$+\frac{22}{729}$	$-\frac{154}{6561}$	$+\frac{374}{19683}$
$\frac{1}{2}$	1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{7}{256}$	$-\frac{21}{1024}$	$+\frac{33}{2048}$
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{21}{128}$	$-\frac{63}{256}$	$+\frac{232}{1024}$	$-\frac{429}{2048}$
$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{81}$	$+\frac{35}{243}$	$-\frac{91}{729}$	$+\frac{728}{6561}$	$-\frac{1976}{19683}$
$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{5}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$+\frac{195}{2048}$	$-\frac{663}{8192}$	$+\frac{4641}{65536}$	$-\frac{17732}{262144}$
$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$+\frac{3}{25}$	$-\frac{11}{125}$	$+\frac{44}{625}$	$-\frac{924}{15625}$	$+\frac{3003}{78125}$	$-\frac{1612}{390625}$
$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{7}{72}$	$-\frac{91}{1296}$	$+\frac{1729}{31104}$	$-\frac{8645}{186624}$	$+\frac{267995}{6718464}$	$-\frac{1416545}{40810784}$

39. **Satz.** $(a+1)^{\cdot n} = a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1}$

Jede Geschiedszahl ist gleich der Summe zweier Geschiedszahlen, deren Bafen um eins kleiner find als die Bafe der gegebenen Geschiedszahl und von deren Stufe die eine ebenfo gros, die andere um eins kleiner ist als die Stufe der gegebenen Geschiedszahl.

Beweis: Es ist nach 29, wenn n eine ganze Pluszahl gröser als 1 ist, $a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1} =$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)(a-n+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ \cdots\ (n-1)\cdot\ \ n} + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)}{1\cdot\ 2\cdot\ \cdots\ (n-1)}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)(a-n+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ \cdots\ (n-1)\cdot\ \ n} + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)\,n}{1\cdot\ 2\cdot\ \cdots\ (n-1)\cdot\ n}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)(a-n+1+n)}{1\cdot\ 2\cdot\ \cdots\ (n-1)\cdot\ \ n}$$

$$= \frac{(a+1)\cdot a(a-1)\cdots(a-n+2)}{1\cdot\ \ 2\cdot\ \cdots\ \ n} = (a+1)^{\cdot n}.$$

Wenn $n=1$, fo ist $a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1} = a^{\cdot 1} + a^{\cdot 0} = a + 1 = (a+1)^{\cdot 1}$.
Wenn $n=0$, fo ist $a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1} = a^{\cdot 0} + a^{\cdot -1} = 1 + 0 = (a+1)^{\cdot 0}$
Wenn n eine Strichzahl $= -m$, fo ist $a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1}$

$$= a^{\cdot -m} + a^{\cdot -m-1} = 0 = (a+1)^{\cdot -m}.$$

40. **Satz.** $(a+b)^{\cdot n} = a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1}\,b + a^{\cdot n-2}\,b^{\cdot 2} + \cdots = S\,a^{\cdot n-\alpha}\,b^{\cdot \alpha}$.
Jede Geschiedszahl, deren Bafe die Summe zweier Stücke ist, ist gleich der Summe aller möglichen Zeuge oder Produkte von je zwei Geschiedszahlen, deren Bafen gleich den Stücken jener Summe, und deren Stufen ganze Zahlen find, die zur Summe die Stufe der gegebenen Geschiedszahl haben.

Beweis: Der Satz gilt, wenn n eine Strichzahl, da dann beide Seiten nach 33 gleich Null werden; er gilt für $n = 0$, da dann beide Seiten nach 33 gleich Eins werden; er gilt für $n = 1$, da dann

$$(a + b)^{\cdot 1} = a + b = a^{\cdot 1} + a^{\cdot 1-1} b \qquad \text{(nach 33 und 34)}$$
$$= a^{\cdot 1} + a^{\cdot 1-1} b + a^{\cdot 1-2} b^{\cdot 2} + \cdots \qquad \text{(nach 33)}$$

Der Satz gilt aber auch für $n > 1$; denn angenommen, er gelte für einen Wert n, ſo lässt ſich beweiſen, dass er auch für $n + 1$ gilt. Es ist dann

$$(a + b)^{\cdot n+1} = \frac{(a + b)\,(a + b - 1) \cdots (a + b - n)}{1 \cdot \quad 2 \cdot \quad \cdots \quad n + 1} \qquad \text{(nach 31)}$$
$$= \frac{a + b}{n + 1}(a + b - 1)^{\cdot n} \qquad \text{(nach 31)}$$
$$= \frac{a\,(a + b - 1)^{\cdot n} + b\,(a + b - 1)^{\cdot n}}{n + 1} \qquad (*)$$

Es ist aber für $(a + b - 1)^{\cdot n}$ oder für $((a - 1) + b)^{\cdot n}$ die Formel der Annahme gültig, alſo ist, wenn man beachtet, dass $a^{\cdot -a} = 0$ ist, und alſo $a^{\cdot n-n} b^{\cdot n} = b^{\cdot n}$ das letzte Glied ist,

$$a\,(a + b - 1)^{\cdot n}$$
$$= a\,[(a - 1)^{\cdot n} + (a - 1)^{\cdot n-1} b + (a - 1)^{\cdot n-2} b^{\cdot 2} + \cdots + b^{\cdot n}]$$
$$= a\,(a - 1)^{\cdot n} + a \cdot (a - 1)^{\cdot n-1} b + a\,(a - 1)^{\cdot n-2} b^{\cdot 2} + \cdots + a b^{\cdot n}$$
$$= (n + 1)\, a^{\cdot n+1} + n \cdot a^{\cdot n} b + (n - 1)\, a^{\cdot n-1} b^{\cdot 2} + \cdots + a b^{\cdot n} \qquad \text{(nach 31).}$$

Das Zeug $b\,(a + b - 1)^{\cdot n}$ erhält man, wenn man hier a und b mit einander vertauscht alſo ist

$$b\,(a + b - 1)^{\cdot n} = (n + 1)\, b^{\cdot n+1} + n\, b^{\cdot n} a + (n - 1)\, b^{\cdot n-1} a^{\cdot 2} + \cdots + b\, a^{\cdot n}.$$

Mithin wenn man beide gleich ordnet, ſo ist

$$a\,(a + b - 1)^{\cdot n} = (n + 1)\, a^{\cdot n+1} + n \cdot a^{\cdot n} b + (n - 1)\, a^{\cdot n-1} b^{\cdot 2} + \cdots + a b^{\cdot n}$$
$$b\,(a + b - 1)^{\cdot n} = a^{\cdot n} b + 2\, a^{\cdot n-1} b^{\cdot 2} + \cdots + n\, a b^{\cdot n} + (n + 1)\, b^{\cdot n+1}$$

Fügt man dieſe Ausdrücke zu, ſo erhält man in jedem Gliede die Summe $n + 1$ und hat man alſo

$$a\,(a + b - 1)^{\cdot n} + b\,(a + b - 1)^{\cdot n} = (n + 1)\,[a^{\cdot n+1} + a^{\cdot n} b + a^{\cdot n-1} b^{\cdot 2} + \cdots + b^{\cdot n+1}], \text{ alſo}$$

$$(a + b)^{\cdot n+1} = \frac{a\,(a + b - 1)^{\cdot n} + b\,(a + b - 1)^{\cdot n}}{n + 1} \qquad \text{(nach *)}$$
$$= a^{\cdot n+1} + a^{\cdot n} b + a^{\cdot n-1} b^{\cdot 2} + \cdots + b^{\cdot n+1}$$

d. h. der Satz gilt allgemein.

Nach diesen Hülfssätzen für die Geschiedszahlen wenden wir uns nun wieder zu den Höhen einer Summe, wo die Zahl in der Stufe eine beliebige Zahl sein kann.

41. **Erklärung. Die Reihe**

$$1 + ax + a^{\cdot 2}x^2 + \cdots = Sa^{\cdot a}x^a$$

heist eine Zweigliederreihe oder eine Binomialreihe, x ihre Base, a ihr Zeiger oder Index.

42. **Satz. Die Zweigliederreihe**

$$1 + nx + n^{\cdot 2}x^2 + \cdots$$

enthält, sofern die Base x ungleich Null, und der Zeiger n eine ganze Pluszahl oder Null ist, n + 1 von Null verschiedene Glieder, deren letztes x^n ist.

Beweis: Wenn n eine ganze Pluszahl oder Null ist, so ist nach 35 $n^{\cdot m} = 0$, sowie m gröser als n ist, mithin ist das letzte Glied $n^{\cdot n}x^n = x^n$ und ist die Anzahl der von Null verschiedenen Glieder $n + 1$.

43. **Satz. Die Zweigliederreihe**

$$1 + ax + a^{\cdot 2}x^2 + \cdots = Sa^{\cdot a}x^a$$

bildet, sofern die Base x ungleich Null ist und der Zeiger a eine Strichgröse oder ein Bruch ist, eine unendliche Reihe, und zwar eine echte, wenn der Pluswert der Base x kleiner als 1 ist.

Beweis: Nach 35 ist $a^{\cdot m}$ von Null verschieden, wenn a nicht eine ganze Pluszahl und zugleich m eine Plusgröse ist, also sind, wenn a eine Strichzahl oder ein Bruch ist, alle Glieder $a^{\cdot a}x^a$ ungleich Null bis ins Unendliche hin.

Diese Reihe ist aber ferner nach 22 echt, wenn von irgend einem Gliede an der Pluswert des Fortschreitungsfaches gleich oder kleiner als ein echter Bruch p ist. Nun ist der Pluswert des Fortschreitungsfaches hier beim rten Gliede, wo r bedeutend gröser als a genommen wird, wenn y den Pluswert von x bezeichnet und Pf_0x den Pluswert von f_0x bezeichnet

$$P\left(\frac{a^{\cdot r+1}x^{r+1}}{a^{\cdot r}x^r}\right) = P\left(\frac{a - r}{r + 1}x\right) = \frac{r - a}{r + 1}y$$

da r gröser als a gesetzt ist. Hier ist $\frac{r - a}{r + 1} < 1$ wenn a eine Plusgröse, also da auch $y < 1$, so ist $\frac{r - a}{r + 1}y < 1$ u. die Reihe also echt.

Wenn a eine Strichgröse, so wird der Pluswert des Fortschreitungsfaches beim rten Gliede $\frac{r + a}{r + 1}y$. Hier kann man r leicht so wählen,

dass dieſer Wert $\frac{r+a}{r+1}y < p$ wird, ſofern man y kleiner als p ſetzt, was nach der Bedingung des Satzes stets möglich ist. Um dies zu zeigen, löſe man die Vergleichung nach r auf, ſo wird $(r+a)y < p(r+1)$ oder $ay+ry < rp+p$, alſo $ay-p < rp-ry$

$$\text{d. h. } \frac{ay-p}{p-y} < r.$$

Da $p > y$, ſo ist der Nenner stets ungleich Null, und die Vergleichung alſo möglich. Dann ist alſo

$$\frac{r+a}{r+1}y < p$$

und die Reihe mithin echt.

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier oder mehrer Binomialreihen von gleicher Baſe, (bei denen entweder der Zeiger 0 oder eine ganze Pluszahl ist, oder der Pluswert der Baſe kleiner als eins ist) ist wieder eine Binomialreihe derſelben Baſe, und zwar ist der Zeiger der Zeugreihe die Summe aus den Zeigern der einzelnen Fachreihen, oder 44.

$$(1+ax+a^{\cdot 2}x^2+\cdots)(1+bx+b^{\cdot 2}x^2+\cdots)\cdots$$
$$=1+(a+b+\cdots)x+(a+b+\cdots)^{\cdot 2}x^2+\cdots.$$

Beweis: 1. Für das Zeug zweier Reihen: Es ist

$$\begin{matrix}(1+ax+a^{\cdot 2}x^2+\cdots)\\ \times(1+bx+b^{\cdot 2}x^2+\cdots)\end{matrix} = \left\{\begin{matrix} 1+ax+a^{\cdot 2}x^2+\cdots+a^{\cdot r} & x^r+\cdots\\ +bx+abx^2+\cdots+a^{\cdot r-1}b & x^r+\cdots\\ +b^{\cdot 2}x^2+\cdots+a^{\cdot r-2}b^{\cdot 2} & x^r+\cdots\\ \vdots & \\ +b^{\cdot r} & x^r+\cdots\end{matrix}\right.$$

$$=1+(a+b)x+(a+b)^{\cdot 2}x^2+\cdots+(a+b)^{\cdot r}x^r+\cdots$$

(nach 40).

2. Für das Zeug mehrer Reihen: Es ſeien A, B, C ⋯ Binomialreihen mit den Zeigern a, b, c ⋯, ſo ist AB nach 44 Beweis 1 eine Binomialreihe mit dem Zeiger $a+b$, ferner nach demſelben Beweiſe ABC eine Binomialreihe mit dem Zeiger $a+b+c$ u. ſ. w.

Satz. Die nte Höhe einer Binomialreihe $A=1+ax+a^{\cdot 2}x^2+\cdots$ (bei der entweder der Zeiger a gleich 0 oder eine ganze Pluszahl oder der Pluswert der Baſe kleiner als eins ist) ist, wenn n eine ganze Pluszahl ist, eine Binomialreihe mit dem Zeiger na oder $(S\, a^{\cdot \alpha}x^\alpha)^n = S\,(na)^{\cdot\alpha}x^\alpha$. 45.

Beweis: Die nte Höhe ist hier ein Zeug oder Produkt von n Binomialreihen, deren jede den Zeiger a hat, der Zeiger dieſer Zeugreihe ist nach 44 die Summe aus den Zeigern der einzelnen Fachreihen alſo na.

46. **Satz. Für jede beliebige Zahlstufe (reelle Stufe) n ist**

$$(1+x)^n = 1 + nx + n^{\cdot 2}x^2 + \cdots = Sn^{\cdot a}x^a$$

doch muss, sofern n nicht eine ganze Pluszahl oder 0 ist, der Pluswert der Base x kleiner als eins sein.

Beweis: 1. Wenn n gleich Null oder eine ganze Pluszahl ist, so ist

$(1+x)^n = (1 + 1\cdot x + 1^{\cdot 2}x^2 + \cdots)^n$, da $1^{\cdot 2}$, $1^{\cdot 3}$ ⋯ alle Null also hat die Reihe die Form der Reihe im Satz 45. Es ist demnach

$(1+x)^n = 1 + nx + n^{\cdot 2}x^2 + \cdots$.

2. Wenn n eine ganze Strichzahl, $n = -p$ ist, dann ist $n + p = 0$, also

$$(1+nx+n^{\cdot 2}x^2+\cdots)(1+px+p^{\cdot 2}x^2+\cdots) = 1+0^{\cdot 1}x+0^{\cdot 2}x^2+\cdots = 1$$

(nach 45 und 35).

Mithin ist

$$1+nx+n^{\cdot 2}x^2+\cdots = \frac{1}{1+px+p^{\cdot 2}x^2+\cdots} = \frac{1}{(1+x)^p}$$

(nach 46,$_1$)

$$= (1+x)^{-p} = 1 + x^n \text{ , da } n = -p \text{ ist.}$$

3. Wenn n ein Bruch $= \frac{p}{q}$ ist, wo q eine ganze Pluszahl, p eine beliebige ganze Zahl ist, so ist die qte Höhe der Binomialreihe

$$\left(1 + \frac{p}{q}x + \left(\frac{p}{q}\right)^{\cdot 2}x^2 + \cdots\right)^q = 1 + px + p^{\cdot 2}x^2 + \cdots$$

(nach 45)

$$= (1+x)^p \text{ (nach 46, 1 u. 2)}$$

mithin die 1te Höhe der Binomialreihe

$$1 + \frac{p}{q}x + \left(\frac{p}{q}\right)^{\cdot 2}x^2 + \cdots = (1+x)^{\frac{p}{q}} \qquad \text{(nach Zahlenl. 344)}$$

d. h. es ist $1 + nx + n^{\cdot 2}x^2 + \cdots = (1+x)^n$ auch wenn n ein Bruch ist.

4. Wenn n eine Unzahl eine Irrationalzahl ist. Nach Zahlenlehre 383 gelten für die Unzahlen oder Irrationalzahlen alle Vergleichungssätze in demselben Umfange wie für die Endzahlen, also auch der vorliegende Satz.

47. **Satz.** $(1-x)^n = 1 - nx + n^{\cdot 2}x^2 - n^{\cdot 3}x^3 + \cdots = S(-1)^a n^{\cdot a}x^a$ **wo entweder n eine ganze Pluszahl oder $x^2 < 1$ ist.**

48. **Satz.** $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \cdots = S(\mp 1)^a x^a$

wo $x^2 < 1$ ist.

Zweigliederſatz oder Binomiſcher Lehrſatz. 49

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + n^{\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots = S\,n^{\cdot\mathfrak{a}}\,a^{n-\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{a}}$$

wo entweder n eine ganze Pluszahl oder $b^2 < a^2$ ist.

Beweis: $$(a+b)^n = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$$= a^n\left[1 + n\frac{b}{a} + n^{\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots\right]$$

(nach 46)

$$= a^n + n\cdot a^{n-1}b + n^{\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots = S\,n^{\cdot\mathfrak{a}}\,a^{n-\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{a}}.$$

Vielgliederſatz oder Polynomiſcher Lehrſatz. 50.

$$(a+b+c+\cdots)^n = S\,n\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots\mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{c}\cdots\cdots}\,a^{n-\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}$$

wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots\cdots$ geſetzt ist, und entweder n eine ganze Pluszahl oder die Pluswerte von a, b, c $\cdots$ eine abnehmende Reihe bilden.

Beweis: 1. Es ist $(a+b+c)^n = [(a+b)+c]^n$

$= S\,n^{\cdot\mathfrak{c}}(a+b)^{n-\mathfrak{c}}\,c^{\mathfrak{c}}$ (nach 49)

$= S\,n^{\cdot\mathfrak{c}}(n-\mathfrak{c})^{\cdot\mathfrak{b}}\,a^{n-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}$ (nach 49)

$$= S\,\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{c}+1)}{1\cdot\ 2\cdots\qquad\mathfrak{c}}\,\frac{(n-\mathfrak{c})\cdots(n-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots\qquad\mathfrak{b}}\,a^{n-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}$$

(nach 31)

$$= S\,\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots\mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots\cdots\mathfrak{c}}\,a^{n-\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}$$ wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ geſetzt.

2. $(a+b+c+d)^n = [(a+b+c)+d]^n$

$= S\,n^{\cdot\mathfrak{d}}(a+b+c)^{n-\mathfrak{d}}\,d^{\mathfrak{d}}$ (nach 49)

$$= S\,\frac{n^{\cdot\mathfrak{d}}\cdot(n-\mathfrak{d})(n-\mathfrak{d}-1)\cdots(n-\mathfrak{d}-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}+1)}{1\cdot 2\cdots\mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{c}}\,a^{n-\mathfrak{d}-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}\,d^{\mathfrak{d}}$$

(nach $50_{,1}$)

$$= S\,\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{d}+1)(n-\mathfrak{d})\cdots(n-\mathfrak{d}-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}+1)}{1\cdot 2\cdots\mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{c}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{d}}\,a^{n-\mathfrak{d}-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}\,d^{\mathfrak{d}}$$

(nach 31)

$$= S\,\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots\mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{c}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{d}}\,a^{n-\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}\,d^{\mathfrak{d}}$$ wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ geſetzt.

3. Und in gleicher Weiſe fortschreitend für beliebig viele Stücke.

Für das Wurzelausziehen wird man den Formeln eine etwas andere Geſtalt geben müssen, um ſie bequem anwenden zu können. Bekanntlich ist $(a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}$, ſei alſo z. B. die 2te Wurzel von 50 zu ſuchen, ſo kann man

$$50^{1/2} = 49^{1/2}\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2} = 7\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2}$$

ſetzen, und die letzte Zahl entwickeln.

51. **Satz.** $(1+a)^n = 1 - (-n)^{\cdot 1} c + (-n)^{\cdot 2} c^2 - (-n)^{\cdot 3} c^3 + \cdots$

$$= 1 + nc + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} c^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 + \cdots$$

$$= S \frac{n(n+1) \cdots (n+\mathfrak{a}-1)}{1 \cdot 2 \cdots \mathfrak{a}} c^{\mathfrak{a}}$$

wo $c = \frac{a}{1+a}$ und $c^2 < 1$ oder $a > -\frac{1}{2}$ ist.

Beweis: Wenn $c^2 < 1$ ist, so ist auch $a^2 < (a+1)^2$ oder $(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$ ist eine Plusgröse nach Zahlenlehre 201. Also ist auch $a + \frac{1}{2}$ eine Plusgröse, d. h. $a > -\frac{1}{2}$. Ferner ist

$\frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = 1 - c$, wo $c = \frac{a}{1+a}$, also ist

$$(1+a)^n = \left(\frac{1}{1+a}\right)^{-n}$$

$$= (1-c)^{-n} = 1 - (-n)^{\cdot 1} c + (-n)^{\cdot 2} c^2 - (-n)^{\cdot 3} \cdot c^3 + \cdots$$

(nach 46)

$$= 1 + nc + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} c^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 + \cdots$$

(nach 36)

$$= S \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+\mathfrak{a}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mathfrak{a}} c^{\mathfrak{a}}.$$

52. **Satz.** $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$= 1 + \frac{1}{n(a+1)} + \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{n(a+1)}\right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{n(a+1)}\right)^3$$

$$+ \cdots + = S \frac{(n+1)(2n+1) \cdots ((\mathfrak{a}-1)n+1)}{2 \cdot 3 \cdots \cdots \mathfrak{a}} \left(\frac{1}{n(a+1)}\right)^{\mathfrak{a}}.$$

Beweis: Man setze in Formel 51 $\frac{1}{a}$ für a und $\frac{1}{n}$ für n, so wird $c = \frac{1}{a+1}$ und erhält man die Formel

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - \left(-\frac{1}{n}\right)^{\cdot 1} \frac{1}{a+1} + \left(-\frac{1}{n}\right)^{\cdot 2} \left(\frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$- \left(-\frac{1}{n}\right)^{\cdot 3} \left(\frac{1}{a+1}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{n(a+1)} + \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{n(a+1)}\right)^2$$

$$+ \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{n(a+1)}\right)^3 + \cdots \text{ (nach 38).}$$

Beispiele: Es bietet diese Formel die grösten Vorteile, wo man auf die Formel $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ zurückgehen kann. Sei z. B. die 2te Wurzel von 2 zu suchen, so hat man $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ also $2^{1/2} = \frac{1}{5} \cdot (50)^{1/2}$ und

$$50^{1/2} = 49^{1/2} \cdot \left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2} = 7\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2} \text{ mithin}$$

$$2^{1/2} = \frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2} = \frac{7}{5}\left[1+\frac{1}{100}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{100}\right)^3+\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{1}{100}\right)^4+\cdots\right]$$

Satz. 53.

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1-\frac{1}{na}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{na}\right)^2-\frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot \quad 3}\left(\frac{1}{na}\right)^3-\cdots$$

$$= 1 - \underset{1}{S}\, \frac{(n-1)(2n-1)\cdots((\mathfrak{a}-1)n-1)}{2 \cdot\cdot \quad 3 \cdots \quad \mathfrak{a}}\left(\frac{1}{na}\right)^{\mathfrak{a}}.$$

Beweis: Man setze in Formel 44 $\frac{1}{a}$ statt x und $\frac{1}{n}$ statt n, so erhält man die Formel

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1-\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\cdot 2}\left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^{\cdot 3}\left(\frac{1}{a}\right)^3+\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{na}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{na}\right)^2-\frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot \quad 3}\left(\frac{1}{na}\right)^3-\cdots$$

(nach 37).

Beispiele: Diese Formel ist für alle die Fälle anwendbar, wo man auf $\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ zurückgehen kann. Sei z. B. die 2te Wurzel von 3 zu suchen, so hat man $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ also $3^{1/2} = \frac{1}{4}(48)^{1/2}$ und $48^{1/2} = 7\left(1-\frac{1}{49}\right)^{1/2}$ mithin

$$3^{1/2} = \frac{7}{4}\left(7-\frac{1}{49}\right)^{1/2} = \frac{7}{4}\left[1-\frac{1}{98}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98}\right)^3-\frac{5}{8}\left(\frac{1}{98}\right)^4-\cdots\right].$$

Will man die 2te Wurzel von 5 suchen, so kann man von

$16 \cdot 5 = 80 = 81\left(1-\frac{1}{81}\right)$ ausgehen, dann ist $5^{1/2} = \frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/2}$.

Will man die 2te Wurzel von 7 suchen, so kann man von

$9 \cdot 7 = 63 = 64\left(1-\frac{1}{64}\right)$ ausgehen, dann ist $7^{1/2} = \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)^{1/2}$.

Für 11 hat man $11^{1/2} = \frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{1/2}$.

Das Wurzelausziehen geht hienach sehr schnell von statten und übt ungemein im Auffinden eleganter Methoden. Wenn es für die Wurzeln nur auf die ersten 7 Stellen ankommt, gewähren die Loge oder Logarithmen, zu denen wir hiermit übergehen, eine viel leichtere und schnellere Methode, da bekanntlich $\log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a$ ist.

In der Schule wird gewöhnlich die zweite Wurzel nach der Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ berechnet. Es ist diese Methode im Ganzen sehr weitläuftig und zeitraubend und wird daher am besten vermieden.

Die zweite und dritte Tiefe der Zahlen von 1—100.

Z	Quadratwurzel	Kubikwurzel	Z	Quadratwurzel	Kubikwurzel
1	1.000000000000	1.0000000	51	7.141428428543	3.7084298
2	1.414213562373	1.2599210	52	7.211102550928	3.7325111
3	1.732050807569	1.4422496	53	7.280109889281	3.7562858
4	2.000000000000	1.5874011	54	7.348469228350	3.7797631
5	2.236067977500	1.7099759	55	7.416198487096	3.8029525
6	2.449489742783	1.8171206	56	7.483314773548	3.8258624
7	2.645751311065	1.9129312	57	7.549834435271	3.8485011
8	2.828427124746	2.0000000	58	7.615773105864	3.8708766
9	3.000000000000	2.0800838	59	7.681145747869	3.8929965
10	3.162277660168	2.1544347	60	7.745966692415	3.9148676
11	3.316624790355	2.2239801	61	7.810249675907	3.9364972
12	3.464101615138	2.2894286	62	7.874007874012	3.9578915
13	3.605551275464	2.3513347	63	7.937253933194	3.9790571
14	3.741657386774	2.4101422	64	8.000000000000	4.0000000
15	3.872983346207	2.4662121	65	8.062257748299	4.0207256
16	4.000000000000	2.5198421	66	8.124038404636	4.0412401
17	4.123105625618	2.5712816	67	8.185352771872	4.0615480
18	4.242640687119	2.6207414	68	8.246211251235	4.0816551
19	4.358898943541	2.6684016	69	8.306623862918	4.1015661
20	4.472135955000	2.7144177	70	8.366600265341	4.1212853
21	4.582575694956	2.7589243	71	8.426149773176	4.1408178
22	4.690415759823	2.8020393	72	8.485281374239	4.1601676
23	4.795831523313	2.8438670	73	8.544003745318	4.1793390
24	4.898979485566	2.8844991	74	8.602325267043	4.1983364
25	5.000000000000	2.9240177	75	8.660254037844	4.2171633
26	5.099019513593	2.9624960	76	8.717797887081	4.2358236
27	5.196152422707	3.0000000	77	8.774964387392	4.2543210
28	5.291502622129	3.0365889	78	8.831760866328	4.2726586
29	5.385164807135	3.0723168	79	8.888194417316	4.2908404
30	5.477225575052	3.1072325	80	8.944271909999	4.3088695
31	5.567764362830	3.1413806	81	9.000000000000	4.3267487
32	5.656854249492	3.1748021	82	9.055385138137	4.3444815
33	5.744562646538	3.2075343	83	9.110433579144	4.3620707
34	5.830951894845	3.2396118	84	9.165151389912	4.3795191
35	5.916079783100	3.2710663	85	9.219544457293	4.3968296
36	6.000000000000	3.3019272	86	9.273618495496	4.4140049
37	6.082762530298	3.3322218	87	9.327379053089	4.4310476
38	6.164414002969	3.3619754	88	9.380831519647	4.4479602
39	6.244997998398	3.3912114	89	9.433981132057	4.4647451
40	6.324555320337	3.4199519	90	9.486832980505	4.4814047
41	6.403124237433	3.4482172	91	9.539392014169	4.4979414
42	6.480740698408	3.4760266	92	9.591663046625	4.5143574
43	6.557438524302	3.5033981	93	9.643650760993	4.5306549
44	6.633249580711	3.5303483	94	9.695359714833	4.5468359
45	6.708203932499	3.5568933	95	9.746794344809	4.5629026
46	6.782329983125	3.5830479	96	9.797958971133	4.5788570
47	6.855654600401	3.6088261	97	9.848857801796	4.5947009
48	6.928203230276	3.6342411	98	9.899494936612	4.6104363
49	7.000000000000	3.6593057	99	9.949874371066	4.6260650
50	7.071067811865	3.6840314	100	10.000000000000	4.6415888

5. Die Reihen für Loge oder Logarithmen und die Berechnung der Logarithmentafel.

Für die Loge oder Logarithmen sind die Reihen in der Denklehre unmittelbar aus den Sätzen für die echten Reihen abgeleitet. Hier leite ich dieselben Sätze aus den Sätzen über die Höhen der Summe ab, welche wir so eben entwickelt haben.

Satz. Es ist 54.

$$(1+a)^x = 1 + x\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots\right) + x^2 P \text{ wo } c^2 < 1 \text{ und}$$

$c = \frac{a}{1+a}$ **und P noch eine steigende Höhenreihe von x ist.**

Beweis. Es ist nach 51 unter den bezeichneten Bedingungen $(1+a)^x$

$$= 1 + xc + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} c^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot} c^3 + \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} c^4 + \cdots$$

$$= 1 + xc + \frac{x+x^2}{1\cdot 2} c^2 + x\,\frac{1\cdot 2 + \cdots}{1\cdot 2\cdot 3} c^3 + x\,\frac{1\cdot 2\cdot 3 + \cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} c^4 + \cdots$$

$$= 1 + xc + \frac{xc^2}{2} + \frac{xc^3}{3} + \frac{xc^4}{4} + \cdots + x^2 P$$

wo $x^2 P$ die Summe sämmtlicher Glieder bezeichnet, welche die zweite und höhere Höhen von x enthalten

$$= 1 + x\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^4}{4} + \cdots\right) + x^2 P.$$

Satz. Es ist, wenn $c^2 < 1$ ist, 55.

$$\log(1+a) = \log\frac{1}{1-c} = M\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^4}{4} + \cdots\right), \text{ wo}$$

$\frac{1}{M} = \frac{9}{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots$ **ist, und der Log nach der Base 10 gelogt ist.**

Beweis: Nach Satz 54 ist, wenn $c^2 < 1$ und $c = \frac{a}{1+a}$

$$(1+a)^x = 1 + x\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots\right) + x^2 P.$$

Es ist aber auch, wenn man die Loge nach der Base 10 nimmt

$$(1+a)^x = 10^{x\log(1+a)} \quad \text{(nach Zahlenlehre 373).}$$

und dies ergiebt, wenn man $a = 9$ ſetzt und statt x die Gröse $x \log(1+a)$ einführt, wobei $c = \frac{a}{1+a} = \frac{9}{10}$ alſo $c^2 < 1$ ist,

$$(1+a)^x = (1+9)^{x \log(1+a)}$$

$$= 1 + x \log(1+a)\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots\right) + x^2 Q$$

wo $x^2 Q$ die Summe der Glieder bezeichnet, welche die zweite und höhere Höhen von x enthalten.

$$= 1 + x \log(1+a) \cdot \frac{1}{M} + x^2 Q, \text{ da im Satze}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{9}{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots$$

geſetzt ist. Wir haben hier alſo für $(1+a)^x$ zwei echte steigende Höhenreihen der Baſe x, welche für jeden Wert von x, der kleiner als eins ist, einander gleich ſind, mithin müssen nach 28 auch die entsprechenden Vorzahlen von x einander gleich ſein, d. h. es ist

$$c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots = \frac{1}{M} \cdot \log(1+a)$$

Folglich ist

$$\log(1+a) = M\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots\right)$$

Es ist aber $c = \frac{a}{1+a}$ mithin $1 - c = 1 - \frac{a}{1+a} = \frac{1}{1+a}$ oder

$1 + a = \frac{1}{1-c}$ mithin ist

$$\log\frac{1}{1-c} = M\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots\right)$$

56. **Satz: Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist**

$$\log(1-x) = -M\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = -M S \frac{x^a}{a}$$

$$\log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) = M S (-1)^{a-1} \frac{x^a}{a}$$

Beweis: Nach 55 ist

$\log\frac{1}{1-x} = M\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right) = M S \frac{x^a}{a}$. Danach ist

$$\log(1-x) = -\log\frac{1}{1-x} = -M\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

Setzt man hier $-x$ statt des x, ſo erhält man

$$\log(1+x) = -M\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\cdots\right)$$
$$= M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right).$$

Satz. Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2+x}$ gesetzt ist, oder wenn 57.
$x = \frac{2z}{1-z}$ ist, $\log(1+x) = \log\frac{1+z}{1-z} = 2M\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$, wo der Log nach der Base 10 gelogt ist und M dieselbe Bedeutung wie in Satz 55 hat.

Beweis: Da $z^2 < 1$, so ist nach 55

$$\log\frac{1}{1-z} = M\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right).$$

Setzt man hier $-z$ statt z so erhält man

$$\log\frac{1}{1+z} = M\left(-z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$$ und nach Zahlenl. 372

$$\log(1+z) = -\log\frac{1}{1+z} = M\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\cdots\right).$$

Mithin ist

$$\log(1+z)+\log\frac{1}{1-z} = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2M\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right).$$

Setzen wir hier endlich $1+x = \frac{1+z}{1-z}$, so ergiebt sich $z = \frac{x}{2+x}$.

Satz. Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2-x}$ gesetzt ist 58.

$$\log(1-x) = \log\frac{1-z}{1+z} = -2M\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$$

wo der Log nach der Base 10 gelogt ist und M dieselbe Bedeutung wie in Satz 55 hat.

Beweis: Man setze in Satz 53 $-x$ statt x, dann wird $z = \frac{-x}{2-x}$ und setzt man nun $-z$ statt z, so wird $z = \frac{x}{2-x}$ und die Reihe

$$\log(1-x) = 2M\left(-z-\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}-\cdots\right)$$
$$= -2M\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right).$$

Satz. Die Loge (Logarithmen) der Base 10 heisen Zehnloge 59.

oder gemeine, briggische Loge (Logarithmen), die Gröse M ist für dieſelben

M = 0,43429 44819 03251]82765 11289 18916 60508 22943 97005 804

$$\mathbf{\frac{1}{M} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 56484\ 36420\ 76011\ 01488\ 629.}$$

Beweis: Es ist für die Loge der Baſe 10 der Log 10 = 1, mithin nach 56

$$* \quad 1 = \log 10 = \log(8+2) = \log 8\left(1+\frac{1}{4}\right) = \log 8 + \log\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$= 3 \log 2 + 2\,M\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \cdot\cdot\right] \text{ (nach 58)},$$

da, wenn wir $x = \frac{1}{4}$ ſetzen, $z = \frac{1}{9}$ wird.

Es ist aber $2^{10} = 1024 = 1000\left(1 + \frac{24}{1000}\right)$ mithin nach 58

$$10 \cdot \log 2 = 3 + \log\left(1 + \frac{24}{1000}\right), \text{ alſo } \log 2 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\log\left(1 + \frac{24}{1000}\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{2}{10}M\left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5 + \cdots\right],$$

da, wenn wir $x = \frac{24}{1000}$ ſetzen, $z = \frac{3}{253}$ wird.

Mithin, wenn wir in Formel * dieſen Wert für log 2 einführen,

$$1 = 3\left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10}M\left(\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5 + \cdot\cdot\right)\right]$$

$$+ 2M\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \cdot\cdot\right)$$

$$\frac{1}{M} = 6\left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5 + \cdot\cdot\right]$$

$$+ 20\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7 + \cdot\cdot\right]$$

Berechnet man hieraus $\frac{1}{M}$, ſo ergiebt ſich

$$\frac{1}{M} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 56484\ 36420\ 76011\ 01488\ 629$$

und indem man 1 durch dieſe Zahl teilt oder dividirt, die obige Gröse von M.

Die Zehnloge oder die gemeinen Loge (die logarithmi vulgares) **ſind zuerst** von Henry Briggs 1556 bis 1630 **aufgestellt und berechnet. Derſelbe hat** ſie für die Zahlen von 1 bis 20000 un von 90000 bis 100000 **ſämmtlich**

bis auf 14 Stellen berechnet und in der Arithmetica logarithmica 1620 heraus gegeben.

Satz. Die Berechnung der gemeinen Loge (Logarithmen) für die Primzahlen von 1 bis 100. 60.

Es ist dringend wünschenswert, dass jeder Mathematiker wenigstens eine Gruppe von Logarithmen berechnet habe, damit ihm dieselben recht anschaulich und bekannt erscheinen und er mit denselben umzugehen versteht. Ich lasse die Anleitung dazu in den folgenden Nummern folgen.

Bekanntlich ist der log (ab) = log a + log b, man kann also die Loge für alle zusammengesetzten Zahlen leicht durch Zufügung der Loge ihrer Fache oder Faktoren finden, wenn man nur die Loge der Primzahlen kennt. Wir haben also nur die Loge der Primzahlen zu berechnen. Für die Berechnung der Loge der Primzahlen haben wir dann die Formeln

$$\log(1+x) = 2\,M\left(Z + \frac{Z^3}{3} + \frac{Z^5}{5} + \frac{Z^7}{7} + \cdots\right) \text{ wo } Z = \frac{x}{2+x} \text{ und } Z^2 < 1$$

$$\log(1-x) = -2\,M\left(Z + \frac{Z^3}{3} + \frac{Z^5}{5} + \frac{Z^7}{7} + \cdots\right) \text{ wo } Z = \frac{x}{2-x} \text{ und } Z^2 < 1.$$

Um schnell abnehmende Reihen zu erhalten, sucht man hier Vielfache der Primzahlen p auf, deren Nachbarzahlen Vielfache früherer Primzahlen sind, namentlich achtet man auf p^2 und p^4 und untersucht, ob $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ und $(p^4 - 1) = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ auf frühere Primzahlen zurückführen, wobei Satz Zahlenlehre 372 zur Beachtung kommt. Es ergeben sich hieraus folgende Berechnungsweisen:

2. $2^{10} = 1024 = 1000 + 24$; mithin
$10 . \log 2 = \log(1000+24)$ d. h. $\log 2 = \frac{1}{10}[3 + \log(1 + \frac{24}{1000})]$
also $Z = \frac{3}{253}$. $\log 2 = 0{,}3010300007$.

3. $3^4 = 81 = 80 + 1$, mithin
$\log 3 = \frac{1}{4}[1 + 3\log 2 + \log(1 + \frac{1}{80})]$; $Z = \frac{1}{161}$ $\log 3 = 0{,}4771212548$.

5. $5 \cdot 2 = 10$, mithin $\log 5 = 1 - \log 2$. $\log 5 = 0{,}6989699992$.

7. $7^4 - 1 = (7-1)(7+1)(7^2+1) = 6 \cdot 8 \cdot 50 = 2400$, mithin
$\log 7 = \frac{1}{4}[\log 6 + \log 8 + \log 50 + \log(1 + \frac{1}{2400})]$; $Z = \frac{1}{4801}$
$\log 7 = 0{,}8450980$,

11. $11^2 = 121 = 120 + 1$, mithin
$\log 11 = \frac{1}{2}[1 + \log 12 + \log(1 + \frac{1}{120})]$; $Z = \frac{1}{241}$ $\log 11 = 1{,}0413927$.

13. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, mithin
$\log 13 = 3 - \log 7 - \log 11 + (\log 1 + \frac{1}{1000})$; $Z = \frac{1}{2001}$
$\log 13 = 1{,}1139434$.

17. $9 \cdot 17 \cdot 17 = 2601$, mithin
$\log 17 = \frac{1}{2}[2 + \log 26 - \log 9 + \log(1 + \frac{1}{2600})]$; $Z = \frac{1}{5201}$
$\log 17 = 1{,}2304489$.

19. $9 \cdot 19 \cdot 19 = 3249$ und $3250 = 50 \cdot 5 \cdot 13 = 1000 \cdot 13 : 4$
$\log 19 = \frac{1}{2}[3 + \log 13 - \log 4 - \log 9 + \log(1 - \frac{1}{3250})]$; $Z = \frac{1}{6499}$
$\log 19 = 1{,}2787536$.

23. $13 \cdot 23 = 299$; mithin
$\log 23 = 2 + \log 3 - \log 13 + \log(1 - \frac{1}{300})$; $Z = \frac{1}{599}$
$\log 23 = 1{,}3617278$.

29. $19 \cdot 29 = 551$; mithin
$\log 29 = 2 + \log 11 - \log 30 + \log (1 + {}^1/_{550})$; $Z = {}^1/_{1101}$.
$\log 29 = 1{,}4623980$.

31. $31 \cdot 31 = 961$; mithin
$\log 31 = {}^1/_2\, [1 + \log 16 + \log 6 + \log (1 + {}^1/_{960})]$; $Z = {}^1/_{1921}$
$\log 31 = 1{,}4913617$.

37. $27 \cdot 37 = 999$; mithin $\log 37 = 3 - \log 27 + \log (1 - {}^1/_{1000})$; $Z = {}^1/_{1999}$
$\log 37 = 1{,}5682017$.

41. $41 \cdot 41 = 1681$ und $1682 = 2 \cdot 29 \cdot 29$; mithin
$\log 41 = {}^1/_2\, [2 \log 29 + \log 2 + \log (1 - {}^1/_{1682})]$; $Z = {}^1/_{3363}$
$\log 41 = 1{,}6127839$.

43. $43^4 = 3418801$ und $3418800 = 100 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$; mithin $\log 43 =$
${}^1/_4\, [2 + \log 12 + \log 7 + \log 11 + \log 37 + \log (1 + {}^1/_{3418800})]$; $Z = {}^1/_{6837601}$
$\log 43 = 1{,}6334685$.

47. $47^4 = 4879681$ und $4879680 = 10 \cdot 32 \cdot 39 \cdot 17 \cdot 23$; mithin $\log 47 =$
${}^1/_4 [1 + \log 32 + \log 39 + \log 17 + \log 23 + \log (1 + {}_1/_{4879680})]$; $Z = {}^1/_{9759361}$
$\log 47 = 1{,}6720979$.

53. $53 \cdot 27 = 1431$ und $1430 = 10 \cdot 11 \cdot 13$; mithin
$\log 53 = 1 + \log 11 + \log 13 - \log 27 + \log (1 + {}^1/_{1430})$; $Z = {}^1/_{2861}$
$\log.\ 53 = 1{,}7242759$.

59. $59^2 = 3481$ und $3480 = 10 \cdot 12 \cdot 29$; mithin
$\log 59 = {}^1/_2\, [1 + \log 12 + \log 29 + \log (1 + {}^1/_{3480})]$; $Z = {}^1/_{6961}$
$\log 59 = 1{,}7708520$.

61. $61^2 = 3721$ und $3720 = 10 \cdot 12 \cdot 31$; mithin
$\log 61 = {}^1/_2\, [1 + \log 12 + \log 31 + \log (1 + {}^1/_{3720})]$; $Z = {}^1/_{7441}$
$\log 61 = 1{,}7853298$

67. $67 \cdot 37 = 2479$ und $9480 = 10 \cdot 8 \cdot 31$; mithin
$\log 67 = 1 + \log 8 + \log 31 - \log 37 + \log (1 - {}^1/_{2480})$; $Z = {}^1/_{4959}$
$\log 67 = 1{,}8260748$.

71. $71 \cdot 81 = 5751$ und $5750 = 1000 \cdot 23 \cdot {}^1/_4$; mithin
$\log 71 = 3 + \log 23 - \log 4 - \log 81 + \log (1 + {}^1/_{5750})$; $Z = {}^1/_{11501}$
$\log 71 = 1{,}8512583$.

73. $73^4 = 28398241$ und $28398240 = 10 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 41$, mithin $\log 73 =$
${}^1/_4 [1 + \log 16 + \log 9 + \log 13 + \log 37 + \log 41 + \log (1 + {}^1/_{28398240})]$; $Z = {}^1/_{567964481}$
$\log 73 = 1{,}8633229$.

79. $99 \cdot 79 = 7821$ und $7820 = 10 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 23$; mithin
$\log 79 = 1 + \log 34 + \log 23 - \log 99 + \log (1 + {}^1/_{7820})$; $Z = {}^1/_{15641}$
$\log 79 = 1{,}8976271$.

83. $27 \cdot 83 = 2241$ und $2240 = 10 \cdot 32 \cdot 7$; mithin
$\log 83 = 1 + \log 32 + \log 7 - \log 27 + \log (1 + {}^1/_{2240})$; $Z = {}^1/_{4481}$
$\log 83 = 1{,}9190781$.

89. $31 \cdot 89 = 2759$ und $2760 = 10 \cdot 12 \cdot 23$; mithin
$\log 89 = 1 + \log 12 + \log 23 - \log 31 + \log (1 - {}^1/_{2760})$; $Z = {}^1/_{5519}$
$\log 89 = 1{,}9493900$.

97. $47 \cdot 97 = 4559$ und $4560 = 10 \cdot 24 \cdot 19$; mithin
$\log 97 = 1 + \log 24 + \log 19 - \log 47 + \log (1 - {}^1/_{4560})$; $Z = {}^1/_{9119}$
$\log 97 = 1{,}9867717$.

Satz. Wenn mehre Zahlen in gleichem Verhältnisse zu einander stehen, so sind auch die Unterschiede ihrer Loge oder Logarithmen einander gleich, und je mehr sich zwei Verhältnisse einander nähern, um so mehr nähern sich auch die Unterschiede der entsprechenden Loge. 61.

Beweis: 1. Seien die Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ so ist nach Zahlenlehre 315 auch $\log\frac{b}{a} = \log\frac{d}{c} = \log\frac{f}{e}$ d. h. es ist nach Zahlenlehre 356 $\log b - \log a = \log d - \log c = \log f - \log e$.

2. Seien die Verhältnisse $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}$ nahe einander gleich, so sind auch die Unterschiede der entsprechenden Loge nahe einander gleich. So sind die Verhältnisse $\frac{a+1}{a}, \frac{a+2}{a+1}, \frac{a+3}{a+2}$, wenn a eine recht grose Zahl ist, nahe einander gleich und zwar verhalten sich

$$\frac{a+1}{a} : \frac{a+2}{a+1} = (a^2 + 2a) + 1 : (a^2 + 2a) \text{ und}$$

$$\frac{a+2}{a+1} : \frac{a+3}{a+2} = (a^2 + 4a + 3) + 1 : (a^2 + 4a + 3).$$

Beispiele: Zu 1. Es ist $\frac{1001}{1000} = \frac{2002}{2000} = \frac{3003}{3000} = \cdots = \frac{9009}{9000}$ u. ist demnach auch $\log 1001 - \log 1000 = \log 2002 - \log 2000 = \log 3003 - \log 3000 = \log 9009 - \log 9000 = 0{,}0004341$.

Zu 2. Es verhalten sich $\frac{1001}{1000} : \frac{1002}{1001} = 1002001 : 1002000$, mithin ist

$$(\log 1001 - \log 1000) - (\log 1002 - \log 1001) = \log 1002001 - \log 1002000$$
oder
$$2 \log 1001 - (\log 1000 + \log 1002) = \log 1002001 - \log 1002000 = 6{,}00086815 - 6{,}00086772 = 0{,}00000043.$$

Es ergiebt sich daraus, dass man den Log einer Zahl über 1000 leicht dadurch gewinnen kann, dass man die Mitte nimmt zwischen dem Loge der nächst höhern und der nächst niedern Zahl. Bei 7stelligen Logen muss man dann auf der letzten Stelle eine kleine Zahl hinzufügen und zwar bei den Zahlen von 1000 bis 1150 2, bei 1150 bis 1350 $1^3/_4$, bei 1350 bis 1600 $1^1/_2$, bei 1600 bis 2000 $1^1/_4$, von 2000 bis 2500 1, bei 2500 bis 3500 $^3/_4$, bei 3500 bis 6000 $^1/_2$, bei 6000 bis 10000 $^1/_4$.

Satz. Die Berechnung der Zehntloge (gemeinen Logarithmen) für die Primzahlen von 100 bis 1000. 62.

Um die gemeinen Loge (Logarithmen der Primzahlen von 100 bis 1000 zu berechnen, suche man für jede dieser Primzahlen ein Vielfaches auf, das

zwischen 1000 und 10000 am liebsten zwischen 6000 und 10000 und zugleich zwischen zwei Vielfachen kleinerer Primzahlen liegt, berechne die Loge für die beiden letzteren, nehme die Hälfte ihrer Summe, man erhält dadurch den Log für das Vielfache der gesuchten Primzahl und zieht von diesem Loge des Vielfachen, den Log der Zahl ab, mit welcher die Primzahl vervielfacht war. Die Richtigkeit des Ergebnisses folgt unmittelbar aus 60. Um für jede Zahl zu finden, welche Fache oder Faktoren sie enthalten, dazu bietet die Tafel der Primzahlen und der nicht durch 2, 3 und 5 teilbaren Zahlen Zahlenlehre 228 eine ausgezeichnete Hülfe.

Einige Beispiele werden den Weg klar machen. Es ist

101. 97 = 9797 und es ist 9796 = 4·31·79, 9798 = 6·23·71

log 101 = ½ [log (4·31·79) + log (6·23·71)] — log 97

103. 88 = 9064 und es ist 9063 = 9·19·53, 9065 = 5·39·49

log 103 = ½ [log (9·19·53) + log (5·39·49)] — log 88.

Zur bequemern Ueberficht lasse ich die betreffenden Vielfachen der Primzahlen in einer Tafel folgen.

Vielfache der Primzahlen, welche zur Berechnung der Primzahlen zwischen 100 und 1000 dienen.

Die halbfetten Zahlen bezeichnen die Vielfachen in deren beiden Nachbarzahlen nur Primzahlen unter 100 als Fache oder Faktoren vorkommen.

101 **1313**.**1616**.2020.**2323**.**2626**.**2727**.**3535**.**6060**.**6161**.**6969**.**7474**.
8585.**9797**.

103 **1648**.**1751**.**2276**.**2369**.**2575**.**3914**.**4429**.5253.**6901**.**7313**.**9064**.

107 **1177**.1819.**1926**.2782.**3103**.**3959**.**4601**.**4815**.**6955**.**7811**.8988.

109 **2071**.**3161**.5777.5886.**6649**.**7739**.**8175**.9374.**9701**.**9919**.

113 **1695**.**1921**.2034.3051.3503.**4181**.4746.**5311**.**5424**.8023.

127 1016.**1651**.**2159**.**2413**.**2667**.**2794**.4445.**6096**.**6350**.8382.9271.

131 **1179**.**1310**.1441.**1703**.**2751**.**2882**.**3537**.**4454**.**4716**.**6943**.**7991**.

137 **1644**.**1781**.1918.**3699**.4521.4795.**5617**.**6439**.**7809**.**8905**.**9316**.

139 1112.1807.**2224**.**3197**.**3336**.**4031**.5560.**5699**.**5977** **6255**.**6533**.
9591.

149 **1341**.**1639**.**1937**.3278.**3576**.**3725**.**3874**.4172.**6556**.7599.7748.
9089.**9983**.

151 **1057**.**1208**.1359.**3775**.4379.4983.**5134**.5587.**5889**.7399.8909.
9513.

157 **1099**.2355.**2669**.3297.**3611**.3925.**5809**.**7379**.**8321**.

163 **1793**.1956.**4401**.**4564**.5216.**6031**.9454.

167 **1002**.**1169**.**2839**.3173.3841.**4509**.**5511**.6847.7849.

173 1211.3287.4325.4844.5536.**6401**.8304.8477.**9515**.

179 **1074**.**1611**.2506.**2685**.**3401**.3938.**4117**.5191.5370.**5549**.**6623**.
9129.

181 1629.2172.2353.2534.**2715**.**3620**.4344.**4525**.**5249**.**5611**.9593.9955.

191 1910.**2483**.2674.**4393**.**5539**.**5921**.**6876**.**7258**.7449.**7831**.**8977**.

193 **1158**.**1351**.**1737**.**2509**.**2702**.3474.3667.**3860**.4246.4825.**6176**.
8685.9264.9873.

197 **1379**.1970.2364.**2561**.**3349**.4531.6304.6698.7683.**8865**.**9062**.
9456.

199 1393.1592.1791.1990.3383.3781.4577.6766.8756.9751.
211 1055.1266.1899.2321.3587.4431.5697.6119.7596.8651.
223 1338.1561.2899.3568.6467.9589.
227 1135.1816.2951.3405.4086.6356.8399.9307.
229 1145.2290.3883.4351.6641.7099.8931.
233 1165.1631.2330.5359.6291.7223.7922.8854.9087.
239 1195.1673.2868.3585.5975.6214.7170.7409.8126.8365.9321.
9799.
241 1205.2651.3615.4579.5543.7953.9399.9881.
251 1004.1255.1506.2008.2510.3263.4016.4267.4769.6526.8283.8785.
257 1028.1799.2956.2313.2827.3508.3855.4369.6425.6682.
263 1315.2367.4471.6049.6575.7101.
269 2421.2959.3497.4842.5111.6725.7801.
271 1084.1897.2168.2981.4065.4607.5149.8672.8943.9214.
277 1385.1939.2493.2770.
281 1405.2248.2529.3653.4215.5339.5901.8149.8711.8992.9554.
283 1132.1415.2264.2547.2830.3396.7075.8773.
293 1464.2051.2344.3223.3809.4395.4981.5567.7911.8790.
307 1535.1842.2149.3070.3684.6447.9824.
311 1244.2177.3421.4976.5909.7153.7775.9019.9952.
313 1252.1565.2191.3130.4069.5634.6573.6886.7199.7825.
317 1268.1585.2536.3487.4121.4438.8876.9827.
331 1324.2317.3972.4303.4634.4965.5627.5958.6289.6951.7613.7944.
337 1011.2022.2359.2696.3707.4718.5055.5729.6740.7751.
347 1735.3123.3817.4164.4511.6593.7981.9716.
349 1396.1745.2443.3839.4188.9074.
353 1059.1412.2118.2471.3530.4236.4589.7060.7413.8119.8472.9178.
359 1077.2872.3231.3590.3949.4308.6103.6462.
367 1101.1468.1835.2569.3303.6973.8074.8441.9175.
373 1865.2984.3730.4103.4476.4849.5968.6341.6714.
379 1119.1516.7201.7580.7959.9854.
383 1149.2681.4213.4979.5745.6511.6894.7660.8426.9192.
389 1167.1556.1945.3112.3501.4279.4668.5057.6224.8558.
397 1191.1588.1985.3176.3970.4367.5161.6749.
401 1604.2005.2406.2807.3609.4010.6105.7619.
409 2045.2863.3681.4499.5726.6953.7362.7771.
419 1257.1676.2095.3771.4190.5447.8380.8799.9637.
421 1684.2105.2526.5473.5894.7999.9262.9683.
431 1293.2155.2586.3879.6465.6896.8189.8620.9051.
433 1299.2598.3031.4330.6062.6495.9959.
439 1756.3073.3951.4829.7463.8341.
443 1329.1772.2215.3101.4430.6645.7088.7531.7974.8417.
449 4041.6735.7633.9878.
457 1371.1828.3199.3656.4113.5027.8226.9140.
461 1844.4149.4610.5071.5993.8759.9681
463 1389.2315.3704.4630.5093.6019.6945.7472.9260.

467 2335.3269.3736.4670.5137.5604.7005.7939.
479 1916.2874.3353.4311.5269.6227.6706.7664.9101.9580.
487 1461.2922.3409.3896.4383.5357.7305.
491 1473.1954.2455.2946.4419.5401.5892.6874.7365.9329.
499 1497.2495.3992.5489.6986.9481.
503 1006.2515.4024.4527.5030.7545.
509 1527.2036.2545.3054.3563.4581.5599.6108.6539.7635.8144.
521 1042.1563.3126.4168.4689.6252.8857.9899.
523 1046.1569.2092.4184.4707.6799.8891
541 1082.1623.2164.2705.3246.5951.9197.
547 2188.3829.6017.7111.7658.8205.9846.
557 1114.1671.2785.5013.6684.7241.
563 1126.1689.2815.3378.3941.4504.5067.6193.675C
569 1138.3983.4552.5121.6259.7397.7966.8535.
571 1142.3426.5139.6281.6852.
577 1731.2885.4616.5193.6347.6924.7501.
587 1174.2935.3522.4109.5696.7631.8805.
593 1779.4151.4744.5337.7709.
599 1188.1787.2396.2995.4193.5391.7787.9584.
601 1202.1803.2404.4808.5409.8414.9616.
607 4249.6070.9105.
613 1226.2452.3065.4291.5517.9808.
617 1234.1851.4319.6170.8021
619 3095.4333.5571.6809.8047.
631 1262.2524.3155.4417.5048.5679.6941.8834.
641 1923.2564.3205.5769.7051.
643 1286.1929.3858.5144.7073.8359.
647 4529.5176.5823.
653 1959.2612.3265.4571.7183.9142.9795.
659 1977.2636.3295.3954.6590.7249.
661 3305.4627.5288.9254.
673 1346.3365.4048.4711.8076.8749.
677 1354.2031.4062.4739.7447.8801.
683 2049.3415.6147.7513.8879.
691 2073.2764.3455.4837.7601.9674.
701 1402.4206.4907.5608.6309.7010.7711.8412.9113.
709 1418.3545.5672.7799.8508.9217.9926.
719 2157.2876.3595.5752.7190.7909.
727 3635.5089.8724.9451.
733 1466.2199.3665.5864.8063.
739 1478.5173.5912.8129.
743 2229.5201.5944.8173.9659.
751 1502.2253.3004.5257.6759.8261.
757 1514.2271.3785.4542.6056.7570.8327.9094.9841.
761 2283.3044.3805.6849.8371.
769 1568.3076.3845.4614.5383.

773 1546.2319.5411.6967.
787 1574.3935.5509.7870.8657.
797 1594.2391.7173.8767.
809 3226.4045.5663.7281.9708.
811 3244.4866.5677.6488.7299.
821 1642.4926.5747.
823 1646.2469.4115.5761.6584.7407.9876.
827 1654.2481.4135.4962.6616.
829 2487.3316.4145.6632.7461.9119.
839 1678.3356.5034.5873.7551.9229.
853 1706.4265.7677.
857 1714.2571.3428.5142.7713.
859 1718.3436.4295.6013.8590.
863 1726.2589.4315.6041.9493.
877 2631.3508.4385.6139.8770.9647.
881 1762.3524.5286.7048.8810.
883 1766.2649.6181.
887 1774.2661.6209.7096.7983.9757.
907 1814.3628.6409.8163.
911 4555.7288.
919 1838.2757.8271.
929 1858.2787.3716.4645.8361.
937 2811.
941 1882.2823.3764.4705.6587.8469.
947 1894.2841.3788.4735.9470.
953 1906.3812.6671.7624.9530.
967 6769.8703.9670.
971 1942.2913.3884.4855.7768.8739.9710.
977 1954.2931.4885.6839.
983 1966.2949.6881.
991 1982.5946.8919.9910.
997 2991.4985.

Bemerkt möge noch werden, dass bei diesen Berechnungen die letzte Stelle einen Fehler enthalten kann. Man muss daher bei dieser Methode eine Stelle mehr berechnen, als der gesuchte Log enthalten soll. Das gilt aber ebenso auch, wenn man aus den Logen der Primzahlen die ihrer Vielfachen berechnen will.

Satz. Die Berechnung der Tafel der Zehntloge oder gemeinen Logarithmen für fünf Stellen von 1 bis 10000. 63.

Man berechnet von den Primzahlen von 1 bis 1000 die Vielfachen von 1 bis 10000. Es bleiben dann noch die Primzahlen von 1000 bis 10000 übrig und deren etwaige Vielfache. Jede solche Primzahl ist eine ungerade Zahl und liegt also zwischen den Vielfachen niederer Primzahlen; ihr Log ist demnach das Mittel aus den Logen der Nachbarzahlen und kann daraus unmittelbar berechnet werden.

Es ist dringend zu wünschen, dass jeder, der mit Logen rechnen will, wenigstens eine Gruppe von 100 bis 1000 Logen in dieser Weise berechne. Die

Tafel der Primzahlen und der nicht durch 2, 3 und 5 teilbaren Zahlen in Zahlenlehre 228 bietet hiezu eine ausgezeichnete Hülfe.

64. **Erklärung. Die Loge (Logarithmen) für welche $M = 1$ gefetzt wird, heisen die Eloge oder die Neperschen, die natürlichen Logarithmen, ihre Bafe heist e, das Zeichen derfelben ist l_e.**

Die natürlichen Loge (die logarithmi naturales) find zuerst von John Napier (Baron von Merchistown) 1550—1617 aufgestellt, berechnet und in Mirifici logarithmorum canonis descriptio Edinburg 1614 veröffentlicht. Nach ihm heisen die Loge Nepersche.

65. **Satz. Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2 \pm x}$ ist,**

$$l_e (1 \pm x) = \pm 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right)$$

und ist $M = \text{log vulg. } e \cdot \quad \frac{1}{M} = l_e (10)$

$$e = 2{,}71828\,1828459.$$

Beweis: Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2 \pm x}$ ist,

$$\log (1 \pm x) = \pm 2M \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \text{ (nach 56 und 57).}$$

Nach 64 foll aber für l_e oder für den Neperschen Log $M = 1$ gefetzt fein, alfo ist nach diefer Erklärung

$$l_e (1 \pm x) = \pm 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right).$$

Mithin ist log. vulg. a = M. log. nat. a oder

$$\frac{a}{10} = M \cdot \frac{a}{e} = \frac{a}{e} \cdot \frac{e}{10} \qquad \text{(nach Zahlenlehre 360)}$$

alfo ist $M = \log \frac{e}{10} = \text{log. vulg. } e$ (nach Zahlenlehre 164).

Andrerfeits folgt aus den Formeln

$$\text{log. nat. } a = \frac{1}{M} \cdot \text{log. vulg. } a \qquad \text{oder}$$

$$\frac{a}{e} = \frac{1}{M} \cdot \frac{a}{10} = \frac{a}{10} \cdot \frac{10}{e}$$

alfo ist $\frac{1}{M} = \frac{10}{e} = \text{log. nat. } 10.$

Aus $M = \text{log. vulg. } e = 0{,}4342944819$ ergiebt fich dann, wenn man zu diefem Loge die entsprechende Zahl fucht $e = 2{,}7182818285$.

66. **Satz. Es ist der nepersche Log (Logarithmus) gleich dem gemeinen Log mal $\frac{1}{M}$ und ist der gemeine Log (Logarithmus) gleich dem Neperschen mal M.**

Beweis: Unmittelbar nach dem Beweiſe zu 64.

Um die Umwandlung der Loge leicht vornehmen zu können, nimmt man die Vielfachen von M und $\frac{1}{M}$.

Vielfache von $\frac{1}{M}$ oder für die Ziffer des gemeinen Logs wird die nachstehende Zahl geſetzt:

Ziffer des gemeinen Logs.	Entsprechender Wert des neperschen Log.							
	Vor dem Komma.	Dezimalstelle. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
							0,000	0,000
9	20,7232658	2,0723266	0,2072327	0,0207233	0,0020723	0,0002072	0207	0021
8	18,4206807	1,8420681	0,1842068	184207	18421	1842	184	18
7	16,1180957	1,6118096	0,1611810	161181	16118	1612	161	16
6	13,8155106	1,3815511	0,1381551	138155	13816	1382	138	14
5	11,5129255	1,1512925	0,1151293	115129	11513	1151	115	12
4	9,2103404	0,9210340	0,0921034	92103	9210	921	92	9
3	6,9077553	0,6907755	0,0690776	69078	6908	691	69	7
2	4,6051702	0,4605170	0,0460517	46052	4605	461	46	5
1	2,3025851	0,2302585	0,0230259	23026	2303	230	23	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vielfache von M oder für die Ziffer des neperschen Logs wird die nachstehende Zahl geſetzt.

Ziffer des neperschen Logs.	Entsprechender Wert des gemeinen Logs							
	Vor dem Komma.	Dezimalstelle. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
							0,000	0,000
9	3,9086503	0,3908650	0,0390865	0,0039087	0,0003909	0,0000391	0039	0004
8	3,4743559	0,3474356	347436	34744	3474	347	35	3
7	3,0400614	0,3040061	304006	30401	3040	304	30	3
6	2,6057669	0,2605767	260577	26058	2606	261	26	3
5	2,1714724	0,2171472	217147	21715	2171	217	22	2
4	1,7371779	0,1737178	173718	17372	1737	174	17	2
3	1,3028834	0,1302883	130288	13029	1303	130	13	1
2	0,8685890	0,0868589	86859	8686	869	87	9	1
1	0,4342945	0,0434294	43429	4343	434	43	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

67. **Satz. Berechnung des e durch Reihen.**

Es ist $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = S\,\frac{1}{\mathfrak{a}!}$

e = 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 4712.

Beweis: Man ſetze, ſoweit die Reihe echt bleibt,

$$a^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

und benutze nun die Eigenschaft der Höhen, dass $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ist. Hier entwickle man a^{x+y} und a^y nach steigenden Höhen von y, dann ist

$a_0 + a_1 (x+y) + a_2 (x+y)^2 + \cdots = a^x (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots)$ alſo

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) + y(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) + y^2 P$

$= a_0 a^x + a_1 a^x y + y^2 Q$

wo $y^2 P$ und $y^2 Q$ die Summe der Glieder bezeichnen, welche die zweite und die höheren Höhen von y enthalten.

Hier müssen nach 28 die Vorzahlen von y einander gleich ſein, da die Gleichung für jeden Wert des y von Null bis zu einer Gröse c gelten ſoll, alſo ist

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = a_1 a^x.$$

Hier werden wir a^x in eine Reihe entwickeln, dann ist

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$
$$= a_1 a_0 + a_1 a_1 x + a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^3 + \cdots$$

Hier müssen wieder nach 28 die entsprechenden Vorzahlen für die gleichen Höhen von x einander gleich ſein, dies ergiebt

$a_1 = a_1 a_0$ d. h. $a_0 = 1$

$2a_2 = a_1 a_1$ d. h. $a_2 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{a_1^2}{2!}$

$3a_3 = a_1 a_2$ d. h. $a_3 = \frac{a_1 a_2}{3} = \frac{a_1^3}{3!}$

$4a_4 = a_1 a_3$ d. h. $a_4 = \frac{a_1 a_3}{4} = \frac{a_1^4}{4!}$ u. ſ. w.

Führt man dieſe Werte in die Reihe ein, ſo erhält man

$$a^x = 1 + \frac{(a_1 x)^1}{1!} + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \frac{(a_1 x)^3}{3!} + \cdots = S\,\frac{(a_1 x)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}$$

Hier ist a_1 abhängig von a, ſetzt man $a_1 = 1$, wenn $a = e$ ist, ſo erhält man

$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = S\,\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}$ und ſetzt man hier $x = 1$, für welchen Wert die Reihe noch echt bleibt, ſo erhält man

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = S\,\frac{1}{\mathfrak{a}!}$$
$$= 2{,}7182818284590452353602874713526624977572 4712.$$

Man ſieht hier leicht, dass dies dieſelbe Gröse e ist, welche wir oben entwickelt haben.

Es ist dann $a = e^{l_e a}$ mithin $a^x = e^{(l_e a \cdot x)} = \mathfrak{S} \frac{(l_e a \cdot x)^a}{a!}$

6. Die Reihen für die Winkelfolgen und Bogen und die Berechnung der trigonometrischen Logarithmentafeln.

Nachdem es uns gelungen ist, die Loge oder Logarithmen in Reihen zu entwickeln und ihre Tafeln zu berechnen, verſuchen wir nun auch ein Gleiches bei den Winkelfolgen oder trigonometrischen Funktionen.

Satz. Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist 68.

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$\tan x = x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots$$

Beweis. Die Funktionen $\sin x$ und $\tan x$ ſind einwertig und steigen nach Zahlenlehre 459 und 474 stetig mit dem Winkel von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, mithin da $x^2 < 1$ ist, für alle Werte von x, mithin kann man jede dieſer Funktionen nach 29 einer unendlichen steigenden Höhenreihe von x gleichſetzen. Es ſei demnach

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$\tan x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Beide Funktionen werden aber für $x = 0$ gleichfalls Null, nach Zahlenl. 449 und 473, alſo folgt $a_0 = 0$ und $c_0 = 0$. Die beiden Formeln werden demnach

$$\sin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$\tan x = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

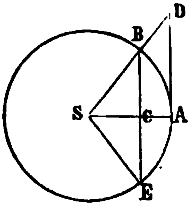
Es ist aber nach Zahlenl. 444 $\sin(-x) = -\sin x$ und nach Zahlenl. 468 $\tan(-x) = -\tan x$, mithin wenn wir für beide Seiten die Reihen einführen,

$$\sin(-x) = -a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots$$
$$= -\sin x = -a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \cdots$$
$$\tan(-x) = -c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \cdots$$
$$= -\tan x = -c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3 - \cdots$$

Hier ſind nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen gleich, alſo ist $+a_2 = -a_2$, $+a_4 + -a_4$, $+a_6 = -a_6$ und ebenſo

$$+c_2 = -c_2, \; +c_4 = -c_4, \; +c_6 = -c_6$$

d. h. es ſind die Vorzahlen der Höhen mit gerader Stufe a_2, c_2, a_4, $c_4 \cdot \cdot$ Null, die Reihen werden demnach



$$\sin x = a_1 \; x + a_3 \; x^3 + \cdot \cdot$$
$$\tan x = c_1 \; x + c_3 \; x^3 + \cdot \cdot$$

Für ſehr kleines x kann man hier die höhern Höhen von x unberückſichtigt lassen, und hat demnach $\sin x = a_1 x$ und $\tan x = c_1 x$. Es ist aber, wenn r den Halbmesser des Kreiſes bezeichnet, $\sin x = \frac{BC}{r}$, $\tan x = \frac{DA}{r}$ und $\text{arc}\, x = \frac{BA}{r}$ und zwar ist $DA > BA$ und $BA > BC$. Je kleiner nun x wird, um ſo näher rücken BC und DA an einander und fallen, wenn $x = 0$ wird, ganz in einander, d. h. es wird dann $\sin x = \tan x = x$, daraus folgt $a_1 = 1$ und $c_1 = 1$, mithin ist

$$\sin x = x + a_3 \; x^3 + a_5 \; x^5 + \cdot \cdot$$
$$\tan x = x + c_3 \; x^3 + c_5 \; x^5 + \cdot \cdot \cdot$$

69. **Satz.** **Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist,**

$$\cos x = 1 + a_2 \; x^2 + a_4 \; x^4 + \cdot \cdot \cdot$$

Beweis: Die Funktion cos x ist einwertig und steigt nach Zahlenl. 459 stetig mit x von $x = -\pi$ bis 0 und fällt nach Zahlenl. 459 ebenſo stetig mit x von 0 bis $+\pi$, man kann mithin jene Funktion nach 29 einer unendlichen steigenden Höhenreihe von x gleichſetzen. Es ſei alſo $\cos x = a_0 + a_1 \; x + a_2 x^2 + \cdot \cdot \cdot$

Für $x = 0$ wird $\cos x = 1$ nach Zahlenl. 449, alſo folgt $a_0 = 1$, und

$$\cos x = 1 + a_1 \; x + a_2 \; x^2 + \cdot \cdot \cdot$$

Es ist aber nach Zahlenl. 444 auch $\cos -x = \cos x$ mithin, wenn wir für beide Seiten die Reihen einführen.

$$1 - a_1 \; x + a_2 \; x^2 - a_3 \; x^3 + a_4 \; x^4 - \cdot \cdot = 1 + a_1 \; x + a_2 \; x^2 + a_3 \; x^3 + a_4 x^4 + \cdot \cdot$$

Es müssen nun nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen gleich ſein, daraus folgt a_1, a_3, $a_5 \cdot \cdot = 0$ und es bleibt alſo

$$\cos x = 1 + a_2 \; x^2 + a_4 \; x^4 + \cdot \cdot \cdot$$

70. **Satz.** **Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist,**

$$\text{arc}\,(\tan = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdot \cdot = \mathfrak{S}\,(-1)^a \frac{x^{2a+1}}{2a+1}$$

Beweis: Da der Bogen $\text{arc}\,(\tan = x)$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird (Zahlenl. 490) und zwischen dieſen Grenzen nach Zahlenl. 474 einwertig ist und stetig zunimmt, wenn x wächst,

auch $x^2 < 1$ ist, ſo kann man die Funktion arc (tan = x) nach 29 einer unendlichen steigenden Höhenreihe von x gleichſetzen. Es ſei demnach

$$\text{arc}(\tan = x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ geſetzt.}$$

Da nun arc (tan = x) = 0, wenn x = 0 nach Zahlenl. 473, ſo folgt $a_0 = 0$ und wird $\text{arc}(\tan = x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Tangenten, ſo erhalten wir auf der ersten Seite x und auf der andern Seite $\tan(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$, alſo

$$x = \tan(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

Nach 68 ist aber $\tan z = z + c_3 z^3 + \cdots$
mithin ist die Reihe für $\tan(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = a_1 x + x^2 P$, wo $x^2 P$ die zweiten und alle höhern Höhen von x enthält.
Man hat alſo $x = a_1 x + x^2 P$.
Da nun nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x gleich ſein müssen, ſo folgt $x = a_1 x$ d. h. $a_1 = 1$ d. h.

$$\text{arc}(\tan = x) = x + a_2 x^2 + \cdots \qquad *$$

Betrachten wir nun arc (tan = x + y) und ſei a = arc (tan = x) und b = arc (tan = x + y) geſetzt, dann ist alſo x = tan a und x + y = tan b. Sei nun arc (tan = x + y) = arc (tan = x) + z geſetzt, ſo ist b = a + z mithin z = b — a alſo

$$\tan z = \tan(b - a) = \frac{\tan b - \tan a}{1 + \tan b \cdot \tan a} = \frac{x + y - x}{1 + (x + y)x}$$

$$= \frac{y}{1 + x^2 + xy} \text{ mithin } z = \text{arc}\left(\tan = \frac{y}{1 + x^2 + xy}\right)$$

Es wird demnach

$$\text{arc}(\tan = x + y) = \text{arc}(\tan = x) + \text{arc}\left(\tan = \frac{y}{1 + x^2 + xy}\right) \qquad **$$

Setzen wir in dieſe Formel die Reihe * für arc tan ein, ſo folgt

$$x + y + a_2 (x + y)^2 + a_3 (x + y)^3 + \cdots =$$
$$\text{arc}(\tan = x) + \frac{y}{1 + x^2 + xy} + \cdots$$

und wenn man hier nach den Höhen von y entwickelt

$$x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + y(1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) + \cdots$$
$$= \text{arc}(\tan = x) + \frac{y}{1 + x^2} + \cdots$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von y gleich ſein müssen, ſo folgt

$$1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Da nun hier wieder nach 28 die Vorzahlen entsprechender Höhen von x gleich ſein müssen, ſo folgt, da auf der rechten Seite die Vorzahlen der Höhen mit ungeraden Stufen Null ſind,

$$2a_2 = 0 \quad 4a_4 = 0 \quad 6a_6 = 0 \text{ u. ſ. w., d. h.}$$

$$a_2,\ a_4,\ a_6 \cdot \cdot$$

gleich Null und ferner

$$3a_3 = -1,\ 5a_5 = +1,\ 7a_7 = -1 \text{ u. ſ. w.} \qquad \text{alſo}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} \quad a_5 = +\frac{1}{5}, \quad a_7 = -\frac{1}{7} \text{ u. ſ. w.}$$

mithin, wenn man dieſe Werte in * einführt

$$\operatorname{arc}(\tan = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \mathfrak{S}\overline{(-1)^a \frac{x^{2a+1}}{2a+1}}$$

und dieſe Reihe ist nach 23 echt, wenn $x^2 < 1$ ist, was vorausgeſetzt war.

Wenn man die Formel für arc (tan = x) mit der Formel für Loge Satz 57 vergleicht, ſo bemerkt man leicht die nahe Verwandtschaft, denn es ist

$$\operatorname{arc}(\tan = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\,M\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots)$$

Setzt man hier in letzter Formel xi statt x, ſo wird die Formel

$$\log \frac{1+xi}{1-xi} = 2\,M\,(ix + \frac{i^3x^3}{3} + \frac{i^5x^5}{5} + \frac{i^7x^7}{7} + \cdots)$$

$$= 2\,Mi\,(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots) = 2\,Mi \cdot \operatorname{arc}(\tan = x)$$

$$\text{alſo } \operatorname{arc}(\tan = x) = \frac{1}{2\,Mi} \log \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{1}{2i}\ \mathrm{l_e} \frac{1+xi}{1-xi}$$

Setzt man in arc (tan = x) das xi statt x, ſo erhält man

$$\operatorname{arc}(\tan = xi) = ix - \frac{i^3x^3}{3} + \frac{i^5x^5}{5} - \frac{i^7x^7}{7} + \cdot\cdot$$

$$= i\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdot\cdot) = \frac{i}{2\,M} \log \frac{1+x}{1-x}$$

71. **Satz. Berechnung des Kreisumfanges von 2π. Es ist der Kreisumfang 2π gleich 360 Grade, jeder zu 60 Minuten, jede zu 60 Sekunden und zwar**

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 694
1^0 = 0,01745 32925 19943 29576 92369 07684 88612 71345 1205
1^1 = 0,00029 08882 08665 72159 61539 48461 41476 87855 752

$1'' = 0{,}00000\ 48481\ 36811\ 09535\ 99358\ 99141\ 02357\ 94797\ 596$
wo 1^0 einen Grad, $1'$ eine Minute und $1''$ eine Sekunde bezeichnet.

Beweis: Es ist eine bekannte Tatſache und wird hier nur noch einmal wiederholt, dass der Kreisumfang in 360^0, jeder zu $60'$, jede Minute zu $60''$ eingeteilt ist. Die Aufgabe, die hier zu löſen ist, ist die Berechnung des π. Man ſetze $\frac{1}{4}\pi = a + b$, dann ist

$$\tan b = \tan\left(\frac{1}{4}\pi - a\right) = \frac{\tan\,(^1/_4\pi) - \tan a}{1 + \tan\,(^1/_4\pi)\cdot\tan a}$$

Da nun $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ ist nach Zahlenl. 472, ſo hat man

$$\tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} \qquad \text{und} \qquad \frac{\pi}{4} = a + b$$

1. Setzt man hier $\tan a = \frac{1}{2}$, ſo folgt $\tan b = \frac{1}{3}$

$$\text{alſo } \frac{\pi}{4} = \text{arc}\left(\tan = \frac{1}{2}\right) + \text{arc}\left(\tan = \frac{1}{3}\right)$$

Setzt man $a = 2\alpha$, ſo erhält man

$$\tan a = \frac{2\tan\alpha}{1 - (\tan\alpha)^2} \qquad \tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$\text{und } \frac{\pi}{4} = 2\alpha + b$$

2. Setzt man hier $\alpha = {}^1/_3$, ſo folgt $b = {}^1/_7$ und

$$\frac{\pi}{4} = 2\ \text{arc}\ (\tan = {}^1/_3) + \text{arc}\ (\tan = {}^1/_7)$$

3. Setzt man hier $\alpha = {}^2/_5$, ſo folgt $b = {}^1/_{41}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 2\ \text{arc}\ (\tan = {}^2/_5) + \text{arc}\ (\tan = {}^1/_{41})$$

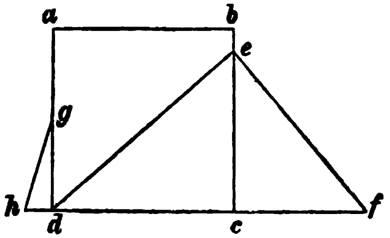
4. Setzt man hier $\alpha = {}^5/_{13}$, ſo folgt $b = {}^1/_{66}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 2\ \text{arc}\ (\tan = {}^5/_{13}) + \text{arc}\ (\tan = {}^1/_{66})$$

Hieraus folgt dann $\frac{\pi}{4} = c$

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ 81633\ 97448\ 30961\ 56608\ 45819\ 87572\ 10492\ 9235$$

und daraus $\pi = 4c$, $1^0 = c : 45$ $1' = c : (45\cdot 60)$ $1'' = c : (45\cdot 60\cdot 60)$



Die Mathematiker haben ſich lange Zeit bemüht, wenn der Durchmesser abgegeben ist, die Länge eines Kreisumfanges in einer geraden Linie durch Zeichnung zu gewinnen; ſie nannten dieſe Aufgabe die quadratura circuli. Meinem Bruder ist es gelungen, dieſe Aufgabe für die ersten 6 Dezimalstellen genau zu löſen. Ich erlaube mir die Löſung kurz

beizufügen. Sei ab der Durchmesser, so zeichne man ein Quader über ab, also abcd, teile eine Seite cb in 8 gleiche Teile und mache ce $= \frac{7}{8}$ cb $= \frac{7}{8}$ab, dg $= \frac{1}{2}$ ad $= \frac{1}{2}$ ab. Nun ziehe man de und senkrecht darauf ef, welche die verlängerte dc in f schneide, ziehe fg und senkrecht darauf gh, welche die verlängerte dc in h schneide. Dann ist $ce^2 = cf \cdot cd$, und $dg^2 = df \cdot dh$ oder es ist $cf = \frac{ce^2}{cd} = \frac{49}{64}ab$ und $df = cf + dc = \frac{113}{64}$ ab,

$dh = \frac{dg^2}{df} = \frac{{}^1/_4\,(ab)^2}{df} = \frac{16}{113}$ ab, mithin ist dann

$$3\ ab + dh = ab + bc + ch = \left(3 + \frac{16}{113}\right) ab = 3{,}141592920354\ ab$$

mithin da $\pi = 3{,}141592653590$ ab

so beträgt der Unterschied nur 0,000000266764

d. h. eine Gröse, welche bei der Zeichnung nicht mehr zur Geltung gelangt.

72. **Satz. Es ist, wenn $x^2 < 1$**

$$\text{arc}\,(\sin = x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7} + \cdots = \mathfrak{S}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\mathfrak{a}-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\mathfrak{a}}\cdot\frac{x^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)}$$

$$\text{arc}\,(\cos = x) = \frac{1}{2}\pi - \left[x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} - \mathfrak{S}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\mathfrak{a}-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\mathfrak{a}}\cdot\frac{x^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)}$$

Der Satz wird im Folgenden nicht gebraucht, ich füge für diejenigen, welche ihn abzuleiten wünschen, die Ableitung bei. Die Entwicklung ist kurz folgende:

* Es sei arc $(\sin = x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$

Wir betrachten nun arc $(\sin = x + y)$ und sei $a =$ arc $(\sin = x)$ und $b =$ arc $(\sin = x + y)$ gesetzt, dann ist $x = \sin a$ und $x + y = \sin b$.

Sei nun arc $(\sin = x + y) =$ arc $(\sin = x) + z$ gesetzt, so ist

$$b = a + z, \text{ mithin}$$
$$\sin b = (\sin a)\cdot\cos z + (\cos a)\sin z$$
$$= (\sin a)\cdot\cos z + \sqrt{1 - (\sin a)^2}\,\sin z.$$

Also

$$x + y = x\cdot\cos z + \sqrt{1 - x^2}\,\sin z.$$

oder indem man für cos z und sin z nach 68 und 69 die Reihen setzt und diese bis zur ersten Höhe von z entwickelt

$$x + y = x\,(1 + \cdots) + \sqrt{1 - x^2}\,(z + \cdots)$$
$$= x + z\sqrt{1 - x^2} + \cdots$$

Mithin wird

** $$y = z\sqrt{1 - x^2} + \cdots$$

Es ist aber nach *

$$\text{arc}(\sin = x + y) = c_1(x+y) + c_2(x+y)^2 + \cdots = \text{arc}(\sin = x) + z$$

alſo $c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + y\,(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots) + \cdots = \text{arc}(\sin = x) + z$

Mithin da nach * $\text{arc}(\sin = x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ iſt, ſo bleibt

$$y\,(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots) + \cdots = z.$$

Setzt man hier aus ** den Wert von y, ſo erhält man

$$\sqrt{1-x^2}\,(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots)\,z + \cdots = z$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von z gleich ſein müssen, ſo folgt

$\sqrt{1-x^2}\,(c_1 + c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots) = 1$ d. h. wenn man nach 53 $(1-x^2)^{-1/2}$ entwickelt

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4\cdot 6}x^6 + \cdots$$

Alſo, da nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x gleich ſein müssen, ſo folgt $c_2, c_4, c_6 \cdots = 0$ und

$$c_1 = 1;\ 3c_3 = \frac{1}{2},\ 5c_5 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\ 7c_7 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\ \text{u. ſ. w.}$$

mithin $c_1 = 1,\ c_3 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3},\ c_5 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5},\ c_7 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}$ u. ſ. w. alſo

$$\text{arc}(\sin = x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$ und nach Zahlenl. 460

$$\text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}(\sin = x) = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots\right]$$

Bemerkt möge noch werden, dass die Vorzahlen dieſer Reihe die folgenden Werte haben.

$\frac{1}{2\cdot 3}$	$= 0{,}16666\ 66667$	$\log = 9{,}221\ 8487$
$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}$	$= 0{,}07500\ 00000$	$\log = 8{,}875\ 0613$
$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$	$= 0{,}04464\ 28571$	$\log = 8{,}649\ 7519$
$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$	$= 0{,}03038\ 19444$	$\log = 8{,}482\ 6156$
$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdots 10\cdot 11}$	$= 0{,}02237\ 21591$	$\log = 8{,}349\ 7078$
$\frac{1\cdot 3\cdots 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdots 12\cdot 13}$	$= 0{,}01735\ 27644$	$\log = 8{,}239\ 3687$
$\frac{1\cdot 3\cdots 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdots 14\cdot 15}$	$= 0{,}01396\ 48437$	$\log = 8{,}145\ 0360$
$\frac{1\cdot 3\cdots 13\cdot 15}{2\cdot 4\cdots 16\cdot 17}$	$= 0{,}01155\ 18009$	$\log = 8{,}062\ 6497$
$\frac{1\cdot 3\cdots 15\cdot 17}{2\cdot 4\cdots 18\cdot 19}$	$= 0{,}00976\ 16095$	$\log = 7{,}989\ 5214$
$\frac{1\cdot 3\cdots 17\cdot 19}{2\cdot 4\cdots 20\cdot 21}$	$= 0{,}00839\ 03358$	$\log = 7{,}923\ 7794$
$\frac{1\cdot 3\cdots 19\cdot 21}{2\cdot 4\cdots 22\cdot 23}$	$= 0{,}00731\ 25259$	$\log = 7{,}864\ 0685$

73. **Satz.** Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \mathfrak{S}(-1)^{\mathfrak{a}} \frac{x^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \mathfrak{S}(-1)^{\mathfrak{a}} \frac{x^{2\mathfrak{a}}}{(2\mathfrak{a})!}$$

wo $\mathfrak{a}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mathfrak{a}$ ist.

Beweis: Nach 68 und 69 ist, da $x^2 < 1$ ist,

$$\sin x = x + a_3\, x^3 + a_5\, x^5 + a_7\, x^7 + \cdots$$
$$\cos x = 1 + a_2\, x^2 + a_4\, x^4 + a_6\, x^6 + \cdots$$

1. Es ist nach Zahlenl. 452

* $$\sin(x + y) = (\sin x)\cos y + (\cos x)\sin y$$

und wenn man jede Seite nach Reihen entwickelt, wobei man die höhern Höhen von y unentwickelt lassen kann, ſo ist

$$\sin(x + y) = x + y + a_3(x + y)^3 + a_5(x + y)^5 + a_7(x + y)^7 + \cdots$$
$$= x + y + a_3(x^3 + 3x^2y + \cdots) + a_5(x^5 + 5x^4y + \cdots)$$
$$+ a_7(x^7 + 7x^6y + \cdots)$$
$$= (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots) + y(1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4$$
$$+ 7a_7 x^6 + \cdots) + \cdots$$
$$= \sin x + y(1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \cdots) + \cdots$$

$$(\sin x)\cos y = \sin x\,(1 + a_2 y^2 + \cdots) = \sin x + \cdots$$
$$(\cos x)\sin y = (1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots)\,y + \cdots$$
$$= y(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots) + \cdots$$

mithin wenn wir die Werte in * einſetzen

$$\sin x + y(1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \cdots) + \cdots$$
$$= \sin x + y(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots) + \cdots$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von y einander gleich ſein müssen, ſo folgt

$$1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \cdots = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots$$

Da nun wieder nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x einander gleich ſein müssen, ſo folgt

† $3a_3 = a_2 \quad 5a_5 = a_4 \quad 7a_7 = a_6$ u. ſ. w. d. h.

$$a_3 = \frac{a_2}{3} \quad a_5 = \frac{a_4}{5} \quad a_7 = \frac{a_6}{6}\text{; überhaupt } a_{2\mathfrak{a}+1} = \frac{a_{2\mathfrak{a}}}{2\mathfrak{a}+1}$$

2. Es ist ferner nach Zahlenl. 452

** $$\cos(x + y) = (\cos x)\cos y - (\sin x)\sin y$$

und wenn man jede Seite nach Reihen entwickelt, wobei man die höhern Höhen von y unentwickelt lassen kann, ſo ist:

$$\cos(x + y) = 1 + a_2(x + y)^2 + a_4(x + y)^4 + a_6(x + y)^6 + \cdots$$

$$= 1 + a_2 (x^2 + 2xy + \cdot\cdot) + a_4 (x^4 + 4x^3y + \cdot\cdot) + a_6 (x^6 + 6x^5y + \cdot\cdot) + \cdot\cdot$$

$$= 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdot\cdot + y (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdot\cdot) + \cdot\cdot$$

$$= \cos x + y (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdot\cdot\cdot) + \cdot\cdot$$

$$(\cos x) \cos y = \cos x \cdot (1 + \cdot\cdot) = \cos x + \cdot\cdot$$

$$(\sin x) \sin y = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdot\cdot\cdot) (y + \cdot\cdot\cdot)$$

$$= y (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdot\cdot) + \cdot\cdot\cdot$$

mithin, wenn wir die Werte in ** einſetzen

$$\cos x + y (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdot\cdot) + \cdot\cdot\cdot$$

$$= \cos x - y (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdot\cdot) + \cdot\cdot$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von y einander gleich ſein müssen, ſo folgt

$$2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdot\cdot\cdot = - x - a_3 x^3 - a_5 x^5 - \cdot\cdot$$

Da nun wieder nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x einander gleich ſein müssen, ſo folgt

$2a_2 = -1$, $4a_4 = -a_3$, $6a_6 = -a_5$ u. ſ. w., d. h.

$$a_2 = -\frac{1}{2},\quad a_4 = -\frac{a_3}{4},\quad a_6 = -\frac{a_5}{6},\ \text{überhaupt}\ a_{2\alpha+2} = -\frac{a_{2\alpha+1}}{2\alpha+2} \qquad \dagger\dagger$$

Verbinden wir demnach die Formeln † und ††, ſo ergiebt ſich

$$a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{a_2}{3} = -\frac{1}{2\cdot 3},\ a_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$a_6 = -\frac{a_5}{6} = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},\ a_7 = \frac{a_6}{7} = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

Es ist demnach, da $1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha = \alpha!$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdot\cdot \qquad = \mathfrak{S}\overline{(-1)^\alpha \frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)!}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdot\cdot \qquad = \mathfrak{S}\overline{(-1)^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)!}}$$

Satz. **Es ist, wenn $x^2 < 1$ und für cot x auch $x \gtrless 0$ ist,** 74.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{2x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{17x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 3} + \frac{62x^9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 3} + \cdot\cdot$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x1}{1\cdot 3} - \frac{x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 3} - \frac{2x^5}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 5}$$

$$- \frac{2x^9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 9} - \cdot\cdot$$

Der Satz wird nicht gebraucht und ist nur der Vollständigkeit wegen eingerückt. Man erhält ihn, wenn man $\tan x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots$ ſetzt $\sin x = (\tan x) \cos x$ und $\cot = \frac{1}{x} + c_1 x + c_3 x^3 + \cdots$ ſetzt und $\cos x = (\cot x) \sin x$ nimmt und beide Seiten in Reihen nach x entwickelt.

75. **Die Berechnung der Cosinus, Tang und Cot aus den Sinus.**

Die Berechnung der Winkeltafeln oder trigonometrischen Tafeln beginnt mit der Berechnung der Sinus bez. ihrer Loge. Bekanntlich ist $\cos(90^0 - x) = \sin x$, hat man demnach die ſämmtlichen Sinus und ihre Loge berechnet, ſo hat man die ſämmtlichen Cosinus und ihre Loge, und da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ oder da $\log \tan x = \log \sin x - \log \cos x$ und $\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x$ ist, ſo hat man mit den Sinus und ihren Logen auch die Tangenten und die Cotangenten beide mit ihren Logen. Es genügt demnach zunächst die Berechnung der Sinus und ihrer Loge für alle Winkel von 0^0 bis 90^0 oder, was ganz daſſelbe ist, die Berechnung der Sinus und der Cosinus nebst ihren Logen für alle Winkel von 0 bis 45^0, da $\cos(45^0 - x) = \sin(90^0 - (45^0 - x)) = \sin(90^0 - 45^0 + x) = \sin(45^0 + x)$ ist. Wer die Winkelgrösen nicht berechnen will, kann die Sätze 75—79 überschlagen.

76. **Satz. Berechnung der Loge der Winkelgrösen für die Sekunden und Minuten bis $0^0\ 30'$.**

Bezeichne a die Zahl der Sekunden, s die Gröse einer Sekunde geteilt durch den Halbmesser, und b die Zahl, bis zu welcher die Rechnung genau ſein ſoll, alſo bei 7stelligen Logen $5 \cdot 10^{-8}$, bei 5stelligen Logen $5 \cdot 10^{-6}$, ſo haben wir

$$\cos as = 1 - \frac{a^2 s^2}{2} + \frac{a^4 s^4}{24} - \frac{a^6 s^6}{720} + \frac{a^8 s^8}{40320} - \cdots$$

$$\sin as = as - \frac{a^3 s^3}{6} + \frac{a^5 s^5}{120} - \frac{a^7 s^7}{5040} + \frac{a^9 s^9}{362880} - \cdots$$

Hier kann man die folgenden Glieder unberückſichtigt lassen, wenn bei cos as das erste Glied kleiner als b, und wenn bei sin as das erste Glied kleiner als asb ist. Hieraus ergiebt ſich, man kann unberückſichtigt lassen

	Bei 7stelligen wenn a kleiner als	Bei 5stelligen wenn a kleiner als
$\frac{a^2 s^2}{2}$, wenn $\log a < \frac{1}{2}(\log b + \log 2) - \log s$,	$1'\ 5''$	$10'\ 52''$
$\frac{a^3 s^3}{6}$, wenn $\log a < \frac{1}{2}(\log b + \log 6) - \log s$,	$1'\ 52''$	$18'\ 49''$
$\frac{a^4 s^4}{24}$, wenn $\log a < \frac{1}{4}(\log b + \log 24) - \log s$,	$1^0\ 53'\ 46''$	$5^0\ 59'\ 48''$
$\frac{a^5 s^5}{120}$, wenn $\log a < \frac{1}{4}(\log b + \log 120) - \log s$,	$2^0\ 50'\ 8''$	$8^0\ 58'\ 2''$
$\frac{a^6 s^6}{720}$, wenn $\log a < \frac{1}{6}(\log b + \log 720) - \log s$,	$10^0\ 24'\ 40''$	$22^0\ 25'\ 50''$
$\frac{a^7 s^7}{5040}$, wenn $\log a < \frac{1}{6}(\log b + \log 5040) - \log s$,	$14^0\ 24'\ 0''$	$31^0\ 1'\ 24''$

Man findet dann für die Winkel von 1″ bis 1′ 52″ die 7stelligen Loge des Sinus einfach, indem man den Log von 1″ = 4,6855749 — 10 zu dem Loge von a = der Zahl der Sekunden zufügt, die 7stelligen Loge des Cosinus find für die Winkel von 1″ bis 1′ 5″ gleich 0 = 10,000 0000 — 10. Bei den 5stelligen Logen findet man in gleicher Weife die Loge des Sinus bis 18′ 49″, die des Cosinus bis 10′ 52″.

Bei den grösern Winkeln ist die Sache weitläuftiger, da muss man beim Sinus, wie beim Cosinus noch das zweite Glied der Reihe berücksichtigen, und kann dann bei 7stelligen Logen die Loge des Cosinus bis 1° 53′, die Loge des Sinus bis 2° 50′, bei 5stelligen Logen die des Cosinus bis 5° 59′, die des Sinus bis 8° 58′ berechnen. Man berechnet dann für eine ganze Reihe von Winkeln as, etwa für die 60 Minuten eines Grades den log as, daraus den log $a^2 s^2 = 2$ log as, und log $\frac{a^2 s^2}{2}$, ebenfo log $a^3 s^3 = 3$ log as und log $\frac{a^3 s^3}{6}$. Dann schlägt man der Reihe nach zu log $\frac{a^2 s^2}{2}$ die Zahl, d. h. $\frac{a^2 s^2}{2}$ auf und zieht diefe von 1 ab, fo hat man den cos as und, wenn man den Log dazu aufschlägt, den log cos as. Endlich schlägt man der Reihe nach zu log $\frac{a^3 s^3}{6}$ die Zahl, d. h. $\frac{a^3 s^3}{6}$ auf und zieht diefe von as ab, fo hat man den sin as und, wenn man den Log dazu aufschlägt, den log sin as.

Das folgende Beispiel macht das Verfahren anschaulich.

Winkel	as	log as	log $a^2 s^2$	log $\frac{a^2 s^2}{2}$	log $a^3 s^3$	log $\frac{a^3 s^3}{6}$
1° 0′	0,017 4533	8,241 8774	6,483 7548	6,182 7248	4,725 6322	3,947 4809
1° 1′	0,017 7442	8,249 0564	6,498 1128	6,197 0828	4,747 1692	3,969 0179
1° 2′	0,018 0351	8,256 1185	6,512 2370	6,211 2070	4,768 3555	3,990 2042
1° 3′	0,018 3259	8,263 0653	6,526 1306	6,225 1006	4,789 1959	4,011 0446
1° 4′	0,018 6168	8,269 9050	6,539 8100	6,238 7800	4,809 7150	4,031 5637
1° 5′	0,018 9077	8,276 6387	6,553 2774	6,252 2474	4,829 9161	4,051 7648

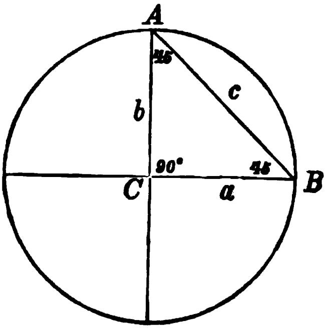
Winkel	$\frac{a^3 s^3}{6}$	sin as	log sin as	$\frac{a^2 s^2}{2}$	cos as	log cos as
1° 0′	0,000 0009	0,017 4524	8,241 8553	0,000 1523	9,999 8477	0,999 9338
1° 1′	0,000 0009	0,017 7433	8,249 0332	0,000 1574	9,999 8426	9,999 9316
1° 2′	0,000 0010	0,018 0341	8,256 0943	0,000 1626	9,999 8374	9,999 9294
1° 3′	0,000 0010	0,018 3249	8,263 0424	0,000 1679	9,999 8321	9,999 9271
1° 4′	0,000 0010	0,018 6158	8,269 8810	0,000 1733	9,999 8267	9,999 9247
1° 5′	0,000 0011	0,018 9066	8,276 6136	0,000 1787	9,999 8213	9,999 9224

Wenn nur fünfstellige Loge der Winkelgrösen gefucht werden, vereinfacht fich die Arbeit ungemein durch die Tafel für den Log des Unterschiedes, wenn die Loge der Summe und des andern Stückes gegeben find. Auf diefe Weife erhalten wir die folgende Tafel.

Tafel für die Minuten von 0° bis 30 Minuten.

Minute	Sinus	Log sinus — 10	Cosinus	Log cos. — 10	Letzte Stelle des Log cos.
1	0,000 2909	6,463 7261	1,000 0000	10,000 0000	— 0
2	5818	6,764 7561	0,999 9998	9,999 9999	— 1
3	8727	6,940 8473	9996	9998	— 2
4	0.001 1636	7,065 7860	9993	9997	— 3
5	4544	7,162 6960	9989	9995	— 5
6	7453	7,241 8771	9985	9993	— 7
7	0,002 0362	7,308 8239	9979	9991	— 9
8	3271	7,366 8157	9973	9988	— 12
9	6180	7,417 9681	9966	9985	— 15
10	9089	7,463 7255	9958	9982	— 18
11	0,003 1998	7,505 1181	9949	9978	— 22
12	4907	7,542 9065	9939	9974	— 26
13	7815	7,577 6684	9928	9969	— 31
14	0,004 0724	7,609 8530	9917	9964	— 36
15	3633	7,639 8160	9905	9959	— 41
16	6542	7,667 8445	9892	9953	— 47
17	9451	7,694 1738	9878	9947	— 53
18	0,005 2360	7,718 9966	9863	9940	— 60
19	5268	7,742 4775	9847	9934	— 66
20	8177	7,764 7537	9831	9927	— 73
21	0,006 1086	7,785 9427	9813	9919	— 81
22	3995	7,806 1458	9795	9911	— 89
23	6904	7,825 4507	9776	9903	— 97
24	9813	7,843 9338	9756	9894	— 106
25	0,007 2721	7,861 6623	9736	9885	— 115
26	5630	7,878 6953	9714	9876	— 124
27	8539	7,895 0854	9692	9866	— 134
28	0,008 1448	7,910 8793	9668	9856	— 144
29	4357	7,926 1190	9644	9845	— 155
30	7265	7,940 8419	9619	9835	— 165

77. **Satz. Die Berechnung einzelner Sinus und Cosinus.**



Seien a und b die beiden Katheten, und zwar a die gegenüberliegende vom Winkel x, c die Hypotenuſe, ſo ist

$c^2 = a^2 + b^2$ und ist $\sin x = \frac{a}{c}$ und $\cos x = \frac{b}{c}$.

Bei 45° müssen wir vom gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgehen. Hier ist $a = b$, mithin $c^2 = 2a^2$ und $c = \sqrt{2}\, a$ oder $a = c \sqrt{1/2}$, mithin ist

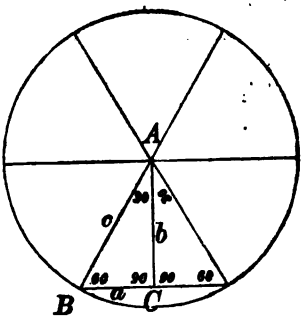
$$\sin 45^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}(2)^{1/2} = \cos 45^0$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}(2)^{1/2}=0{,}707106781186.$$

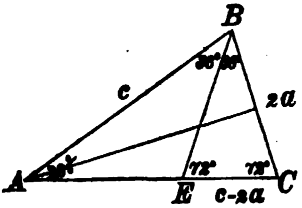
Bei 30° müssen wir vom gleichseitigen Dreiecke ausgehen, dessen Winkel 60° sind, das Lot aus der Spitze hälftet die Grundseite. Es ist 2a = c, mithin

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=0{,}5 \quad \cos 30^\circ=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(3\right)^{1/2}=0{,}8660254037835$$



Bei 18° müssen wir vom gleichschenkligen Dreiecke ausgehen, dessen Winkel in der Spitze 36° beträgt. Jeder Winkel an der Grundseite beträgt dann 72° und wenn die Linie BE diesen Winkel hälftet, so beträgt jeder halbe Winkel 36° und ist Dreiek AEB und Dreieck BCE gleichschenklig und ist AE = EB = CB = 2a und CA = c, auch ist Dreieck ABC und BCE ähnlich, also AC : CB = CB : CE d. h c : 2a = 2a : c — 2a, mithin c (c — 2a) = 4a², mithin ist c² — 2ca = 4a² und c² — 2ca + a² = 5a², also (c — a)² = 5a²



und $c=a\left((5)^{1/2}=1\right)$ und $\sin x=\frac{a}{c}=\frac{1}{(5)^{1/2}+1}=\frac{(5)^{1/2}-1}{\left((5)^{1/2}1+\right)\left((5)^{1/2}-1\right)}$

$$=\frac{(5)^{1/2}-1}{5-1}=\frac{(5)^{1/2}-1}{4}=0{,}309016994375$$

$$\cos x=\left(1-\sin x^2\right)^{1/2}=\frac{1}{4}\left(10+2(5)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$=0{,}9510565$$

Aus diesen Werten finden wir nun leicht nach Zahlenl. 455

$$\sin\frac{1}{2}x=\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{1/2} \qquad \cos\frac{1}{2}x=\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{1/2}$$

und findet man darnach in Verbindung mit den Formeln Zahlenl. 452 und 453

$$\sin(x\pm y)=(\sin x)\cdot\cos y\pm(\cos x)\cdot\sin y$$

$$\cos(x\pm y)=(\cos x)\cdot\cos y\mp(\sin x)\cdot\sin y$$

leicht die Werte der Sinus und Cosinus von 22½°, 15°, 7½°, 18°, 9°, 4½° von 3° = 18° — 15° und 1½°, von 2° = 1½° + ½° von 7° = 7½° — ½° und 3½° und von 2½° = 3° — ½° und daraus nach Zahlenl. 454 für die doppelten Winkel 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, 12°, 14°, 15°, 16°, 18°, 20°, 22½°.

Hierdurch finden wir demnach die Sinus, die Cosinus und ihre Loge von halbem zu halbem, bezüglich von ganzem zu ganzem Grade.

Die folgende Tafel giebt uns diese Werte.

Grad	Sinus		Log. sinus		Cosinus		Log. cosinus	
1	0,017	4524	8,241	8553	0,999	8477	9,999	9338
$1^1/_2$	0,026	1769	8,417	9190	0,999	6573	9,999	8512
2	0,034	8995	8,542	8192	0,999	3908	9,999	7354
$2^1/_2$	0,043	6194	8,639	6796	0,999	0482	9,999	5865
3	0,052	3360	8,718	8002	0,998	6295	9,999	4044
$3^1/_2$	0,061	0485	8,785	6753	0,998	1348	9,999	1892
4	0,069	7565	8,843	5845	0,997	5641	9,998	9408
$4^1/_2$	0,078	4591	8,894	6433	0,996	9173	9,998	6591
5	0,087	1557	8,940	2960	0,996	1947	9,998	3442
6	0,104	5285	9,019	2346	0,994	5219	9,997	6143
7	0,121	8693	9,085	8945	0,992	5462	9,996	7507
8	0,139	1731	9,143	5553	0,990	2681	9,995	7528
9	0,156	4345	9,194	3324	0,987	6883	9,994	6199
10	0,173	6482	9,239	6702	0,984	8078	9,993	3515
11	0,190	8090	9,280	5988	0,981	6272	9,991	9466
12	0,207	9117	9,317	8789	0,978	1476	9,990	4044
13	0,224	9511	9,352	0880	0,974	3701	9,988	7239
14	0,241	9219	9,383	6752	0,970	2957	9,986	9041
15	0,258	8190	9,412	9962	0,965	9258	9,984	9438

78. **Satz. Die Berechnung der Winkeltafeln von 0 bis 15°.**

Nachdem wir die Sinus und Cosinus, sowie ihre Loge für die einzelnen Minuten von 0° und die für die ganzen bez. halben Grade kennen gelernt haben, so können wir nun die Sinus und Cosinus, sowie ihre Loge für die sämmtlichen Minuten von 0 bis 15° durch die Formeln

$$\sin(x \pm y) = (\sin x) \cdot \cos y \pm (\cos x) \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = (\cos x) \cdot \cos y \mp (\sin x) \cdot \sin y$$

entwickeln. Die Arbeit geht sehr leicht und schnell, wenn man sie in Tafeln ausführt. Es ist ja

$$\log \sin x + \log \cos y = \log (\sin x) \cos y$$
$$\log \cos x + \log \sin y = \log (\cos x) \sin y \text{ u. s. w.}$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass bei jedem log hinten — 10 zu ergänzen ist, und dass man viel kürzer verfährt, wenn man statt log cos x in der Form der Tafel — 10 zuzufügen, lieber den negativen log cos, der auf den letzten Stellen nur wenige Ziffern enthält, zufügt.

Man muss dann zu log (sin x) cos y u. s. w. die Zahlen aufsuchen und dann (sin x) cos y ± (cos x) sin y nehmen und wieder die Loge aufschlagen, oder wenn man nur die letztere und zwar fünfstellig sucht, den log (a ± b) aus log a und log b nach der Hülfstafel für die Loge der Summen und der Unterschiede aufsuchen. Die Arbeit ist eine überaus leichte, wie das folgende Beispiel zeigt und ist es dringend wünschenswert, dass sich Jeder durch eine Berechnung von der Leichtigkeit der Arbeit überzeuge.

Beispiel einer Berechnung für Sinus und Cosinus der Minuten eines Grades und zwar für 10°. Es ist zu bemerken, dass log cos 10° = — 0,0066485 und log sin 10° = 9,2396702 ist.

Min.	Letzte Stelle cos y	log (sin x) cos y	log (cos x) sin y	(sin x) cos y	(cos x) sin y	sin (x+y)	sin (x—y)	x—y
1′	— 0	9,239 6702	6,457 0776	0,173 6482	0,000 2865	0,173 9847	0,173 3617	9° 59′
2′	— 1	9,239 6701	6,758 1076	0,173 6481	0,000 2730	0,174 2211	0,173 0751	9° 58′
3′	— 2	9,239 6700	6,934 1988	0,173 6481	0,000 8594	0,174 5075	0,172 7887	9° 57′
4′	— 3	9,239 6699	7,059 1375	0,173 6480	0,001 1459	0,174 7939	0,172 5021	9° 56′
5′	— 5	9,239 6697	7,156 0475	0,173 6480	0,001 4323	0,175 0803	0,172 2157	9° 55′
6′	— 7	9,239 6695	7,235 2286	0,173 6479	0,001 7188	0,175 3667	0,171 9291	9° 54′

Min.	Letzte Stelle cos y	log (cos x) cos y	log (sin x) sin y	(cos x) cos y	(sin x) sin y	cos (x+y)	cos (x—y)	x—y
1′	— 0	9,993 3515	5,703 3963	0,984 8080	0,000 0505	0,984 7575	0,984 8585	9° 59′
2′	— 1	9,993 3514	6,004 4268	0,984 8077	0,000 1010	0,984 7067	0,984 9087	9° 58′
3′	— 2	9,993 3513	6,180 5175	0,984 8075	0,000 1515	0,984 6560	0,984 9590	9° 57′
4′	— 3	9,993 3512	6,305 4562	0,684 8072	0,000 2020	0,984 6052	0,985 0092	9° 56′
5′	— 5	9,993 3510	6,402 3662	0,984 8069	0,000 2526	0,984 5543	0,985 0595	9° 55′
6′	— 7	9,993 3508	6,481 5473	0,984 8065	0,000 3031	0,984 5034	0,985 1096	9° 54′

Satz. Die Berechnung der Winkeltafeln von 15° bis 90°. 79.

Da der $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ und $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, ſo haben wir aus den Winkelgrösen von 0° bis 15° auch die für 75° bis 90°. Wir dürfen alſo nur noch die Winkeltafeln für die Winkel von 15° bis 75° berechnen. Aber da auch der $\sin(45^\circ + x) = \cos(45^\circ - x)$ und $\cos(45^\circ + x) = \sin(45^\circ - x)$, wie wir in 75 ſahen, ſo dürfen wir nur noch die Sinus und Cosinus für die Winkel von 15° bis 45° berechnen.

Für dieſe legen wir die Formeln zu Grunde

$$\sin(30^\circ \pm x) = (\sin 30^\circ) \cos x \pm (\cos 30^\circ) \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x \pm 0{,}8660254037835 \sin x$$

$$\cos(30^\circ \pm x) = (\cos 30^\circ) \cos x \mp (\sin 30^\circ) \sin x$$

$$= 0{,}8660254037835 \cdot \cos x \mp \frac{1}{2} \sin x.$$

Die Berechnung mittelst Loge ist hienach leicht.

Zweiter Abschnitt der Folgelehre: Die höhere Folgelehre oder die Lehre von den Diffen und von den Integern einer Veränderlichen.

7. Die allgemeinen Sätze über Diffe oder Differentialquotienten.

Die Lehre von den Differentialquotienten oder Diffen leidet in fast allen mathematischen Werken noch an Fehlern und Unklarheiten in der Ableitung, welche vermieden werden müssen, wenn diese Lehre ganz unzweifelhaft und streng wissenschaftlich werden soll. Die Lehre wird aber überdies durch Beseitigung dieser Mängel überaus leicht und elementar, jedenfalls für den Anfänger viel klarer und sicherer. Ich bitte die geehrten Leser auf diese Seite der Darstellung besonders achten zu wollen.

80. **Satz.** $$f_0(+y) = f_0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0'' x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0''' + \cdots$$

$$= S \frac{y^a}{a!} f_0^a x$$

wenn $y^2 < 1$ ist und $f_0 (x + y)$ stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn y wächst und wo $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a$.

Jede Reinfolge (reelle Funktion) von x kann, sofern $y^2 < 1$ ist, innerhalb der Grenzen, wo die Folge (Funktion) von $x + y$ stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn die Gröse y zunimmt, einer echten (konvergenten) steigenden Höhenreihe der Gröse y gleichgesetzt werden.

Beweis: Da die Folge hier eine Folge von $x + y$ ist und die Reihe nur nach y entwickelt ist, so bilden in der Reihe des Satzes 29 alle Vorzahlen der Glieder y^a Folgen von x, welche von y unabhängig oder in Bezug auf y konstant sind Man kann demnach $a_a = \frac{1}{a!} f_0^a x$ setzen und erhält dann

$$f_0(x + y) = f_0^0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0'' x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0''' x + \cdot\cdot = \mathfrak{S}\overline{\frac{y^a}{a!} f_0^a x}$$

wenn $y^2 < 1$ ist und die $f_0(x + y)$ stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn y zunimmt.

Setzen wir hier $y = 0$, so ergiebt sich zunächst $f_0(x + y) = f_0 x$ und daraus dann die ganze Formel.

Erklärung. Die $f_0' x$ in der echten Reihe 81.

$f_0(x + y) = f_0 x + \frac{y}{1} f_0' x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0'' x + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0''' x + \cdots$ und innerhalb der Grenzen, dass $f_0(x + y)$ stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die Gröse y wächst, heist die erste abgeleitete Folge (Funktion) von x und die $f_0^a x$ in derselben Reihe heist die $a$te abgeleitete Folge (Funktion) von x.

Die Erklärung der abgeleiteten Funktion ist zuerst von dem ausgezeichneten italienischen Mathematiker I. L. Lagrange aus Turin 1736—1813 in der Theorie des fonctions analytiques Paris 1797 (3. Aufl. 1847) aufgestellt worden.

Erklärung. Der Diff x oder der Differentialquotient nach x von einer Folge (Funktion) von x heist die erste abgeleitete Folge von x. 82.

Der $(a + 1)$te Diff x oder der $(a + 1)$te Differentialquotient nach x von einer Folge (Funktion) von x heist der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem $a$ten Diff x (dem $a$ten Differentialquotienten nach x) von derselben Folge (Funktion) von x.

Das Zeichen des Diff x von der Folge (Funktion) von x ist $\frac{d}{x} f_0 x$ das Zeichen des $a$ten Diff x ist $\frac{d^a}{x} f_0 x$.

Das Diffzeichen oder das Zeichen des Differentialquotienten ist ein Folgezeichen und bezieht sich daher auf das ganze folgende Glied. So z. B. ist $\frac{d}{x} F_0 x = \frac{d}{x}(F_0 x)$ der Diff x von der Folge von x, so ist $\frac{d}{x} F_0 x^m = \frac{d}{x}(F_0 x^m)$; dagegen ist $\frac{d}{x} F_0 x \pm ax = \pm ax + \frac{d}{x}(F_0 x)$ und ist ganz verschieden von $\frac{d}{x} F_0(x \pm ax)$ wie von $\frac{d}{x}(F_0 x \pm ax)$.

Es ist sehr wichtig, dass man auch hier wieder auf diesen Gebrauch genau achte, da man sonst in die grösten Verwirrungen geraten muss. Die Klammern sind, wenn man diese Regel beachtet, nach dem Diffzeichen meist überflüssig

Die Ableitung des Diff x, des Differentialquotienten von x von der ersten abgeleiteten Funktion von x ist bereits von Leibniz gegeben und ist die einzige Form, in welcher diese Gröse abgeleitet werden kann. Lagrange hat diese Ableitung in der elegantesten Form gegeben, welche nur einiger kleinen Verbesserungen in der Entwicklung bedarf. Es hatten sich aber in diese Ableitung unbemerkt einige Fehler eingeschlichen, welche entfernt werden mussten, wenn die Ableitung nicht zu fehlerhaften Sätzen führen sollte.

Zunächst hatte man die Bedingungen der n 637 auser Acht gelassen, dass die $f_0(x+y)$ eine echte Reihe sein und dass dieselbe innerhalb bestimmter Grenzen liegen müsse und kam dadurch zu Trugschlüssen mancherlei Art. Die Einführung solcher Bedingungen, welche die Trugschlüsse unmöglich machen, hat die Mathematiker lange Zeit beschäftigt. Der ausgezeichnete französische Mathematiker A. L, Cauchy aus Paris 1789—1857 suchte in den „Leçons sur le calcul différentiel Paris 1829“ (neue Ausg. 1840) die Fehler dadurch zu beseitigen, dass er bei den Reihen den Rest der Reihe vom nten Gliede ab berechnete. Andere Mathematiker suchten die Fehler dadurch zu beseitigen, dass sie den Begriff der stetigen Funktion einführten und nun in jedem einzelnen Falle die Untersuchung forderten, ob die Funktion auch in diesem Falle noch stetig sei. Die ganze Lehre gewann dadurch aber eine Unsicherheit und Unklarheit, so dass stets Zweifel entstanden, ob die Funktion noch stetig sei und grose Untersuchungen darüber nötig wurden, ob und wann die abgeleiteten Formeln noch gelten, das aber ist unwissenschaftlich. Die obige Darstellung vermeidet alle diese Schwierigkeiten, indem sie streng die Grenzen bestimmt, innerhalb deren die Formeln gelten.

Ein zweiter Fehler war die gewöhnliche Bezeichnung des Diff x (des Differentialquotienten) nach x durch $\frac{df_0 x}{dx}$, denn da bei dieser Bezeichnung $dx = 0$ gesetzt wird, so wird hier durch 0 geteilt, was in der Formenlehre nie gestattet ist, auserdem würde dann aber auch nach den Regeln der Zahlenlehre $\frac{df_0 x}{dx} dx = df_0 x$ sein, da man hier nach den Regeln der Zahlenlehre $\frac{dx}{dx}$ heben kann, was wieder zu Trugschlüssen führen muss. Ebenso muss nach den Regeln der Grösenlehre bez. Zahlenlehre $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ sein, da sich d und d heben.

Die Gebrüder Hermann und Robert Grassmann erkannten bei ihrer gemeinsamen Arbeit 1855 das Fehlerhafte dieser Bezeichnungsweise, sie fürten ein untrennbares Zeichen für Diff x ein; Hermann Grassmann, Ausdehnungslehre, Berlin 1862 S. 296 hat dafür das Zeichen $\frac{d}{dx} f_0 x$ gewählt; aber auch bei diesem Zeichen erscheint noch $\frac{d}{dx}$ als ein Bruch und ist mithin noch zweideutig. Ich führe daher das unzweideutige und einfachere Zeichen $\underset{x}{d}$ ein, welches jeden Zweifel ausschliest.

83. **Satz.** $\underset{x}{d} f_0 x = f_0' x$ **oder**

Es ist der Diff x von $f_0 x$ gleich der ersten abgeleiteten Folge von $f_0 x$

Beweis: Unmittelbar aus 81 und 82.

Satz. $\frac{d}{x}^{a+1} f_0 x = \frac{d}{x} \frac{d}{x}^{a} f_0 x$ oder 84.

Es ist der (a + 1)te Diff x von f₀x gleich dem Diff x von dem aten Diff x von f₀x.

Beweis: Unmittelbar aus 82.

Satz. Wenn a bez. b eine Beständige (eine Konstante) ist, ſo ist 85.

$$\frac{d}{x} a = 0 \qquad \frac{d}{x} bx = b \qquad \frac{d}{x}(a + bx) = b.$$

Beweis: Man ſetze statt x die Gröse x + y und entwickle die Reihe, ſo ist

$f_0(x + y) = a + b(x + y) = a + bx + yb = f_0 x + yb = f_0 x + y f_0' x$

Hier ist die erste abgeleitete Funktion von a + bx $\quad f_0' x = b$

Alſo ist auch $\frac{d}{x}(a + bx) = b$ und $b = 0$ geſetzt $\frac{d}{x} a = 0.$

Satz. $\frac{d}{x} x = 1$ 86.

Beweis: Unmittelbar aus 85.

Satz. $\frac{d}{x}(u \pm v \pm z \pm \cdots) = \frac{d}{x} u \pm \frac{d}{x} v \pm \frac{d}{x} z \pm \cdots$ 87.

wo u, v, z ⋯ Folgen (Funktionen) von x ſind oder

$$\frac{d}{x}(f_0 x + \varphi_0 x \pm F_0 x \pm \cdots) = \frac{d}{x} f_0 x \pm \frac{d}{x} \varphi_0 x \pm \frac{d}{x} F_0 x \cdots$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von einer Summe von Folgen (Funktionen) von x ist gleich der Summe der Diff x von den Stücken oder von den einzelnen Folgen und

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem Unterschiede zweier Folgen (Funktionen) von x ist gleich dem Unterschiede der Diff x von dem Vorrat und dem Abzug.

Beweis: Man entwickle die Folgen für x + y in eine Reihe, ſo ist

$$\begin{aligned} f_0(x + y) \pm \varphi_0(x + y) \pm F_0(x + y) + \cdots = {} & f_0 x \pm \varphi_0 x \pm F_0 x + \cdots \\ & + y(f_0' x \pm \varphi_0' x \pm F_0' x + \cdots) \\ & + \frac{y^2}{1 \cdot 2}(f_0'' x \pm \varphi_0'' x \pm F_0'' x + \cdots) \\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Hier ist alſo

$$\frac{d}{x}(f_0 x \pm \varphi_0 x \pm F_0 x + \cdots) = f_0' x \pm \varphi_0' x \pm F_0' x + \cdots \qquad \text{nach 82}$$

$$= \frac{d}{x} f_0 x \pm \frac{d}{x} \varphi_0 x \pm \frac{d}{x} F_0 x + \cdots \qquad \text{nach 82}$$

88. **Satz.** $\frac{d}{x}^n (u \pm v \pm z \pm \cdots) = \frac{d}{x}^n u \pm \frac{d}{x}^n v \pm \frac{d}{x}^n z \pm \cdots$

wo u, v, z ·· Folgen (Funktionen) von x.

Der nte Diff x (der nte Differentialquotient nach x) von einer Summe von Folgen (Funktionen) von x ist gleich der Summe der nten Diff x von den einzelnen Folgen und

Der nte Diff x (der nte Differentialquotient nach x) von dem Unterschiede zweier Folgen (Funktionen) von x ist gleich dem Unterschiede der nten Diff x von dem Vorrat und dem Abzug.

Beweis: Es gelte der Satz für den $a$ten Diff x, so gilt er auch für den $(a+1)$ten Diff x. Sei nämlich

$$\frac{d}{x}^a (u \pm v \pm z \pm \cdots) = \frac{d}{x}^a u \pm \frac{d}{x}^a v \pm \frac{d}{x}^a z \pm \cdots \text{ (Annahme), so ist}$$

$$\frac{d}{x}^{a+1} (u \pm v \pm z + \cdots) = \frac{d}{x}\left[\frac{d}{x}^a (u \pm v \pm z \pm \cdots)\right] \quad \text{(nach 84)}$$

$$= \frac{d}{x}\left[\frac{d}{x}^a u \pm \frac{d}{x}^a v \pm \frac{d}{x}^a z \pm \cdots\right] \quad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \frac{d}{x}\frac{d}{x}^a u \pm \frac{d}{x}\frac{d}{x}^a v \pm \frac{d}{x}\frac{d}{x}^a z \pm \cdots \quad \text{(nach 87)}$$

$$= \frac{d}{x}^{a+1} u \pm \frac{d}{x}^{a+1} v \pm \frac{d}{x}^{a+1} z \pm \cdots \quad \text{(nach 84)}$$

Nun gilt der Satz für $a = 1$ mithin auch für jede folgende ganze Zahl n.

89. **Satz.** $\frac{d}{x} uv = u \frac{d}{x} v + v \frac{d}{x} u$ **wo u, v Folgen (Funktionen) von x**

oder $\frac{d}{x} (f_0 x)\, \varphi_0 x = (f_0 x) \frac{d}{x} \varphi_0 x + (\varphi_0 x) \frac{d}{x} f_0 x$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem Zeuge zweier Folgen (dem Produkte zweier Funktionen) von x ist gleich der Summe der beiden Zeuge aus der einen Folge und dem Diff x der andern Folge.

Beweis: Man entwickle die Folgen für $(x + y)$ in Reihen und vervielfache die beiden Reihen, so ergiebt sich

$$f_0[x+y) + \varphi_0(x+y) = \left(f_0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0'' x + \cdots\right)\left(\varphi_0 x + y \varphi_0' x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi_0'' x + \cdots\right)$$

$$= (f_0 x) \cdot \varphi_0 x + y\,[(f_0 x) \cdot \varphi_0' x + (\varphi_0 x) \cdot f_0' x]$$

$$+ \frac{y^2}{1 \cdot 2}\,[(f_0' x) \cdot \varphi_0' x + (f_0 x) \cdot \varphi_0'' x + (\varphi_0 x) \cdot f_0'' x)$$

$$+ \cdots$$

Hier ist alſo

$$\frac{d}{x}(f_0 x) \times \varphi_0 x = (f_0 x)\,\varphi_0{}' x + (\varphi_0 x)\,f_0{}' x \qquad \text{nach 82}$$

$$= (f_0 x)\,\frac{d}{x}\,\varphi_0 x + (\varphi_0 x)\,\frac{d}{x} f_0 x \qquad \text{nach 82}$$

Satz. Wenn a eine Beständige (eine Konstante) und u eine Folge von x ist, ſo ist 90.

$$\frac{d}{x} au = a \frac{d}{x} u \qquad \frac{d}{x}\frac{u}{a} = \frac{1}{a}\frac{d}{x} u$$

Beweis: Nach 88 ist $\frac{d}{x} au = a \frac{d}{x} u + u \frac{d}{x} a = a \frac{d}{x} u$

da $\frac{d}{x} a = 0$ nach 85

Und ebenſo folgt $\frac{d}{x}\frac{u}{a} = \frac{1}{a}\frac{d}{x}$ u.

Satz. $$\frac{\frac{d}{x}(uvz\cdots)}{uvz} = \frac{\frac{d}{x}u}{u} + \frac{\frac{d}{x}v}{v} + \frac{\frac{d}{x}z}{z} + \cdots$$ 91.

wo u, v, z ⋯ Folgen (Funktionen) von x und zwar ungleich Null ſind

oder $$\frac{\frac{d}{x}[(f_0 x)(\varphi_0 x)(F_0 x)\cdots]}{(f_0 x)(\varphi_0 x)(F_0 x)\cdots} = \frac{\frac{d}{x} f_0 x}{f_0 x} + \frac{\frac{d}{x}\varphi_0 x}{\varphi_0 x} + \frac{\frac{d}{x} F_0 x}{F_0 x} + \cdots,$$

wo $f_0 x,\ \varphi_0 x,\ F_0 x \cdots \gtrless 0.$

Der Diff x (der Differentialquotient von x) von dem Zeuge (dem Produkte) mehrer Folgen geteilt durch das Zeug (Produkt) dieſer Folgen ist gleich der Summe der Diff xe der einzelnen Folgen, jeder geteilt durch ſeine Folge.

Beweis: Wenn wir den Diff x von dem Zeuge oder Produkte zweier Folgen von x, wie es ſich nach 89 ergiebt, durch das Zeug oder Produkt der beiden Folgen teilen, ſo erhalten wir unmittelbar

$$\frac{\frac{d}{x}(f_0 x)\cdot\varphi_0 x}{(f_0 x)\cdot\varphi_0 x} = \frac{\frac{d}{x} f_0 x}{f_0 x} + \frac{\frac{d}{x}\varphi_0 x}{\varphi_0 x}$$

Und wenn wir nun weiter gehen, indem wir $(f_0 x)\cdot\varphi_0 x$ als erste Folge, $F_0 x$ als zweite Folge behandeln, ſo folgt dieſelbe Formel auch für die Zeuge dreier und beliebig vieler Folgen.

Satz. $$\frac{d}{x}^n uv = u\frac{d}{x}^n v + n\left(\frac{d}{x}u\right)\cdot\frac{d}{x}^{n-1} v + n^{\cdot 2}\left(\frac{d^2}{x}u\right)\cdot\frac{d}{x}^{n-2} v$$ 92.

$$+ n^{\cdot 3}\left(\frac{d^3}{x}u\right)\frac{d}{x}^{n-3} v + \cdots$$

$$= \mathfrak{S}\, n^{\cdot a}\left(\frac{d^a}{x}u\right)\frac{d}{x}^{n-a} v$$

wo u und v Folgen von x und $n^{\cdot \mathfrak{a}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \mathfrak{a}}$

Beweis: Es gelte der Satz für den mten Diff x, so gilt er auch für den (m + 1)ten Diff x; denn es ist $\frac{d^{m+1}}{x} f_0 x = \frac{d}{x}\frac{d^m}{x} f_0 x$, da nun im $\mathfrak{a}$ten Diff x nach der Annahme jedes Glied ein Zeug oder Produkt aus zwei Folgen von x = $(\varphi_0 x)\cdot F_0 x$ ist, so entwickelt sich jedes Glied, wenn man nach 89 den Diff x davon nimmt, in zwei Gliedern $(\varphi_0 x)\frac{d}{x} F_0 x + \left(\frac{d}{x}\varphi_0 x\right) F_0 x$ und folgt

$$\frac{d^{m+1}}{x}uv = \frac{d}{x}\frac{d^m}{x}uv = \frac{d}{x}u\cdot\frac{d^m}{x}v + \frac{d}{x}m\left(\frac{d}{x}u\right)\frac{d^{m-1}}{x}v + \frac{d}{x}m^{\cdot 2}\left(\frac{d^2}{x}u\right)\frac{d^{m-2}}{x}v$$
$$+ \frac{d}{x}m^{\cdot 3}\left(\frac{d^3}{x}u\right)\frac{d^{m-3}}{x}v + \cdots$$
$$= u\frac{d^{m+1}}{x}v + m\left(\frac{d}{x}u\right)\frac{d^m}{x}v + m^{\cdot 2}\left(\frac{d^2}{x}u\right)\frac{d^{m-1}}{x}v + m^{\cdot 3}\left(\frac{d^3}{x}u\right)\frac{d^{m-2}}{x}v$$
$$+ m^{\cdot 4}\left(\frac{d^4}{x}u\right)\cdot\frac{d^{m-3}}{x}v + \cdots$$
$$+ \left(\frac{d}{x}u\right)\frac{d^m}{x}v + m\left(\frac{d^2}{x}u\right)\frac{d^{m-1}}{x}v + m^{\cdot 2}\left(\frac{d^3}{x}u\right)\frac{d^{m-2}}{x}v$$
$$+ m^{\cdot 3}\left(\frac{d^4}{x}u\right)\cdot\frac{d^{m-3}}{x}v + \cdots$$
$$= u\cdot\frac{d^{m+1}}{x}v + (m+1)\cdot\left(\frac{d}{x}u\right)\frac{d^m}{x}v + (m+1)^{\cdot 2}\cdot\left(\frac{d^2}{x}u\right)\cdot\frac{d^{m-1}}{x}v$$
$$+ (m+1)^{\cdot 3}\cdot\left(\frac{d^3}{x}u\right)\cdot\frac{d^{m-2}}{x}v + (m+1)^{\cdot 4}\left(\frac{d^4}{x}u\right)\frac{d^{m-3}}{x}v + \cdots$$

Da nach 39 allgemein $a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1} = (a+1)^{\cdot n}$ ist.
Also gilt der Satz, wenn er für m gilt, auch für m + 1. Nun gilt der Satz für m = 1, also gilt er auch für jede folgende ganze Zahl n.

93. **Satz.** $\frac{d^n}{x}uvz\cdots = S\,\overline{\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots \mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots \mathfrak{c}\cdot 1\cdot 2\cdots}\left(\frac{d^{n-\mathfrak{a}}}{x}u\right)\cdot\left(\frac{d^{\mathfrak{b}}}{x}v\right)\cdot\left(\frac{d^{\mathfrak{c}}}{x}z\right)\cdots}$

wo u, v, z ·· Folgen von x und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$

Beweis: Zunächst für $\frac{d^n}{x}uvz$

Es ist $\frac{d^n}{x}uvz = \frac{d^n}{x}(uv)z$

$$= S\,\overline{n^{\cdot \mathfrak{c}}\left(\frac{d^{n-\mathfrak{c}}}{x}uv\right)\frac{d^{\mathfrak{c}}}{x}z} \qquad \text{(nach 87)}$$
$$= S\,\overline{n^{\cdot \mathfrak{c}}(n-\mathfrak{c})^{\cdot \mathfrak{b}}\cdot\left(\frac{d^{n-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}}{x}u\right)\cdot\left(\frac{d^{\mathfrak{b}}}{x}v\right)\cdot\frac{d^{\mathfrak{c}}}{x}z} \qquad \text{(nach 87)}$$

$$=\mathfrak{S}\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{c}+1)(n-\mathfrak{c})(n-\mathfrak{c}-1)\cdots(n-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}+1)}{1\cdot2\cdots\mathfrak{c}\cdot1\cdot2\cdots\mathfrak{b}}$$

$$\left(\underset{x}{d}^{\,n-\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}u\right)\cdot\left(\underset{x}{d}^{\,\mathfrak{b}}v\right)\cdot\underset{x}{d}^{\,\mathfrak{c}}z$$

$$=\mathfrak{S}\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot2\cdots\mathfrak{b}\cdot1\cdot2\cdots\mathfrak{c}}\left(\underset{x}{d}^{\,n-\mathfrak{a}}u\right)\cdot\left(\underset{x}{d}^{\,\mathfrak{b}}v\right)\cdot\underset{x}{d}^{\,\mathfrak{c}}z$$

Und in gleicher Weiſe fortfahrend für beliebig viele Fache oder Faktoren.

Satz. $\underset{x}{d}\,\frac{u}{v}=\frac{v\underset{x}{d}u-u\underset{x}{d}v}{v^2}$ **wo u, v Folgen (Funktionen)** 94.

von x und v ungleich Null oder

$$\underset{x}{d}\,\frac{\mathfrak{f}_0 x}{\varphi_0 x}=\frac{\varphi_0 x\underset{x}{d}\mathfrak{f}_0 x-\mathfrak{f}_0 x\underset{x}{d}\varphi_0 x}{(\varphi_0 x)^2}\qquad \text{wo } \varphi_0 x \gtrless 0.$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem Bruche zweier Folgen von x ist gleich dem Nenner mal dem Diff x des Zählers weniger dem Zähler mal dem Diff x des Nenners geteilt durch das Quader des Nenners.

Beweis: Setze $t=\frac{u}{v}$, dann ist $u=vt$, mithin ist nach 89

$$\underset{x}{d}u=v\underset{x}{d}t+t\underset{x}{d}v \qquad \text{oder } v\underset{x}{d}t=\underset{x}{d}u-t\underset{x}{d}v$$

alſo beide Seiten durch v geteilt und $t=\frac{u}{v}$ geſetzt, ſo ist

$$\underset{x}{d}\,\frac{u}{v}=\frac{\underset{x}{d}u}{v}-\frac{u}{v^2}\underset{x}{d}v=\frac{v\underset{x}{d}u-u\underset{x}{d}v}{v^2}$$

Man kann dieſer Formel auch die Form geben

$$\frac{\underset{x}{d}\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}}=\frac{\underset{x}{d}u}{u}-\frac{\underset{x}{d}v}{v}$$

eine Form, welche in manchen Fällen Bequemlichkeit hat.

Satz. $\underset{x}{d}\,\mathfrak{f}_0 y=\left(\underset{y}{d}\,\mathfrak{f}_0 y\right)\underset{x}{d}\,y$ oder $\underset{x}{d}\,\mathfrak{f}_0 y=y'\,\mathfrak{f}_0' y$ 95.

wo y eine Folge (Funktion) von x oder

Wenn y eine Folge (Funktion) von x ist, ſo ist der Diff x (der Differentialquotient nach x) von einer Folge von y gleich dem Diff y dieſer Folge von y mal dem Diff x von y.

Beweis: Da y eine Folge (Funktion) von x, ſo ſetze $y=\varphi_0 x$,

ſo ist nach 80 $\varphi_0(x+v) = \varphi_0 x + v\,\varphi_0' x + v^2 \varphi_0'' x + \cdots = y + u$
und $\varphi_0' x = \frac{d}{x} y$
Ferner ist nach 80

$f_0(y+u) = f_0 y + u f_0' y + u^2 f_0'' y + \cdots$ und $f_0' y = \frac{d}{y} f_0 y$

Setzen wir nun statt u ſeinen Wert $o\varphi_0' x + o^2 \varphi_0'' x + \cdots$ ſo wird

$$f_0(y+u) = f_0 \varphi_0(x+o) = f_0 y + o(\varphi_0' x) f_0' y + o^2 [(\varphi_0'' x) f_0' y + (\varphi_0' x)^2 f_0'' y] + \cdots$$

Hier ist das zweite Glied der Diff x von $f_0 y$, mithin ist

$$\frac{d}{x} f_0 y = \left(\frac{d}{y} f_0 y\right) \cdot \frac{d}{x} y$$

Es ist dieſer Satz von gröster Wichtigkeit, um auch von verwickelten Folgen die abgeleiteten Folgen oder die Diff x entwickeln zu können, und werden wir davon wiederholt Gebrauch machen.

Sei z. B. $\frac{d}{x}(a + bx + cx^3)^{1/2}$ zu nehmen, ſo ſetzt man zunächst $a + bx + cx^2 = y$ und hat nun $\frac{d}{x} y^{1/2} = \left(\frac{d}{y} y^{1/2}\right) \cdot \frac{d}{x} y$ und $\frac{d}{x} y = \frac{d}{x}(a + bx + cx^2)$. Wir werden im Folgenden noch vielfach Gelegenheit finden, dieſen Satz anzuwenden.

96. **Satz.** $\frac{d}{y} x = \frac{1}{\frac{d}{x} y}$ oder $\frac{d}{f_0 x} x = \frac{1}{\frac{d}{x} f_0 x}$

Wenn y eine Folge (Funktion) von x ist, ſo ist Diff y von x gleich 1 geteilt durch den Diff x von y.

Beweis: Da y eine Folge von x ist, ſo ist auch x eine Folge von y. Es ſei $x = \varphi_0 y$, ſo ist nach 95

$$\frac{d}{x} x = \frac{d}{x} \varphi_0 y = y' \cdot \varphi_0' y = \frac{d}{x} y \cdot \frac{d}{y} \varphi_0 y = \frac{d}{x} y \cdot \frac{d}{y} x$$

aber $\frac{d}{x} x = 1$ nach 86, mithin ist $\frac{d}{y} x = \frac{1}{\frac{d}{x} y}$

97. **Satz.** $\frac{d}{x} f_0(y, v) = \left(\frac{d}{x} y\right) \frac{d}{y} f_0(y, v) + \left(\frac{d}{x} v\right) \frac{d}{v} f_0(y, v)$ oder

$$\frac{d}{x} f_0(y, v) = y' f_0' y + v' f_0' v$$

wo y und v Folgen (Funktionen) von x und wo wir unter $f_0' y$ die nach y abgeleitete erste Folge oder Funktion von $f_0(y, v)$ verstehen.

Beweis: Da hier y und v neben einander auftreten, ohne dass die eine eine Folge der andern ist, ſo kann man ſie beide als unabhängig von einander hinstellen oder der andern gegenüber als eine Konstante

behandeln, wenn man nur jede nach x verändert. Verändern wir alſo zunächst y nach x, indem x in x + o übergehe, ſo wird nach 89

$$f_0(y+u, v) = f_0(y, v) + o\left(\frac{d}{x}y\right)\frac{d}{y}f_0(y, v) + o^2\cdots$$

und verändern wir nun v nach x, indem x in x + o übergeht, ſo wird nach 89

$$f_0(y+u, v+z) = f_0(y, v) + o\left(\frac{d}{x}v\right)\cdot\frac{d}{v}f_0(y, v) + o\left(\frac{d}{x}y\right)\cdot\frac{d}{y}f_0(y, v) + o^2\cdots$$

Da die Veränderung von $o\left(\frac{d}{x}y\right)\cdot\frac{d}{y}f_0(y, v)$ bei der Veränderung von v nur höhere Potenzen oder Höhen von o ergiebt, mithin ist

$$\frac{d}{x}f_0(y, z) = \left(\frac{d}{x}y\right)\cdot\frac{d}{y}f_0(y, v) + \left(\frac{d}{x}v\right)\cdot\frac{d}{v}f_0(y, v).$$

Satz. $\frac{d}{x}f_0(x, y) = f_0' x + y' f_0' y.$ 98.

Beweis: Unmittelbar nach 97 da $\frac{d}{x}x = 1$ nach 86.

Satz. $\frac{d}{x}f_0(y, u, v, \cdots) = \left(\frac{d}{x}y\right)\frac{d}{y}f_0(y, u, v, \cdots) +$ 99.

$$\left(\frac{d}{x}u\right)\frac{d}{u}f_0(y, u, v\cdots) + \cdots$$

oder $\frac{d}{x}f_0(y, u, v, \cdots) = y' f_0' y + u' f_0' u + v' f_0' v + \cdots$

wo y, u, v, ··· Folgen (Funktionen) von x und wir unter $f_0' y$ die erste abgeleitete Folge von $f_0(y, u, v, \cdots)$ nach y verstehen.

Beweis: Unmittelbar nach 97.

Satz. Taylorscher Lehrſatz 100.

$$f_0(x+y) = f_0 x + y\frac{d}{x}f_0 x + \frac{y^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2}{x}f_0 x + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3}{x}f_0 x + \cdots = S\frac{y^a}{a!}\cdot\frac{d^a}{x}f_0 x$$

ſofern $y^2 < 1$ und $f_0(x+y)$ einen reellen Zahlwert hat und stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn die Gröse y zunimmt und alle $\frac{d^a}{x}f_0 x$ endlich bleiben.

Beweis: Setze in Satz 80 statt y die Gröse v + y, ſo ist $f_0(x + (v + y)) = f_0((x + v) + y)$ alſo

$$f_0(x + (v + y)) = f_0 x + (v + y) f_0' x + \frac{(v+y)^2}{1\cdot 2} f_0'' x + \frac{(v+y)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_0''' x + \frac{(v+y)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f_0^4 x + \cdots$$

$$= f_0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1\cdot 2} f_0'' x + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_0''' x + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f_0^4 x + \cdots$$

$$+ v f_0' x + \frac{2yv}{1\cdot 2} f_0'' x + \frac{3y^2 v}{1\cdot 2\cdot 3} f_0''' x + \frac{4y^3 v}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f_0^4 x + \cdots$$
$$+ \cdots$$

$$f_0((x+v)+y) = f_0(x+v) + y f_0'(x+v) + \frac{y^2}{1\cdot 2} f_0''(x+v)$$
$$+ \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_0'''(x+v) + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f_0^4(x+v) + \cdots$$
$$= f_0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1\cdot 2} f_0'' x + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_0''' x + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f_0^4 x + \cdots$$
$$+ v f_0' x + y v f_0' f_0' x + \frac{y^2 v}{1\cdot 2} f_0' f_0'' x + \frac{y^3 v}{1\cdot 2\cdot 3} f_0' f_0''' x$$
$$+ \frac{y^4 v}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f_0' f_0^4 x + \cdots$$
$$+ \cdots$$

Da diefe beiden Reihen für jedes y und jedes v innerhalb der Grenzen gelten follen, fo folgt daraus nach 28, dass die Folgen für yv, für y^2v, für $y^3v \cdots$ einander gleich fein müssen, mithin folgt, dass

$$f_0'' x = f_0' f_0' x\,;\; f_0''' x = f_0' f_0'' x\,;\; f_0^4 x = f_0' f_0''' x \cdots$$

mithin da $\frac{d}{x} f_0 x = f_0' x$ und da $\frac{d}{x}^{a+1} f_0 x = \frac{d}{x}\frac{d^a}{x} f_0 x$ ist, fo folgt

$$f_0'' x = \frac{d}{x}^2 f_0 x \quad f_0''' x = \frac{d}{x}^3 f_0 x \quad f_0^4 x = \frac{d}{x}^4 f_0 x$$ und

$$f_0(x+y) = f_0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1\cdot 2} f_0'' x + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_0''' x + \cdots$$
$$= f_0 x + y \frac{d}{x} f_0 x + \frac{y^2}{1\cdot 2}\frac{d^2}{x} f_0 x + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3}{x} f_0 x + \cdots$$
$$= \frac{S\, y^a \frac{d^a}{x} f_0 x}{a!}, \text{ wo } a! = 1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a.$$

Es ist diefer Satz von dem englischen Mathematiker Brook Taylor 1685 bis 1731 aufgestellt und in feinem Werke Methodus incrementorum directa et inversa London 1715 bewiefen, und wird daher allgemein nach ihm genannt. Der Satz gewährt, wenn man die Diffe oder die Differentialquotienten einer Folge oder Funktion kennt, das leichteste Hülfsmittel, um daraus die Folge oder Funktion in einer steigenden Höhenreihe auszudrücken und wird vielfach dazu verwandt. Wir werden später die Anwendung diefes Satzes kennen lernen.

101. **Satz. Mac-Laurinscher Lehrfatz.**

$$\mathbf{f_0 y = f_0 x + y \frac{d}{x} f_0 x + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2}{x} f_0 x + \cdots = S \frac{y^a}{a!}\frac{d^a}{x} f_0 x}$$

wenn man in $f_0 x$ und in den abgeleiteten Folgen von $f_0 x$ die Grösse

$x = 0$ setzt, sofern $y^2 < 1$ und $f_0 y$ für $x = 0$ einen reellen Zahlwert hat und stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn die Grösse y zunimmt und alle $\frac{d}{x}^a f_0 x$ endlich bleiben.

Beweis: Unmittelbar nach 100.

Dieser Satz ist in dieser Form von dem schottischen Mathematiker Colin Mac-Laurin 1698 bis 1746 aufgestellt, so in a treatise of fluxions Edinburg 1742, und trägt daher nach ihm den Namen. Vor ihm hat übrigens bereits der englische Mathematiker Stirling Lineae tertii ordinis Newtonianae 1717, Propos III denselben Satz in etwas anderer Form.

Satz. Wenn $F_0(x, f_0 x) = 0$ ist, so ist auch $\frac{d}{x} F_0(x, f_0 x) = 0$, 102.

$$\frac{d}{x}^a F_0(x, f_0 x) = 0.$$

Von jeder Gleichung, welche gleich Null ist, sind sämmtliche Diffe gleich Null.

Beweis: Da $F_0(x, y) = 0$ ist, wo y eine Folge (Funktion) von x ist, oder da $F_0(x, f_0 x) = 0$ ist, so muss diese Gleichung auch gelten für jeden Wert von x, also auch für $x + u$. Nach 100 ist aber

$$0 = F_0(x + u, f_0(x + u)) = F_0(x, f_0 x) + u \frac{d}{x} F_0(x, f_0 x)$$
$$+ \frac{u^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{x}^2 F_0(x, f_0 x) + \cdots = \mathfrak{S} \frac{u^a}{a!} \frac{d}{x}^a F_0(x, f_0 x)$$

mithin ist nach 27, da $u \gtrless 0$ gesetzt ist

$$\frac{d}{x} F_0(x, f_0 x) = \frac{d}{x}^a F_0(x, f_0 x) = 0.$$

Satz. Von der Gleichung $F_0(x, y) = 0$, wo y Folge von x, ist 103.

$$y' = -\frac{F_0' x}{F_0' y} = -\frac{\frac{d}{x} F_0(x, y)}{\frac{d}{y} F_0(x, y)}$$

Wenn die Gleichung zwischen x und y gleich Null ist, so ist der Diff x der Grösse y gleich dem negativen Bruche, dessen Zähler der Diff x, und dessen Nenner der Diff y der gegebenen Gleichung ist.

Beweis: Nach 102 ist $\frac{d}{x} F_0(x, y) = 0$. Nach 98 ist aber

$$0 = \frac{d}{x} F_0(x, y) = \frac{d}{x} F_0 x + \frac{d}{x} y \frac{d}{y} F_0 y = F_0' x + y' F_0' y,$$ mithin ist

$$y' = -\frac{F_0' x}{F_0' y} = -\frac{\frac{d}{x} F_0(x, y)}{\frac{d}{x} F_0(x, y)}.$$

8. Die Diffe (die Differentialquotienten) für die Formeln der Zahlenlehre oder der niedern Analysis.

Leibniz, der Erfinder der Differentialrechnung hat sofort in der ersten kurzen Abhandlung im Oktoberhefte der Acta eruditorum Leipzig 1684 (Leibnitii opera ed Dutens III. S. 167), durch welche er die Erfindung der Differentialrechnung bekannt machte, die bedeutendsten Formeln der Differentialrechnung entwickelt. Er hat bereits folgende Formeln

$$d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx \qquad dax = adx$$

$$d\,xv = xdv + vdx$$

$$d\,\frac{v}{y} = \frac{vdy - ydv}{y^2}$$

$$d\,\chi^a = a\chi^{a-1} \cdot d\chi \qquad d\left(\frac{1}{\chi^a}\right) = \frac{ad\chi}{\chi^{a+1}}$$

Ausserdem hat er dort bereits die Sätze über das Maximum und Minimum.

104. **Satz.** $\underset{x}{d}\, x^m = mx^{m-1}$

$$\underset{x}{d^a}\, x^m = m \cdot (m-1) \cdots (m - a + 1)\, x^{m-a} = \frac{m!}{(m-a)!}\, x^{m-a}$$

Der Diff x von der mten Höhe von x ist gleich m mal der (m — 1)ten Höhe von x.

Es ist der ate Diff x von der mten Höhe von x gleich der Tauschzahl von m geteilt durch die Tauschzahl von (m — a) mal der m — aten Höhe von x.

Beweis: Nach 49 ist

$$(x + y)^m = x^m + m \cdot x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \cdots$$

mithin nach 82 ist $\underset{x}{d}\, x^m = f_0'\, x = m \cdot x^{m-1}$

Ferner ist nach 82

$$\underset{x}{d^{a+1}}\, x^m = \underset{x}{d}\, \underset{x}{d^a}\, x^m \text{ mithin fortschreitend}$$

$$\underset{x}{d^2}\, x^m = \underset{x}{d}\, mx^{m-1} = m(m-1)\, x^{m-2}$$

$$\underset{x}{d^3}\, x^m = \underset{x}{d}\, m(m-1)\, x^{m-2} = m(m-1)(m-2)\, x^{m-3}$$

$$\underset{x}{d^a}\, x^m = m(m-1)(m-2) \cdots (m-a+1) \cdot x^{m-a} = \frac{m!}{(m-a)!}\, x^{m-a}$$

105. **Satz.** $\underset{x}{d}\left(\mathfrak{S}\, a_a x^a\right) = \underset{1}{\mathfrak{S}}\, a\, a_a x^{a-1}$

$$\underset{x}{d^m}\left(\mathfrak{S}\, a\, a_a x^a\right) = \underset{m}{\mathfrak{S}}\, \frac{a!}{(a-m)!}\, a_a x^{a-m}$$

wo 0! = 1 gesetzt wird.

Beweis: Unmittelbar aus 104.

Satz. $\underset{x}{d}^{m} x^m = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!\,;\ \underset{x}{d}^{m+1} x^m = 0.$ 106.

Beweis: Unmittelbar aus 104.

Satz. $\underset{x}{d}^{a} x^{-m} = (-1)^a \frac{(m+a-1)!}{(m-1)!} x^{-(m+a)}$ 107.

Beweis: Nach 104 ist $\underset{x}{d} x^{-m} = -m x^{-m-1} = -m x^{-(m+1)}$

$$\underset{x}{d}^{2} x^{-m} = -m \underset{x}{d} x^{-(m+1)} = +m(m+1) x^{-(m+2)}$$

$$\underset{x}{d}^{3} x^{-m} = -m(m+1)(m+2) x^{-(m+3)}$$

$$\underset{x}{d}^{a} x^{-m} = (-1)^a m(m+1)\cdots(m+a-1) x^{-(m+a)}$$

$$= (-1)^a \frac{(m+a-1)!}{(m-1)!} x^{-(m+a)}$$

Satz. $\underset{x}{d} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n x^{1-\frac{1}{n}}};$ 108.

$$\underset{x}{d}^{a} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-a+1\right) x^{\frac{1}{n}-a}$$

$$= \frac{(-1)^{a-1}\, n\,(n-1)(2n-1)\cdots((a-1)n-1)}{n^a\, x^{a-\frac{1}{n}}}$$

Unmittelbar aus 104.

Satz. $\underset{x}{d}^{a} x^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a (n+1)(2n+1)\cdots((2a-1)n-1)}{n^a\, x^{a+\frac{1}{n}}}$ 109.

Beweis: Unmittelbar nach 104. 110.

Satz. $\underset{x}{d} y^m = m y^{m-1} \underset{x}{d} y$

Beweis: Nach 95 ist

$$\underset{x}{d} y^m = \left(\underset{x}{d} y\right)\cdot \underset{y}{d} y^m = m y^{m-1} \underset{x}{d} y \qquad \text{(nach 103)}$$

Es giebt dieser Satz zu den reichsten Anwendungen Anlass und bedar daher reicher Uebungen. Sei z. B. zu nehmen

$\underset{x}{d} u = \underset{x}{d}\left(a - \frac{b}{x^{1/2}} + (c^2 - x^2)^{2/3}\right)^{3/4}$, fo fetze $y = \frac{b}{x^{1/2}}$, $z = (c^2 - x^2)^{2/3}$

fo ist $\underset{x}{d} u = \underset{x}{d}(a - y + z)^{3/4} = {}^3/_4\,(a - y + z)^{3/4 - 1}\,\underset{x}{d}(a - y + z)$

$$= \frac{3}{4}(a - y + z)^{-1/4}\left(-\underset{x}{d} y + \underset{x}{d} z\right)$$

und wenn man hier $\underset{x}{\mathfrak{d}} y = \underset{x}{\mathfrak{d}} \frac{b}{x^{1/2}} = \underset{x}{\mathfrak{d}} bx^{-1/2} = -\frac{1}{2} bx^{-3/2}$

$\underset{x}{\mathfrak{d}} z = \underset{x}{\mathfrak{d}} (c^2 - x^2)^{2/3} = \frac{2}{3} (c^2 - x^2)^{-1/3} \underset{x}{\mathfrak{d}} (c^2 - x^2) = \frac{2}{3} (c^2 - x^2)^{-1/3} (-2x)$

einſetzt, ſo erhält man

$$\underset{x}{\mathfrak{d}} u = \frac{3}{4} \frac{\frac{1}{2} bx^{-3/2} - \frac{4}{3} x (c^2 - x^2)^{-1/3}}{(a - bx^{-1/2} + (c^2 - x^2)^{2/3})^{1/4}}$$

Man kann in dieſer Weiſe alſo auch von den verwickeltsten Folgen oder Funktionen die Diffe ableiten.

111. **Satz.** $\underset{x}{\mathfrak{d}} \left(\mathfrak{S}\, a_a y^a \right) = \left(\underset{x}{\mathfrak{d}} y \right) \left(\mathfrak{S}\, a a_a y^{a-1} \right)$

Beweis: Unmittelbar aus 110 und 105.

112. **Satz.** $\underset{x}{\mathfrak{d}}\, l_e x = \frac{1}{x}$, **wo** $x = M(0 [\,] 2)$; $\underset{x}{\mathfrak{d}}\, l_e y = \frac{\underset{x}{\mathfrak{d}} y}{x}$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem neperschen Log von x ist gleich eins geteilt durch x und der Diff x vom Neperschen Log von y, wo y eine Folge (Funktion) von x ist, ist Diff x von y geteilt durch y.

Beweis: 1. Nach 56 ist, wenn $x^2 < 1$ ist

$$\log (1 + x) = M \left(x - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right)$$

und nach 66 ist $l_e (1 + x) = \frac{1}{M} l (1 + x)$ mithin

$$l_e (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

und von beiden Seiten der Diff x genommen, ist nach 105

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}\, l_e (1 + x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots$$

Nach 48 ist aber $1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots = \frac{1}{1 + x}$

mithin ist

$\underset{x}{\mathfrak{d}}\, l_e (1 + x) = \frac{1}{1 + x}$ wo $x^2 < 1$, mithin ist auch $\underset{x}{\mathfrak{d}}\, l_e x = \frac{1}{x}$, wo $x = M(0,2)$

2. Nach n 95 ist $\underset{x}{\mathfrak{d}} f_0 y = \left(\underset{x}{\mathfrak{d}} y\right) \underset{y}{\mathfrak{d}} f_0 y$, alſo $\underset{x}{\mathfrak{d}}\, l_e y = \left(\underset{x}{\mathfrak{d}} y\right) \frac{1}{y} = \frac{\underset{x}{\mathfrak{d}} y}{y}$

Es muss hier darauf aufmerkſam gemacht werden, dass man nach 64 unter dem neperschen Log Zeichen l_e den Log der Baſe e versteht, wo $e = 2{,}7182818284590452 35$ ist. Der gemeine Log ist dagegen der Log der Baſe 10

Das Zeichen M (0 [ ] 2) bezeichnet, dass die Gröse zwischen 0 und 2 liegen muss, dieſe Grösen ausgeschlossen. Es kann dieſer Satz auch leicht aus 91 und 94 bewieſen, wenigstens aber anschaulich gemacht werden, denn ſei $\varphi_0 y$ die Folge von x, für welche $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x}\varphi_0 y = \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} y}{y}$ ist, ſo gilt für dieſe Folge das Geſetz $\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} uvz}{uvz} = \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} u}{u} + \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} v}{v} + \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{z} z}{z} + \cdots$ mithin auch das Geſetz $\varphi_0 uvz \cdots = \varphi_0 u + \varphi_0 v + \varphi_0 z + \cdots$ Ebenſo gilt für ſie das Geſetz $\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} \frac{u}{v}}{\frac{u}{v}} = \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} u}{v} - \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{d}}{x} v}{v}$ mithin auch das Geſetz $\varphi_0 \frac{u}{v} = \varphi_0 u - \varphi_0 v$.

Es ſind aber die Loge oder Logarithmen die einzigen Grösen, für welche dieſe Geſetze gelten, alſo ist $\varphi_0 u = lu$.

Satz. $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} l_a x = \dfrac{l_a e}{x} = \dfrac{1}{x\, l_e a}$, **wo a die Baſe der Loge l_a ist und** 113.

$\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} l_a y = \dfrac{l_a e}{y} \cdot \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} y = \dfrac{1}{y \cdot l_e a} \cdot \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} y.$

Der Diff x von einem Log (Logarithmus) der Baſe a ist gleich dem Aloge (dem Loge der Baſe a) von e geteilt durch x oder gleich eins geteilt durch das Zeug (Produkt) aus x und dem Eloge von a.

Beweis: Es ist nach Zahlenlehre 360

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{e} \frac{e}{a}, \text{ d. h. } l_a x = (l_e x)\, l_a e$$

mithin ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} l_a x = \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} l_e x \cdot l_a e = (l_a e) \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} l_e x$ nach 112

$$= \frac{1}{x} l_a e.$$

Ferner ist nach Zahlenlehre 361 $\dfrac{e}{a} = \dfrac{e}{e} : \dfrac{a}{e} = \dfrac{1}{\frac{a}{e}}$

d. h. $l_a e = \dfrac{1}{l_e a}$, alſo ist auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} l_a x = \dfrac{1}{x \cdot l_e a}$.

Satz. $\genfrac{}{}{0pt}{}{d^n}{x} l_a x = l_a e\, (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{x^n}$ 114.

Beweis: Unmittelbar aus 113 und 104.

Satz. $\genfrac{}{}{0pt}{}{d^n}{x} l_c (a + bx) = l_c e\, (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot \dfrac{b^n}{(a+bx)^n}$ 115.

Beweis: Man ſetze zunächst $(a + bx) = y$ und nehme nach 112 den Diff x

$$\frac{d}{x} l_e(a+bx) = (l_e e)\frac{\frac{d}{x}(a+bx)}{a+bx} = \frac{(l_e e)b}{a+bx} \quad \text{u. f. w.}$$

116. **Satz.** Es ist $\frac{d}{x} l_a l_a x = (l_a e)^2 \frac{1}{x \cdot l_a x}$ und $\frac{d}{x} l_e l_e x = \frac{1}{x \cdot l_e x}$

Der Diff x des Log vom Log von x ist gleich dem Quadet des Logs von e geteilt durch das Zeug von x und dem Log von x, und für nepersche Loge ist der Log von e gleich eins.

Beweis: Man fetze $l_a x = y$, fo ist nach Zahlenl. 360 $l_a y = l_e y \cdot l_a e$

mithin $\frac{d}{x} l y = \frac{d}{x}(l_e y) le = (le)\frac{d}{x} l_e y = (le)\frac{\frac{d}{x} y}{y}$ (nach 113)

und $\frac{d}{x} y = \frac{d}{x} l x = \frac{le}{x}$, mithin, wenn man für y wieder lx einfetzt

$\frac{d}{x} l l x = (le)^2 \cdot \frac{1}{x \cdot lx}$.

117. **Satz.** Es ist $\frac{d}{x} a^x = a^x \cdot l_e a$ und $\frac{d}{x} a^y = a^y \cdot l_e a \cdot \frac{d}{x} y$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von der Stufengröse oder Exponentialgröse a^x ist gleich diefer Stufengröse mal dem neperschen Log von der Bafe der Stufengröse.

Beweis: Wir fetzen zunächst $a^x = u$, dann ist nach 112

$\frac{d}{x} l_e u = \frac{\frac{d}{x} u}{u}$ mithin $\frac{d}{x} l_e a^x = \frac{\frac{d}{x} a^x}{a^x}$, alfo $\frac{d}{x} a^x = a^x \frac{d}{x} l_e a^x$

Es ist aber $\frac{d}{x} l_e a^x = \frac{d}{x} x l_e a = l_e a$ (nach 86), mithin ist

$\frac{d}{x} a^x = a^x \cdot l_e a$ und nach n 95 auch $\frac{d}{x} a^y = \left(\frac{d}{y} a^y\right) \cdot \frac{d}{x} y = a^y (l_e a) \frac{d}{x} y$.

118. **Satz.** $\frac{d}{x} e^x = e^x$. $\frac{d}{x} e^{ax} = a \cdot e^{ax}$.

Beweis: Unmittelbar aus 117, da $l_e e = 1$ ist, und wenn wir $ax = y$ fetzen, $\frac{d}{x} y = a$ ist.

119. **Satz.** $\frac{d^m}{x} a^x = a^x (l_e a)^m$,

Beweis: Nach 117 ist $\frac{d}{x} a^x = a^x \cdot l_e a$, alfo $\frac{d^2}{x} a^x = a^x \cdot (l_e a)^2$ u. f. w.

120. **Satz.** $\frac{d^m}{x} e^x = e^x$. $\frac{d^m}{x} e^{ax} = a^m e^{ax}$

121. **Satz.** $e^{ax} = S \frac{(ax)^a}{a!}$

Beweis: Nach Satz 101 ist $f_0 y = S \frac{y^a}{a!} \frac{d^a}{x} f_0 x$, ſofern für $\frac{d^a}{x} f_0 x$ $x = 0$ geſetzt wird, $y^2 < 1$ und $\frac{d^a}{x} f_0 x$ endlich ist. Hier ist $\frac{d^a}{x} e^x$ für $x = 0$ nach 120 gleich $e^0 = 1$, ſetzen wir alſo $y = ax$, ſo erhalten wir $e^{ax} = S \frac{(ax)^a}{a!}$.

Die Sätze 122 bis 124 werden im Folgenden nicht gebraucht und können daher überschlagen werden.

Satz. $\frac{d}{x} u^z = u^z \left(l_e u \cdot \frac{d}{x} z + z \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right)$ 122.

Beweis: Setze $u^z = v$, ſo ist alſo $l_e v = z l_e u$, mithin

$\frac{d}{x} l_e v = \frac{d}{x} z l_e u$, alſo $\frac{\frac{d}{x} v}{v} = (l_e u) \frac{d}{x} z + z \frac{\frac{d}{x} u}{u}$ nach 112; mithin

$\frac{d}{x} v = v \left((l_e u) \frac{d}{x} z + z \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right)$ und, wenn u^z für v eingeführt wird.

$$\frac{d}{x} u^z = u^z \left((l_e u) \frac{d}{x} z + z \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right).$$

Satz. $\frac{d}{x} {u^z}^t = {u^z}^t \left((l_e u^z) \frac{d}{x} t + t (l_e u) \frac{d}{x} z + z \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right)$ 123.

Beweis: Man ſetze $u^z = y$, ſo ist nach 122

$$\frac{d}{x} {u^z}^t = \frac{d}{x} y^t = y^t \left((l_e y) \frac{d}{x} t + t \cdot \frac{\frac{d}{x} y}{y} \right)$$

$$= {u^z}^t \left((l_e u^z) \frac{d}{x} t + t \frac{\frac{d}{x} u^z}{u^z} \right)$$ mithin nach 122

$$= {u^z}^t \left((l_e u^z) \frac{d}{x} t + t (l_e u) \frac{d}{x} z + z \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right)$$

Satz. $\frac{d}{x} u^{(z^t)} = u^{(z^t)} \cdot z^t \left((l_e u)(l_e z) \frac{d}{x} t + t (l_e u) \frac{\frac{d}{x} z}{z} + \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right)$ 124.

Beweis: Man ſetze $z^t = y$, ſo ist nach 122

$$\frac{d}{x} u^{(z^t)} = \frac{d}{x} u^y = u^y \left((l_e u) \frac{d}{x} y + y \cdot \frac{\frac{d}{x} u}{u} \right)$$

$$= u^{(z^t)}\left((l_e u)\frac{d}{x} z^t + z^t \cdot \frac{\frac{d}{x} u}{u}\right)$$ mithin nach 122

$$= u^{(z^t)}\left[(l_e u) z^t \left((l_e z)\frac{d}{x} t + t \cdot \frac{\frac{d}{x} z}{z}\right) + z^t \frac{\frac{d}{x} u}{u}\right]$$

$$= u^{(z^t)} \cdot z^t \left((l_e u)(l_e z)\frac{d}{x} t + t (l_e u)\frac{\frac{d}{x} z}{z} + \frac{\frac{d}{x} u}{u}\right)$$

In Lacroix Traité du calcul différential et du calcul intégral Paris 1797 und 1810—1819 ist das $\frac{d}{x} u^{z^t}$ mit dem $\frac{d}{x} u^{(z^t)}$ verwechfelt und das letztere statt des erstern entwickelt.

125. **Satz.** $\frac{d}{x} \sin x = \cos x \qquad \frac{d}{x} \cos x = -\sin x$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von sinus x ist gleich dem cosinus x und der von cosinus x ist gleich minus sinus x.

Beweis: Nach 73 ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots = \mathfrak{S}(-1)^a \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots = \mathfrak{S}(-1)^a \frac{x^{2a}}{(2a)!}$$

wo $a! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(a-1)\cdot a$ ist.

Demnach ist, wenn man den Diff x von der Reihe der rechten Seite nach 105 nimmt

$$\frac{d}{x} \sin x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots = \cos x$$

denn es ist z. B. $\frac{d}{x}\left(\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right) = \frac{5x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ u. f. w.

Ebenfo folgt unmittelbar

$$\frac{d}{x} \cos x = -x + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots = -\sin x.$$

Ferner ergiebt fich unmittelbar

$$\frac{d}{x} (\sin x)^2 = 2(\sin x)\cos x = \sin 2x$$

$$\frac{d}{x} (\cos x)^2 = -2(\cos x)\sin x = -\sin 2x.$$

126. **Satz.** $\frac{d^n}{x} \sin x = \sin\left(\frac{n}{2}\pi + x\right)$; $\frac{d^n}{x} \cos x = \cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right)$

Der nte Diff x von sin x ist der Sinus von $\frac{n}{2}\pi + x$ und ebenso der nte Diff x von cos x ist der Cosinus von $\frac{n}{2}\pi + x$.

Beweis: Aus 125 folgt unmittelbar

$$\frac{d}{x}\sin x = \cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) \text{(nach Zahlenl. 460)}$$

$$\frac{d^2}{x}\sin x = \frac{d}{x}\cos x = -\sin x = \sin\left(\frac{2}{2}\pi + x\right) \qquad \text{desgl.}$$

$$\frac{d^3}{x}\sin x = \frac{d}{x}(-\sin x) = -\cos x = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) \text{ u. s. w.} \qquad \text{desgl.}$$

Ebenso folgt der Beweis für cos x.

Satz. $\frac{d}{x}\tan x = \frac{1}{(\cos x)^2}$; $\frac{d}{x}\cot x = -\frac{1}{(\sin x)^2}$ 127.

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von Tangente x ist gleich eins geteilt durch das Quader des Cosinus x und der von Cotangente x ist gleich minus eins geteilt durch das Quader des Sinus x.

Beweis: Es ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ mithin nach 94

$$\frac{d}{x}\tan x = \frac{(\cos x)\frac{d}{x}\sin x - (\sin x)\cdot\frac{d}{x}\cos x}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 \qquad \text{(nach Zahlenl. 467)}$$

Und ebenso $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ mithin nach 94

$$\frac{d}{x}\cot x = \frac{(\sin x)\frac{d}{x}\cos x - (\cos x)\cdot\frac{d}{x}\sin x}{(\sin x)^2} = \frac{-(\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{1}{(\sin x^2)} = -(1 + (\cot x)^2) \qquad \text{(nach Zahlenl. 467)}$$

Satz. $\frac{d}{x}\sec x = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$; $\frac{d}{x}\operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$ 128.

Beweis: Ganz wie bei 127.

Satz. $\frac{d}{x}\operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$; $\frac{d}{x}\operatorname{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$ 129.

Beweis: Nach 125 und nach 95 ist

$$\frac{d}{x}\sin y = \cos y \frac{d}{x}y = (1 - (\sin y)^2)^{1/2}\frac{d}{x}y$$

Setzen wir hier $\sin y = x$, ſo ist $y = \text{arc}(\sin = x)$ und wird die Formel
$\frac{d}{x} x = (1 - x^2)^{1/2} \frac{d}{x} \text{arc}(\sin = x)$, mithin da $\frac{d}{x} x = 1$ ist

$$\frac{d}{x} \text{arc}(\sin = x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$$

Und ebenſo folgt $\frac{d}{x} \text{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$

Ganz in gleicher Weiſe ergeben ſich die folgenden Sätze.

130. **Satz.** $\frac{d}{x} \text{arc}(\tan = x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $\frac{d}{x} \text{arc}(\cot = x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

131. **Satz.** $\frac{d}{x} \text{arc}(\sec = x) = \frac{1}{x(1 + x^2)^{1/2}}$; $\frac{d}{x} \text{arc}(\text{cosec} = x) = -\frac{1}{x(1 + x^2)^{1/2}}$

132. **Satz.** $\frac{d}{x} l_e \sin x = \cot x$; $\frac{d}{x} l_e \cos x = -\tan x$.

Beweis: Nach 112 ist $\frac{d}{x} l_e \sin x = \frac{\frac{d}{x} \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

Und ist $\frac{d}{x} l_e \cos x = \frac{\frac{d}{x} \cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

133. **Satz.** $\frac{d}{x} l_e \text{cosec}\, x = -\cot x$; $\frac{d}{x} l_e \sec x = \tan x$.

Beweis: Es ist $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$, alſo $l_e \text{cosec}\, x = -l_e \sin x$,
alſo ist

$\frac{d}{x} l_e \text{cosec}\, x = -\frac{d}{x} l_e \sin x = -\cot x$. Ebenſo $\frac{d}{x} l_e \sec = \tan x$.

134. **Satz.** $\frac{d}{x} l_e \tan x = \frac{1}{(\sin x) \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$;

$$\frac{d}{x} l_e \cot x = -\frac{1}{(\sin x) \cos x} = -\frac{2}{\sin 2x}$$

Beweis: Es $\frac{d}{x} l_e \tan x = \frac{\frac{d}{x} \tan x}{\tan x} = \frac{\cot x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x) \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$

Wir wollen nun zu der Betrachtung der Diffe von Folgen oder Funktionen einer Richtgröſse $x + iy$ übergehen. Jede ſolche Folge hat die Form $F_0(x + iy) = \Phi_0 x + i\Psi_0 iy$, wo $\Phi_0 x$ und $\Psi_0 x$ Reinfolgen oder reelle Funktionen ſind und zwei ſolche Folgen $F_0(x + iy)$ und $f_0(x + iy)$ ſind nach Zahlenlehre 426 dann und nur dann gleich, wenn ſowohl $\Phi_0 x = \varphi_0 x$, als auch $\Psi_0 y = \psi_0 y$ ist.

Setzen wir nun $x + iy = z$ und $\frac{d}{z} \text{fo}\, z = \text{fo}'\, z$, fo erhalten wir

$$\frac{d}{x} \text{fo}\, z = \left(\frac{d}{x} z\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z = \left(\frac{d}{x}(x + iy)\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z = \left(1 + i \frac{d}{x} y\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z = \frac{d}{z} \text{fo}\, z + i \left(\frac{d}{x} y\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z$$

$$\frac{d}{y} \text{fo}\, z = \left(\frac{d}{y} z\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z = \left(\frac{d}{y}(x + iy)\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z = \left(\frac{d}{y} x + i\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z = \left(\frac{d}{y} x\right) \frac{d}{z} \text{fo}\, z + i \frac{d}{z} \text{fo}\, z$$

Und ein Satz wird alfo nur dann für den Diff nach einer Richtgröse $x + iy$ gelten, wenn er fowohl für den Diff nach der ersten Gröse, als auch für den Diff nach der zweiten Gröse gilt. Dies führt uns zu dem folgenden Satze.

Erklärung. Wir fagen, ein Satz gelte für den Diff einer Folge einer Richtgröse nach diefer Gröse $\frac{d}{x + iy} F_0(x + iy)$ dann und nur dann, wenn er einerfeits für den Diff jener Folge nach der ersten Gröse x gilt, und andrerfeits für den Diff jener Folge nach der zweiten Gröse y gilt. 135.

Die folgenden Sätze werden uns die Anwendung diefes Satzes auf die einzelnen Fälle lehren.

Satz. $\frac{d}{x + iy} (x + iy)^c \overset{*}{=} c\, (x + iy)^{c-1}$ * **wo c eine reine Zahl** 136.

Beweis: $(x + iy)^c = [r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^c$ (nach Z. 439)
$= r^c (\cos c\alpha + i \sin c\alpha)$ (nach Z. 499)

wo $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ und $\tan \alpha = \frac{y}{x}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ (nach Z. 439)

Wir nehmen den Diff zuerst nach x und behandeln y als unveränderlich, dann ist

$$\frac{d}{x}(x + iy)^c = \frac{d}{x} r^c \cos c\alpha + i \frac{d}{x} r^c \sin c\alpha$$

$$= cr^{c-1} (\cos c\alpha) \frac{d}{x} r - cr^c (\sin c\alpha) \frac{d}{x} \alpha + i\, [cr^{c-1} (\sin c\alpha)] \frac{d}{x} r$$
$$+ cr^c (\cos c\alpha) \frac{d}{x} \alpha$$

und hier ist

$$\frac{d}{x} r = \frac{d}{x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\frac{d}{x} \alpha = \frac{d}{x} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{d}{x} \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \alpha}{r} \qquad \text{(nach 129)}$$

mithin ist

$$\frac{d}{x}(x+iy)^c = cr^{c-1}(\cos c\,\alpha)\cos\alpha + cr^{c-1}(\sin c\,\alpha)\sin\alpha$$
$$+\, i\,[cr^{c-1}(\sin c\,\alpha)\cos\alpha - cr^{c-1}(\cos c\,\alpha)\sin\alpha].$$
$$= cr^{c-1}[\cos(c-1)\alpha + i\sin(c-1)\alpha] \qquad \text{(nach Z. 453)}$$
$$= c\,(x+iy)^{c-1} \qquad \text{(nach Z. 439)}$$

Ebenſo folgt

$$\frac{d}{y}(x+iy)^c = i\cdot c\,(x+iy)^{c-1}$$

Der Satz gilt alſo ebenſo für den $\frac{d}{x}(x+iy)^c$, wie für den $\frac{d}{y}(x+iy)^c$, er gilt alſo nach 135 auch für den $\frac{d}{x+iy}(x+iy)^c$.

137. **Satz.** $\frac{d^m}{x+iy}(x+iy)^c \overset{*}{=} c\,(c-1)\cdots(c-m+1)\,(x+iy)^{c-m}$.

* wo c reine Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus wiederholter Anwendung von Satz 136.

138. **Satz.** $\frac{d^m}{x+iy}\,S\,a_a\,(x+iy)^a \overset{*}{=} \underset{m}{S}\,\frac{a!}{(a-m)!}\,a_a\,(x+iy)^{a-m}$

139. **Satz.** $\frac{d}{x+iy}(x+iy)^{-n} = -\,n\,(x+iy)^{-(n+1)}$;

$$\frac{d^a}{x+iy}(x+iy)^{-n} = (-1)^a\,n\,(n+1)\cdots(n+a-1)\,(x+iy)^{-(n+a)}$$

140. **Satz.** $\frac{d}{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x+iy)^{\frac{1}{n}-1}$

$$\frac{d^a}{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{a-1}(n-1)(2\,n-1)\cdots((a-1)\,n-1)\,(x+iy)^{\frac{1}{n}-a}$$

141. **Satz.** $\frac{d}{x+iy}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n}(x+iy)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$;

$$\frac{d^a}{x+iy}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a(n+1)(2n+1)\cdots((a-1)n+1)}{n^a}\,(x+iy)^{-\left(a+\frac{1}{n}\right)}$$

Alle dieſe Sätze folgen unmittelbar aus 135 und 136, wenn man statt c a, bez. — n, $\frac{1}{n}$ und $-\frac{1}{n}$ ſetzt.

142. **Satz.** $\frac{d}{x+iy}\,e^{x+iy} = e^{x+iy}$ $\qquad \frac{d^m}{x+iy}\,e^{x+iy} = e^{x+iy}$

Beweis: Nach Zahlenl. 521 ist $e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$ mithin ist

$$\frac{d}{x}e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^{x+iy},$$ da y als constant betrachtet, (nach 118)

$\frac{d}{y} e^{x+iy} = - e^x \sin y + ie^x \cos y = ie^{x+iy}$ (nach 125 und Z. 521)

Satz. $\frac{d^m}{x+iy} e^{a(x+iy)} = a^m e^{a(x+iy)}$ $\quad \frac{d^m}{x+iy} a^{x+iy} = (l_e a)^m \cdot a^{x+iy}$ 143.

Beweis: $\frac{d}{x+iy} e^{a(x+iy)} = \left(\frac{d}{x+iy} e^{a(x+iy)}\right) \frac{d}{x+iy} a(x+iy) = a \cdot e^{a(x+iy)}$

$\frac{d^2}{x+iy} e^{a(x+iy)} = \frac{d}{x+iy} a \cdot e^{a(x+iy)} = a^2 e^{a(x+iy)}$ u. ſ. w. alſo auch

$$\frac{d^m}{x+iy} e^{a(x+iy)} = a^m \cdot e^{a(x+iy)}$$

Es ist aber $a = e^{l_e a}$ alſo $a^{x+iy} = e^{l_e a(x+y)}$ mithin

$\frac{d^m}{x+iy} a^{x+iy} = \frac{d^m}{x+iy} e^{l_e a(x+iy)} = (l_e a)^m e^{l_e a(x+iy)} = (l_e a)^m a^{x+iy}$

Satz. $\frac{d}{x+iy} l_e(x+iy) \cong \frac{1}{x+iy}$; 144.

$$\frac{d^m}{x+iy} l_e(x+iy) \cong (-1)^{m-1}(m-1)!\frac{1}{(x+iy)^m}.$$

Beweis: Nach Zahlenlehre 535 ist:

$l_e(x+iy) \cong \frac{1}{2} l_e(x^2+y^2) + i\left[\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{y}{x}\right)\right]$ wo $\frac{y}{x}$ echt,

mithin ist nach 130

$\frac{d}{x} l_e(x+iy) \cong \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy}$ (nach Z. 432)

$\frac{d}{y} l_e(x+iy) \cong \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} = i\frac{x-iy}{x^2+y^2} = i\frac{1}{x+iy}$ (nach Z. 432)

2. Nach 137 ist

$\frac{d^m}{x+iy} l_e(x+iy) \cong \frac{d^{m-1}}{x+iy}(x+iy)^{-1} = (-1)^{m-1}(m-1)!\,(x+iy)^{-m}$

Satz. $\frac{d}{x+iy} \sin(x+iy) = \cos(x+iy)$; 145.

$$\frac{d}{x+iy}(\cos(x+iy)) = -\sin(x+iy)$$

Beweis: Nach Zahlenl. 548 ist $\sin(x+iy) = (\sin x)\cos iy + (\cos x)\sin iy$, wo $\cos iy = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$ und $\sin iy = i\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$, alſo y als constant betrachtet

$\frac{d}{x}\sin(x+iy) = (\cos x)\cdot\cos iy - (\sin x)\cdot\sin iy = \cos(x+iy)$

(nach Z. 548)

und ebenſo $\frac{d}{y}\sin(x+iy) = \frac{d}{y}\left[(\sin x)\frac{e^y+e^{-y}}{2} + i(\cos x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right]$.

$$= \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + i \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = i\,[(\cos x) \cdot \cos iy - i(\sin x) \sin iy]$$

$= i \cos(x + iy)$ (nach Z. 548)

Ebenfo folgt $\frac{d}{x} \cos(x + iy) = - \sin(x + iy)$; $\frac{d}{y} \cos(x + iy) =$ $- i \sin(x + iy)$.

146. **Satz.** $\frac{d^m}{x + iy} \sin(x + iy) = \sin\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$;

$$\frac{d^m}{x + iy} \cos(x + iy) = \cos\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$$

Beweis: Ganz wie zu Satz 126.

147. **Satz.** $\frac{d}{x + iy} \tan(x + iy) = \frac{1}{(\cos(x + iy))^2}$

$$\frac{d}{x + iy} \cot(x + iy) = - \frac{1}{(\sin(x + iy))^2}$$

Beweis: Entsprechend wie zu Satz 145.

148. **Satz.** $\frac{d}{x + iy} \sec(x + iy) = \frac{\sin(x + iy)}{(\cos(x + iy))^2}$

$= (\tan(x + iy)) \sec(x + iy)$

$$\frac{d}{x + iy} \operatorname{cosec}(x + iy) = - \frac{\cos(x + iy)}{(\sin(x + iy))^2} = - (\cot(x + iy)) \operatorname{cosec}(x + iy)$$

Beweis: Entsprechend wie zu Satz 145.

149. **Satz.** $\frac{d}{x + iy} \operatorname{A arc}(\sin = x + iy) \cong \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$

$$\frac{d}{x + iy} \operatorname{A arc}(\cos = x + iy) \cong - \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$$

Beweis: Ich werde den Beweis für $\operatorname{A arc}(\sin = x + iy)$ noch durchführen, für die andern Winkelfolgen ergiebt er fich in entsprechender Weife.

Es fei $\operatorname{Aarc}(\sin = x + iy) \cong \alpha + i\beta$,* fo haben wir nach Z. 548 $\sin(\alpha + i\beta) = (\sin\alpha) \cos i\beta + (\cos\alpha) \sin i\beta$

wo $\cos i\beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$ $\sin i\beta = i \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$

oder $\sin(\alpha + i\beta) = (\sin\alpha) \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + i (\cos\alpha) \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = x + iy$

alfo $x = (\sin\alpha) \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$ ** , $y = (\cos\alpha) \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$ ***

Und wenn wir die Diffe in Bezug auf x nehmen von *, **, ***

$$\frac{d}{x}\,\text{Aarc}\,(\sin = x + iy) \cong \frac{d}{x}\,\alpha + i\frac{d}{x}\,\beta$$

$$1 = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\,(\cos\alpha)\,\frac{d}{x}\,\alpha + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\,(\sin\alpha)\,\frac{d}{x}\,\beta$$

$$0 = -\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\,(\sin\alpha)\,\frac{d}{x}\,\alpha + \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\,(\cos\alpha)\,\frac{d}{x}\,\beta$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{d}{x}\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)\cos\alpha}{\left[\frac{1}{2}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)\cos\alpha\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)\sin\alpha\right]^2}$$

$$\frac{d}{x}\,\beta = \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)\sin\alpha}{\left[\frac{1}{2}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)\cos\alpha\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)\sin\alpha\right]^2}$$

Setzen wir hier

$\frac{1}{2}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)\cos\alpha = p$ und $\frac{1}{2}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)\sin\alpha = q$, so ist

$$\frac{d}{x}\,\alpha = \frac{p}{p^2 + q^2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{x}\,\beta = \frac{q}{p^2 + q^2}$$

und $\frac{d}{x}\,\text{Aarc}\,(\sin = x + iy) \cong \frac{d}{x}\,\alpha + i\frac{d}{x}\,\beta = \frac{p + iq}{p^2 + q^2} = \frac{1}{p - iq}$ (nach Z. 432)

$$\cong \frac{1}{\frac{1}{2}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)\cos\alpha - i\,\frac{1}{2}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)\sin\alpha}$$

$$\cong \frac{1}{(\cos i\beta)\cos\alpha - (\sin i\beta)\sin\alpha} \qquad \text{(nach Z. 548)}$$

$$\cong \frac{1}{\cos(\alpha + i\beta)} \qquad \text{(nach Z. 548)}$$

$$\cong \frac{1}{[1 - (\sin(\alpha + i\beta))^2]^{1/2}} \qquad \text{(nach Z. 441)}$$

$$\cong \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$$

Und ganz entsprechend ergiebt sich

$\frac{d}{y}\,\text{Aarc}\,(\sin = x + iy) \cong i\,\frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$. Ebenso Aarc · cosin.

Auch für den A arc gelten mithin alle die Gefetze für die Winkelgrösen oder komplexen Grösen, welche wir bei den Zahlgrösen oder reellen kennen gelernt haben.

150. **Satz.** $\frac{d}{x+iy} \text{ Aarc } (\tan = x + iy) \cong \frac{1}{1 + (x + iy)^2}$

$$\frac{d}{x+iy} \text{ Aarc } (\cot = x + iy) \cong - \frac{1}{1 + (x + iy)^2}$$

Beweis: Entsprechend wie zu 149.

151. **Satz.** $\frac{d}{x+iy} \text{ Aarc } (\sec = x + iy) \cong \frac{1}{(x + iy) [1 + (x + iy)^2]^{1/2}}$

$$\frac{d}{x+iy} \text{ Aarc } (\operatorname{cosec} = x + iy) \cong - \frac{1}{(x + iy) [1 + (x + iy)^2]^{1/2}}$$

Beweis: Entsprechend wie zu 149.

152. **Satz. Alle Grundformeln für die Diffe gelten alfo ebenfo für die Richtgrösen oder komplexen Grösen wie für die reinen Zahlen oder reellen Grösen.**

153. **Satz. Zu der Gleichung $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ ist $\frac{d}{x} y = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = 0$**

$$\frac{d^a}{x} y = a(a-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_a + (a+1) a \cdots 2a_{a+1} x + \cdots$$
$$+ n \cdot (n-1) \cdots (n-a) a_n x^{n-a} = 0.$$

Von jeder Gleichung nten Grades von x ist der erste Diff x eine Gleichung (n — 1)ten Grades, der ate Diff x eine Gleichung n — aten Grades von x.

Beweis: Der Satz ergiebt fich unmittelbar.

9. Die Eigenschaften für die Folgen der Zahlen- und Folgelehre.

Nachdem wir gelernt haben, aus einer ursprünglichen Folge oder Funktion die abgeleiteten Folgen oder die Diffe abzuleiten, fo können wir nun zu der Aufgabe übergehen, die Eigenschaften der Folgen und die Bedeutung ihrer Diffe zu erörtern.

Wir haben oben in Nr. 15 bewiefen, dass jede Reinfolge (reelle Funktion) von x, welche in den Grenzen von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn x wächst, innerhalb diefer Grenzen stetig ist, und haben in Nummer 28 bewiefen, dass diefe Reinfolge innerhalb diefer Grenzen einer echten steigenden Höhenreihe von x gleichgefetzt

werden kann, ſofern $x^2 < 1$ und zugleich keine Vorzahl der Reihe unendlich ist. Dieſen Satz werden wir im Folgenden zu Grunde legen, wo wir die Eigenschaften der Folgen unterſuchen und namentlich feststellen wollen, wieweit jede Folge von x stetig und reell bleibt.

Wir haben ferner im Obigen festgestellt, dass man nie durch Null teilen dürfe, da man ſonst zu den geſährlichsten Trugschlüssen gelangt. Nun geht aber, wenn x stetig von $-a$ bis $+a$ wächst, x durch Null hindurch, mithin geht, wenn $\frac{1}{x}$ stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $\frac{1}{0}$ und von $\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{a}$ wächst, die Folge $\frac{1}{x}$ durch $\frac{1}{0}$ hindurch. Wir ſagen nun auch hier die Folge $\frac{1}{x}$ wachſe stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{a}$, wenn x stetig von $-a$ bis $+a$ wächst.

Erklärung. Wenn eine Gröse x von $-a$ bis $+a$ stetig wächst, ſo ſagen wir, es wachſe auch die Gröse $\frac{1}{x}$ stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{a}$. 154.

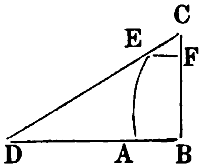
Jede Reinfolge (reelle Funktion) $f_0 x$ von x wächst aber stets mit wachſendem x, ſolange, als der erste Diff nach x von jener Folge eine Plusgröse ist, ſie bleibt alſo auch ebenſo lange stetig; ſie nimmt ferner stets mit wachſendem x ab, ſolange, als der erste Diff nach x von jener Folge eine Strichgröse (negativ) ist, ſie bleibt alſo auch hier ebenſolange stetig.

Die Stetigkeit der Reinfolge kann alſo nur da unterbrochen werden, wo der erste Diff nach x von jener Folge ſein Zeichen ändert, mit andern Worten, wo der erste Diff nach x von jener Folge entweder Null oder unendlich wird, d. h. wenn wir $y = f_0 x$ ſetzen, wo $\frac{d}{x}\, y = 0$ wird, oder wo $\frac{d}{x}\, y = \frac{1}{0}$ und alſo nach 154 $\dfrac{1}{\frac{d}{x}\, y} = 0$ wird. d. h. nach 96, wo $\frac{d}{y}\, x = 0$ wird.

Satz. Jede Reinfolge oder reelle Funktion $f_0 x$ von x bleibt ſolange stetig, als der erste Diff nach x von dieſer Folge ſein Zeichen nicht ändert, und zwar wächst die Reinfolge stetig mit wachſendem x, wenn dieſer Diff eine Plusgröse ist und nimmt die Reinfolge von x mit wachſendem x stetig ab, wenn dieſer Diff eine Strichgröse ist. 155.

Es ist wünschenswert, dass ſich jeder von dieſer Bedeutung des ersten Diff nach x von einer Folge von x, eine recht klare Vorstellung

mache. Man kann nun für jede Folge von x. d. h. für $y = f_0 x$, eine Kurve zeichnen, welche ganz genau dieſer Folge entspricht. Wir legen dabei rechtwinklige Koordinaten für x und y zu Grunde. Dann erhält für einen bestimmten Wert von x, d. h. für $x = AB$ auch $\frac{d}{x} y$ einen bestimmten Wert FC und zwar



ist, wenn wir an die Kurve eine Berührende (eine Tangente) CD ziehen, $\frac{d}{x} y = \frac{CF}{EF} = \frac{CB}{DB}$. Nennen wir den Winkel zwischen der Koordinate DB und der Berührenden DC den Winkel ζ, ſo ist $\frac{d}{x} y = \tan \zeta$. Für jeden Pluswert von $\frac{d}{x} y$ ist alſo ζ ein Winkel im ersten Kreisviertel oder Quadranten, d. h. ein echter Winkel, für jeden Strichwert von $\frac{d}{x} y$ hat $\tan \zeta$ einen Strichwert und ist alſo ζ ein Winkel im vierten oder zweiten Kreisviertel. Für $\frac{d}{x} y = 0$ ist $\tan \zeta$ und Winkel ζ gleich Null; für $\frac{d}{x} y = \frac{1}{0}$ ist Winkel ζ ein Rechter. Hiermit ist auch ſofort klar geworden, dass für $\frac{d}{x} y = 0$ die Kurve in dem entsprechenden Punkte gleichlaufend mit der Koordinate x, und für $\frac{d}{x} y = \frac{1}{0}$ oder für $\frac{d}{y} x = 0$ gleichlaufend mit der Koordinate y ist.

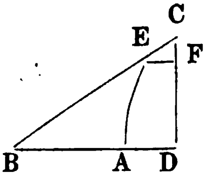
156. **Erklärung. Beſondere Werte der Reinfolge von x heisen die Werte dieſer Folge, für welche $\frac{d}{x} y$ bez. $\frac{d}{y} x$ gleich Null wird.**

Um die weiteren Eigenschaften von $f_0 x$, namentlich auch die Eigenschaften der beſondern Werte von $f_0 x$ kennen zu lernen, ist es wünschenswert die $f_0 (x \pm v)$ nach 100 zu entwickeln, ſoweit $v^2 < 1$ und die $\frac{d^a}{x} f_0 x$ alle endlich bleiben. Es ist aber $f_0 (x \pm v) = f_0 x \pm v \frac{d}{x} f_0 x + \frac{v^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2}{x} f_0 x + \cdots = S \frac{(\pm v)^a}{a!} \frac{d^a}{x} f_0 x$

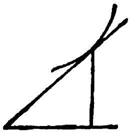
Hier kann man nun für jeden bestimmten Wert von x, für welchen nicht $\frac{d^a}{x} f_0 x$ unendlich wird (und letzteres geschieht, wenn es überhaupt geschieht, nur für einige bestimmte Werte von x), die benachbarten Werte ven $f_0 x$, ſowie die Diffe von $f_0 x$ bestimmen und daraus die Eigenschaften der Folge von x ableiten.

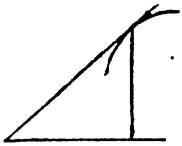
Betrachten wir wieder, um anschaulich zu ſein, eine Kurve mit rechtwinkligen Achſen, ſo giebt uns das erste Glied der Reihe $\pm v \frac{d}{x} f_0 x$ den Winkel ζ,

welchen die Berührende an dem bestimmten Punkte der Kurve mit der Achſe von x macht und zwar ist $\tan \zeta = \underset{x}{\mathfrak{d}} f_0 x$. Wir haben alſo für jeden bestimmten Wert von x durch den ersten Diff nach x von $f_0 x$ den Winkel, welchen die Kurve an dem bestimmten Punkte mit der x Achſe bildet.



Das zweite Glied der Reihe $+ \frac{v^2}{2} \underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x$ giebt uns an, um wieviel die Kurve an dem bestimmten Punkte von der Berührenden abweicht. Ist hier $\underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x$ für den bestimmten Wert von x ungleich Null, ſo behält dies Glied für $+ v$ und für $- v$ denſelben Wert, d. h. die Kurve bleibt vor und nach dem bestimmten Werte von x an derselben Seite der Berührenden. Ist $\underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x$ eine Plusgröse, ſo ist $y = f_0 x$ für $x - v$ und für $x + v$ gröser als für x d. h. die Kurve ist für den bestimmten Wert von x jenſeit der Berührenden von der x Achſe aus gerechnet. Ist $\underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x$ eine Strichgröse, ſo ist $y = f_0 x$ für $x - v$ und für $x + v$ kleiner als für x, d. h. dieſe Kurve ist für den bestimmten Wert von x diesſeit der Berührenden von der x Achſe aus gerechnet.





Die Gröse von $\frac{1}{2} \underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x$ giebt den Krümmungshalbmesser des in dieſem Punkte ſich anschmiegenden (osculirenden) Kreiſes.

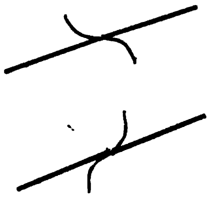
Wenn $\underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x = 0$ ist, ſo muss man die höhern Diffe $\underset{x}{\mathfrak{d}^a} f_0 x$ entwickeln, und kommt es nun darauf an, ob in dem nächsten höhern Diff $\underset{x}{\mathfrak{d}^a} f_0 x$, welcher ungleich Null ist. der Grad a gerade oder ungerade ist.

Ist der Grad a von $\underset{x}{\mathfrak{d}^a} f_0 x$ gerade, ſo gilt Alles beim $\underset{x}{\mathfrak{d}^2} f_0 x$ Geſagte. Sei alſo $a = 2c$, ſo ist das entsprechende Glied $+ \frac{v^{2c}}{(2c)!} \underset{x}{\mathfrak{d}^{2c}} f_0 x$. Dies Glied hat denſelben Wert für $x - v$ wie für $x + v$, die Kurve bleibt alſo auch hier vor und nach dem bestimmten Werte von x an derſelben Seite der Berührenden und zwar bleibt ſie, wenn der Diff $\underset{x}{\mathfrak{d}^{2c}} f_0 x$ eine Pluszahl ist, jenſeit, wenn derſelbe eine Strichzahl ist, diesſeit der Berührenden von der x Achſe aus gerechnet. Man nennt dies eine **Fortbeugung** (eine conflexio) der Folge $f_0 x$, und zwar die erstere eine **erhabene**, die zweite eine **hohle Beugung**.

Ist für den bestimmten Wert von x der erste Diff $\underset{x}{\mathfrak{d}} f_0 x$ gleich Null ge-

und zwar ihren grösten Wert, ihr Maximum, wenn $d_x^{2c} f_0 x$ eine Strichzahl ist, dagegen ihren kleinsten Wert, ihr Minimum, wenn $d_x^{2c} f_0 x$ eine Pluszahl ist.

Ist der Grad a von $d_x^{a} f_0 x$ ungerade und sei $a = 2c + 1$, so ist das entsprechende Glied $\pm \left(\frac{v^{2c+1}}{(2c+1)!} d_x^{2c+1} f_0 x\right) = \pm \varphi_0 x$. Dies Glied hat also entgegengesetzten Wert für $x - v$ und für $x + v$; für $x - v$ ist es gleich $- \varphi_0 x$, für $x + v$ gleich $+ \varphi_0 x$. Hier tritt also die Kurve vor und nach dem bestimmten



Werte von x an verschiedene Seiten der Berührenden und zwar tritt sie, wenn der Diff $d_x^{2c+1} f_0 x$ eine Strichzahl ist, von der jenseitigen nach der diesseitigen Seite der Berührenden über, dagegen tritt sie, wenn der Diff $d_x^{2c+1} f_0 x$ eine Pluszahl ist, von der diesseitigen nach der jenseitigen Seite der Berührenden über, wobei die diesseitige und jenseitige Seite der Berührenden von der x Achse aus gerechnet wird. Man nennt dies eine Umbeugung (eine inflexio) der Folge $f_0 x$ und zwar die erstere eine senkende, die zweite eine erhebende Umbeugung.

157.

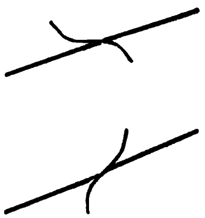
Erklärung. Wenn bei einer Reinfolge von x, d. h. $f_0 x$ für einen bestimmten Wert von x, für welchen die Diffe endlich bleiben und der erste höhere Diff, welcher ungleich Null ist, $\frac{v^a}{a!} d_x^a f_0 x$ für $+ v$ und $- v$ dasselbe Vorzeichen hat, so sagen wir, die Reinfolge von x habe für diesen Wert von x eine Fortbeugung (conflexio) und zwar eine hohle Fortbeugung, wenn jene Summe eine Strichgröse, dagegen eine erhabene Fortbeugung, wenn jene Summe eine Plusgröse ist.

158. **Satz. Jede Reinfolge (reelle Funktion) von x behält für jeden bestimmten Wert von x, für welchen die Diffe endlich bleiben und auserdem der nächst höhere Diff auser dem ersten, welcher ungleich Null ist, von geradem Grade $d_x^{2c} f_0 x$ ist, eine Fortbeugung und zwar eine hohle Fortbeugung, wenn $d_x^{2c} f_0 x$ eine Strichzahl, dagegen eine erhabene Fortbeugung, wenn $d_x^{2c} f_0 x$ eine Pluszahl ist.**

Satz. Jede Reinfolge von x hat für einen bestimmten Wert $x = a$ einen Grenzwert, d. h. einen grösten oder kleinsten Wert, wenn, ſofern alle Diffe endlich bleiben, der erste Diff nach x gleich Null ist, und der nächst höhere Diff, welcher ungleich Null ist, von geradem Grade $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ ist. Und zwar hat die Reinfolge ihren grösten Wert, ihr Maximum, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ eine Strichzahl, dagegen ihren kleinsten Wert, ihr Minimum, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ eine Pluszahl ist. 159.

Der Beweis für dieſe Sätze ist in der Vorentwicklung enthalten.

Erklärung. Wenn bei einer Reinfolge von x d. h. $f_0 x$ für einen bestimmten Wert von x der erste höhere Diff, welcher ungleich Null ist, $\frac{v^a}{a!} \frac{d^a}{x} f_0 x$ für $+v$ und $-v$ entgegengeſetzte Vorzeichen erhält, ſo ſagen wir, die Reinfolge von x habe für dieſen Wert von x eine Umbeugung (inflexio) und zwar eine ſenkende Umbeugung, wenn jene Summe für $+v$ eine Strichgröse, dagegen eine erhebende Umbeugung, wenn jene Summe für $+v$ eine Plusgröse ist. 160.



Satz. Jede Reinfolge (reelle Funktion) von x hat für jeden bestimmten Wert von x, für welchen die Diffe endlich bleiben und auserdem der nächst höhere Diff auser dem ersten, welcher ungleich Null ist, von ungeradem Grade $\frac{d^{2c+1}}{x} f_0 x$ ist, eine Umbeugung und zwar eine ſenkende, wenn $\frac{d^{2c+1}}{x} f_0 x$ eine Strichzahl, dagegen eine erhebende, wenn $\frac{d^{2c+1}}{x} f_0 x$ eine Pluszahl ist. 161.

Der Beweis für dieſen Satz ist in der Vorentwicklung enthalten.

Nach dieſer Betrachtung der Reinfolgen im Allgemeinen wenden wir uns nun zur Betrachtung der einzelnen Gattungen von Reinfolgen und zwar zunächst Betrachtung der Höhen und Höhenreihen der Veränderlichen.

Satz. Jede Höhe von x zu einer ganzen Stufe n ist stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich. 162.

Beweis: 1. Sei x eine Pluszahl, ſo wird, wenn auch n eine Pluszahl ist, auch x^n nach Zahlenlehre 377 bei wachſendem x stets wachſen,

alſo ist die Folge x^n nach 15 eine stetige Folge für jede Pluszahl x. Sei n eine Strichzahl, alſo $n = -m$, wo m eine Pluszahl, ſo ist $x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$. Nun ist aber, wenn $x \gtrless 0$ ist $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ und ebenſo $\left(\frac{1}{x}\right)^m \cdot x^m = 1$, mithin nimmt $\frac{1}{x}$ und ebenſo $\left(\frac{1}{x}\right)^m$ stets ab, wenn x oder x^m wächst, alſo ist auch die Folge $\left(\frac{1}{x}\right)^m = x^n$ nach 15 eine stetige Folge, wenn auch n eine Strichzahl ist.

2. Sei x eine Strichzahl, alſo $x = -y$, wo y eine Pluszahl, ſo ist $y - y = 0$ d. h. es nimmt, wenn $-y$ wächst, $+y$ stets ab. Sei nun n eine gerade Zahl, ſo ist $(-y)^n = (+y)^n$ nach Zahlenlehre 330, mithin wenn $-y$ wächst, ſo nimmt $+y$ und nach 1 dieſes Satzes auch $(+y)^n = (-y)^n$ stets ab, die Folge $(-y)^n = (+y)^n$ ist alſo nach 15 eine stetige Folge.
Sei dagegen n eine ungerade Zahl, ſo ist nach Zahlenlehre 330 $(-y)^n = -(+y)^n$, wenn alſo $-y$ wächst, ſo nimmt $+y$ und $(+y)^n$ stets ab, und wird alſo, da $(+y)^n - (+y)^n = 0$ ist, $(-y)^n$ stets wachſen, die Folge $(-y)^n$ ist alſo auch in dieſem Falle nach 15 eine stetige Folge.

3. Uns bleibt nun noch der Fall zu betrachten, wenn $x = 0$ ist, dann ist, ſofern n eine Pluszahl ist,

$x^n = 0$ und ist, ſo lange $a < n$ ist, $\underset{x}{d}^{n-a} x^n = n(n-1)\cdot(n-a+1)\, x^{n-a} = 0$

und wird für $\underset{x}{d}^n x^n = n\,(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot$

d. h. die Folge wächst dann auch, wenn x wächst, die Folge bleibt alſo auch in dieſem Falle stetig.

Wenn n eine Strichzahl, alſo $= -m$ ist, wo m eine Pluszahl, ſo ist $x^n = x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ alſo ist für $x = 0$

$x^n = x^{-m} = \frac{1}{0}$ und werden auf alle Diffe von x gleich $\frac{1}{0}$. Dann ist aber $\left(\frac{1}{x}\right)^n = x^m$ und wächst stetig, auch wenn x Null wird, mithin ist auch x^n nach 159 stetig, wenn x Null wird.

163. **Satz. Die Höhe von x zu einer ganzen Stufe n hat, wenn n eine Pluszahl ist, bei $x = 0$, wenn n eine Strichzahl ist, bei $\frac{1}{x} = 0$**

eine Beugung und zwar ist diese Beugung bei ungeradem n eine Fortbeugung und bei geradem n eine Umbeugung.

Beweis: 1. Sei x eine Pluszahl, so ist, wenn n ungerade ist, nach Zahlenlehre 330 für $-x$ auch $(-x)^n = -(x)^n$ eine Strichgröse und für $+x$ auch $(+x)^n = +(x)^n$ eine Plusgröse, und es nimmt, wenn $-x$ wächst, d. h. sich dem Null nähert, auch $(-x)^n$ ab und nähert sich der Null, bis es für $x = 0$ auch Null wird; ebenso wächst, wenn $+x$ wächst, auch $(+x)^n$, es findet also die Folge bei $x = 0$ nach 157 eine Fortbeugung.

Wenn n gerade ist, so ist nach Zahlenlehre 330 für $-x$ dagegen $(-x)^n = +x^n$ eine Plusgröse, und ebenso für $+x$ auch $(+x)^n = +x^n$ eine Plusgröse. Wenn also $-x$ wächst und sich der Null nähert, nimmt $+x$ und ebenso die Plusgröse $+x^n$ ab und nähert sich der Null, bis endlich für $-x = 0$ auch $+x^n = 0$ wird, mit wachsendem $+x$ wächst dann auch wieder $+x^n$. Hier erfährt also die Folge bei $x = 0$ eine Umbeugung, d. h. sie geht von $+\infty$ bis 0 herab und steigt dann wieder von 0 bis $+\infty$.

2. Wenn n eine Strichzahl gleich $-m$ ist, wo m eine Pluszahl ist, so wird $x^n = x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ und hat also stets den umgekehrten Wert von x^m. Wenn demnach x^m stetig durch Null geht, so geht $x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ stetig durch $\frac{1}{0}$, und beugt für diesen Wert ebenso, wie x^m, d. h. es findet für ungerades n eine Fortbeugung und für gerades n eine Umbeugung statt.

Satz. Jede Höhe einer Pluszahl zur gebrochenen Stufe, zur $\frac{m}{n}$ Stufe ist stetig. 164.

Beweis: Da x eine Pluszahl ist, so ist auch $x^{\frac{1}{n}} = y$ eine Pluszahl, und gilt für diese der Satz nach 163.

Satz. Wenn x und a_α Plusgrösen sind, so ist $\underset{0,n}{S} a_\alpha x^\alpha$ eine stetige Folge, sofern alle a_α endliche Werte haben und auch n endlich ist. 165.

Beweis: Da für x auch x^α stetig ist, und auch a_α eine endliche Gröse ist, so ist auch $a_\alpha x^\alpha$ eine Gröse, welche stets wächst, wenn x wächst und ist also auch $\underset{0,n}{S} a_\alpha x^\alpha$ eine Gröse, welche stets wächst, wenn x wächst, d. h. es ist nach 15 $\underset{0,n}{S} a_\alpha x^\alpha$ eine stetige Folge von x.

Wenn x eine Strichgröse wird $= -y$, fo wird x^n für gerades n $(-y)^n = (+y)^n$, dagegen für ungerades n $(-y)^n = -(+y)^n$ und wechfeln alfo in der $\underset{0,n}{S} a_a x^a$ die Glieder die Vorzeichen. Ebenfo wenn a_a bald eine Pluszahl, bald eine Strichzahl ist, fo wechfeln gleichfalls die Glieder ihre Vorzeichen und kann die Folge $\underset{0,n}{S} a_a x^a$ die mannigfachsten Werte annehmen, je nachdem die Zeichen und Werte wechfeln. Die Folge $\underset{0,n}{S} a_a x^a$ nennt man eine Gleichung nten Grades von x; dies führt uns alfo zur Betrachtung der Gleichungen.

Die Eigenschaften der Gleichungen nten Grades.

Um diefe Gleichungen bequem betrachten zu können, fetzen wir $\underset{0,n}{S} a_a x^a = z$ und leiten für diefe Folge von x die Diffe nach x von z ab. Wir fetzen demnächst $z = y^m$ und leiten die Diffe nach x von y ab und betrachten demnächst die Eigenschaften der Gleichungen.

166. **Satz.** Für $z = \underset{0,n}{S} a_a x^a$ ist $\frac{d}{x} z = \underset{1,n}{S} a a_a x^{a-1}$

$$\frac{d^2}{x} z = \underset{2,n}{S} a(a-1) a_a x^{a-2} \qquad \frac{d^c}{x} z = \underset{c,n}{S} a(a-1)\cdot\cdot(a-c+1) a_a x^{a-c}$$

Beweis: $z = \underset{0,n}{S} a_a x^a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$

$$\frac{d}{x} z = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} = \underset{1,n}{S} a a_a x^{a-1}$$

$$\frac{d^2}{x} z = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} = \underset{2,n}{S} a(a-1) a_a x^{n-2}$$

$$\frac{d^c}{x} z = c(c-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\, a_c \cdot\cdot + n(n-1)\cdots(n-c+1) a_n x^{n-c}$$

$$= \underset{c,n}{S} a(a-1)\cdot\cdot(a+c+1) a_a x^{a-c}$$

Diefer Satz ist von gröster Wichtigkeit für die Gleichungen und vereinfacht die letztern ungemein, da man bei den Gleichungen stets auf $\frac{d}{x} z$ und $\frac{d^2}{x} z$ zurückgehen muss.

167. **Satz.** Wenn $y^m = z = \underset{0,n}{S} a_a x^a$ ist, fo ist $y = z^{\frac{1}{m}}$

$$\frac{d}{x} y = \frac{\frac{d}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \cdot \frac{\frac{d}{x} z}{z}$$

$$\frac{d^2}{x} y = \frac{\frac{d^2}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^2 \cdot z^{2-\frac{1}{m}}} = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\frac{d^2}{x} z}{z} - \frac{(m-1)}{m} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{z^2}\right]$$

$$\frac{d^3}{x}y = \frac{\frac{d^3}{x}z}{m\cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 3\,\frac{(m-1)\left(\frac{d^2}{x}z\right)\frac{d}{x}z}{m^2\cdot z^{2-\frac{1}{m}}} + \frac{(m-1)(2m-1)\left(\frac{d}{x}z\right)^3}{m^3\cdot z^{3-\frac{1}{m}}}$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\frac{d^3}{x}z}{z} - 3\,\frac{(m-1)\left(\frac{d^2}{x}z\right)\frac{d}{x}z}{m\cdot z^2} + \frac{(m-1)(2m-1)\left(\frac{d}{x}z\right)^3}{m^2\cdot z^3}\right]$$

$$\frac{d^4}{x}y = \frac{\frac{d^4}{x}z}{m\cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 4\,\frac{(m-1)\left(\frac{d^3}{x}z\right)\frac{d}{x}z}{m^2\cdot z^{2-\frac{1}{m}}} - 3\,\frac{(m-1)\left(\frac{d^2}{x}z\right)^2}{m^2\cdot z^{2-\frac{1}{m}}}$$

$$+ 6\,\frac{(m-1)(2m-1)\left(\frac{d^2}{x}z\right)\left(\frac{d}{x}z\right)^2}{m^3\cdot z^{3-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)\left(\frac{d}{x}z\right)^4}{m^4\cdot z^{4-\frac{1}{m}}}$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\frac{d^4}{x}z}{z} - 4\,\frac{(m-1)\left(\frac{d^3}{x}z\right)\frac{d}{x}z}{m\cdot z^2} - 3\,\frac{(m-1)\left(\frac{d^2}{x}z\right)^2}{m\cdot z^2}\right.$$

$$\left. + 6\,\frac{(m-1)(2m-1)\left(\frac{d^2}{x}z\right)\left(\frac{d}{x}z\right)^2}{m^2\cdot z^3} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)\left(\frac{d}{x}z\right)^4}{m^3\cdot z^4}\right]$$

Beweis: $\frac{d}{x}y = \frac{d}{x}z^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{d}{z}z^{\frac{1}{m}}\right)\frac{d}{x}z = \frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}\frac{d}{x}z$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{d}{x}z$$

$$\frac{d^2}{x}y = \frac{d}{x}\frac{d}{x}y = \frac{d}{x}\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{d}{x}z$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{d^2}{x}z + \left(\frac{d}{z}\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\right)\left(\frac{d}{x}z\right)^2$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{d^2}{x}z - \frac{m-1}{m^2}\,\frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}}\left(\frac{d}{x}z\right)^2$$

$$\frac{d^3}{x}y = \frac{d}{x}\frac{d^2}{x}y = \frac{d}{x}\left[\frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{d^2}{x}z - \frac{m-1}{m^2}\,\frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}}\left(\frac{d}{x}z\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{d^3}{x}z - \frac{m-1}{m^2}\,\frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}}\left(\frac{d^2}{x}z\right)\frac{d}{x}z - 2\,\frac{m-1}{m^2}\,\frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}}\left(\frac{d^2}{x}z\right)\frac{d}{x}z$$

$$+ \frac{(m-1)(2m-1)}{m^3}\,\frac{1}{z^{3-\frac{1}{m}}}\left(\frac{d}{x}z\right)^3$$

Man ſagt nun, die Gleichung ſei aufgelöſ't, wenn die Werte von x gefunden ſind, für welche

$$\underset{0,n}{S} a_a x^a = z = y^m = o \qquad \text{alſo auch } y = o$$

wird. Für dieſe Werte von x wird aber

$$\frac{\mathfrak{d}}{x} y = \frac{\frac{\mathfrak{d}}{x} z}{m\, y^{m-1}} = \frac{1}{0}, \text{ ebenſo } \frac{\mathfrak{d}^a}{x} y = \frac{1}{0}$$

oder da nach 96 $\frac{\mathfrak{d}}{y} x = \frac{1}{\frac{\mathfrak{d}}{x} y}$ ist, ſo wird für dieſe Werte $\frac{\mathfrak{d}}{y} x = 0$, d. h. für dieſe Werte ist die Kurve gleichlaufend mit der Yachſe, oder ſie steht ſenkrecht auf her Xachſe und müssen daher die Diffe nach x von y, um von y = 0 zu endlichen Werten von y $\gtrless$ 0 zu gelangen, unendlich werden. Für dieſe Diffe, wo y = 0, ist aber die Betrachtung der Diffe $\frac{\mathfrak{d}}{x} y$ ganz unbrauchbar und muss man ſie von der Betrachtung ausschliesen. Will man die Diffe für dieſe Punkte der Kurve betrachten, ſo muss man entweder x als Folge von y entwickeln und dann $\frac{\mathfrak{d}^a}{y} x$ entwickeln oder man muss, wenn x = c eine Wurzel der Gleichung ist, die Gleichung für x = c ± h berechnen oder aber man muss $y^m = y'^m - a^m$ ſetzen, dann wird $y'^m = a^m - z$, alſo $y' = (a^m - z)^{\frac{1}{m}}$ und ungleich Null.

Für die Betrachtung der Eigenschaften der Gleichungen n ten Grades ſind aber die Punkte dieſer n Wurzeln auch meist von untergeordneter Bedeutung und kommt es vielmehr darauf an, die Eigenschaften der Gleichungen und Kurven für die Werte x = a alſo gleich 0, 1, 2 · · · zu betrachten, für welche y nicht gleich Null wird. Es ergeben ſich demnach folgende Sätze.

168. **Satz. Bei jeder Gleichung $\underset{0,n}{S} a_a x^a = z = y^m$ kann man für jeden bestimmten Wert von x den Wert von z und von y, und ebenſo von $\frac{d}{x} z$ bis $\frac{d^c}{x} z$ und auch von $\frac{d}{x} y$ und $\frac{d^c}{x} y$ ohne Weiteres ableiten, und daraus den Lauf der Kurve und die Art und Gröse der Beugung für jeden Punkt der Kurve bestimmen.**

Beweis: Unmittelbar.

169. **Satz. Jede Gleichung n ten Grades kann man, ſofern nicht die Vorzahl $a_n = 0$ ist, und alſo das letzte Glied fortfällt, auf die Form bringen**

$$y^m = z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

und die n Wurzeln dieſer Gleichung, welche z bez. y gleich Null machen, ſind dann

$$y^m = z = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n)$$ **und giebt es keine weitern Werte von x, welche z und y gleich Null machen.**

Beweis: Unmittelbar aus Zahlenlehre 571.

Satz. Für die n Wurzelwerte der Gleichung sind alle Diffe nach x von y unendlich und kann man die benachbarten Werte für eine dieser Wurzeln c_a und die Eigenschaften der Kurve für diesen Punkt nur finden, wenn man entweder die Gleichung für $x = c_a \pm h$ entwickelt, oder wenn man $\frac{d}{y}x$ entwickelt, oder wenn man $y'^m = y^m + a^m$ setzt. 170.

Beweis: Unmittelbar nach 157.

Um Beispiele für diese Berechnung zu geben, berechne ich drei Gleichungen nach dieser Methode, welche uns gleichzeitig drei Arten besonderer Werte kennen ehren: die Rückbeugung, den vielfachen Punkt und den abgesonderten Punkt.

Sei zunächst $(y - a)^2 = b^2 x^3$, also $y = a \pm b x^{3/2}$, so ist

$$\frac{d}{x} y = \pm \frac{3}{2} b x^{1/2}$$

$$\frac{d^2}{x} y = \pm \frac{3}{4} b x^{-1/2} = \pm \frac{3}{4} \frac{b}{x^{1/2}}$$

Hier wird für $x = 0$

$$y = a \qquad \frac{d}{x} y = 0 \qquad \frac{d^2}{x} y = \frac{1}{0}.$$

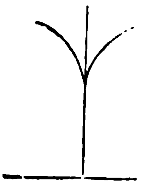
Ferner werden für $x = -h$

$$y = a \pm ibh^{3/2} \qquad \frac{d}{x} y = \pm \frac{3}{2} ibh^{1/2} \qquad \frac{d^2}{x} y = \mp \frac{3}{4} ib \frac{1}{h^{1/2}}$$

d. h. alle diese Folgen sind ohne reellen Wert oder imaginär. Dagegen werden für $x = + h$

$$y = a \pm bh^{3/2} \qquad \frac{d}{x} y = \pm \frac{3}{2} bh^{1/2} \qquad \frac{d^2}{x} y = \pm \frac{3}{4} \frac{b}{h^{1/2}}$$

d. h. Es hat y für $x = + h$ zwei Werte, einen grösern als für $x = 0$ und einen kleinern, und für den erstern ist die Beugung nach oben, für den andern ist die Beugung nach unten, wie in der nebenstehenden Kurve. Man nennt dies eine Rückbeugung oder Reflexio. Das y hat hier für $x = 0$ seinen Grenzwert.



Entwickeln wir x als Folge von y, so ergiebt sich unmittelbar $\left(\frac{y - a}{b}\right)^2 = x^3$ also

$x = \left(\frac{y}{b} - \frac{a}{b}\right)^{2/3}$ und setzen wir $\frac{y}{b} = y'$ $\frac{a}{b} = c$, so erhalten wir

$$x = (y' - c)^{2/3} \qquad \frac{d}{y'} x = \frac{2}{3} \frac{1}{(y' - c)^{1/3}} \qquad \frac{d^2}{y'} x = - \frac{2}{9} \frac{1}{(y' - c)^{4/3}}$$

Hier wird für $y' = c$

$$x = 0 \qquad \frac{d}{y'} x = \frac{1}{0} \qquad \frac{d^2}{y'} x = - \frac{1}{0}$$

Hier ist alſo für $y' = c$ die Berührende ſenkrecht auf der Y'achſe, es ist $x = 0$ ein kleinster Wert oder ein Minimum, und ist für

$$y' = c \pm h \qquad \underset{y'}{\mathfrak{d}^2} x = -\frac{2}{9} + \frac{1}{(\pm h)^{4/3}} = -\frac{2}{9}\,\frac{1}{h^{4/3}}$$

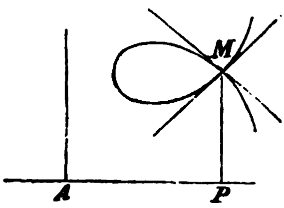
d. h. die krumme Linie hat ihre hohle Seite nach der Y'achſe hin liegend.

Sei als zweites Beispiel $(y - b)^2 = (x - a)^2 (x - c)$ genommen, mithin

$$y = b \pm (x - a)(x - c)^{1/2} \qquad \text{ſo ist } \underset{x}{\mathfrak{d}}\, y = \pm (x - c)^{1/2} \pm \frac{x - a}{2(x-c)^{1/2}}$$

Hier ist für $x = a$

$$y = b \qquad \underset{x}{\mathfrak{d}}\, y = \pm (x - c)^{1/2}$$



d. h. dem einfachen Werte von $y = b$ entsprechen zwei erste Diffe $\underset{x}{\mathfrak{d}}\, y = + (x - c)^{1/2}$ und $\underset{x}{\mathfrak{d}}\, y = - (x - c)^{1/2}$ und bilden zwei Zweige der Werte y. Betrachten wir die entsprechende Kurve, ſo finden wir in dem Punkte $x = a$, $y = b$ den Durchschnitt zweier Zweige der Kurve. Man nennt dieſen Punkt bei den Kurven einen vielfachen Punkt.

Sei endlich $y^2 = \frac{x^2 (x - b)}{a}$, alſo $y = \pm \left(\frac{x^2 (x - b)}{a}\right)^{1/2}$

$$\text{ſo ist } \underset{x}{\mathfrak{d}}\, y = \pm \frac{x (3x - 2b)}{2 (ax^2 (x - b))^{1/2}} = \pm \frac{3x - 2b}{2 (a (x - b))^{1/2}}$$

Hier ist für $x = 0$

$$y = 0 \qquad \underset{x}{\mathfrak{d}}\, y = \mp \frac{2b}{2(-ab)^{1/2}} = \mp i \frac{2b}{2(ab)^{1/2}}$$

d. h. es giebt für $x = 0$ und $y = 0$ keinen reellen Diff. Betrachten wir die entsprechende Kurve, ſo ist der Punkt für $x = 0$, $y = 0$ ein einzelner von der Kurxe abgeſonderter oder iſolirter Punkt, auch conjugirter Punkt genannt, bei dem die Fortſetzung eine Jgröse oder imaginär geworden ist.

171. **Satz. Für alle Werte von x auser den n Wurzeln der Gleichung bleiben y^m und $z = \underset{0,n}{S} a_a x^a$ ungleich Null und alle Diffe nach x von y endlich und kann man die Sätze 157, 158, 160, 165, 166 ohne Weiteres anwenden.**

172. **Satz. Die Gleichung nten Grades $y = z^{\frac{1}{m}} = \left[\underset{0,n}{S} a_a x^a\right]^{\frac{1}{m}}$ hat einen Grenzwert, d. h. ein Maximum oder Minimum für die Werte von x ungleich einer Wurzel, für welche der nächste Diff von $\underset{x}{\mathfrak{d}^a} z$, welcher für dieſen Wert von x ungleich Null wird, von geradem Grade $\underset{x}{\mathfrak{d}^{2c}} z$ ist. Und zwar ist der Wert von y ein gröster Wert,**

wenn $\underset{x}{d}^{2c} z$ eine Strichzahl, dagegen ist derselbe ein kleinster Wert, wenn $\underset{x}{d}^{2c} z$ eine Pluszahl ist.

Beweis: Soll der Wert von y für ein bestimmtes x ein Grenzwert sein, so muss nach 159 $\underset{x}{d} y = 0$, und sofern $\underset{x}{d}^{2c} y = 0$ ist, auch $\underset{x}{d}^{2c+1} y = 0$ sein und sofort, so dass der erste Diff nach x von y, welcher ungleich Null ist, von geradem Grade sein muss.

Nach 167 ist aber

$$\underset{x}{d} y = \frac{\underset{x}{d} z}{m \cdot y^{m-1}}, \quad \underset{x}{d}^2 y = \frac{\underset{x}{d}^2 z}{m \cdot y^{m-1}} - \frac{(m-1)\left(\underset{x}{d} z\right)^2}{m^2 y^{2m-1}}$$

$$\underset{x}{d}^3 y = \frac{\underset{x}{d}^3 z}{m \cdot y^{m-1}} - 3\frac{(m-1)\left(\underset{x}{d}^2 z\right)\underset{x}{d} z}{m^2 y^{2m-1}} + \frac{(m-1)(2m-1)\left(\underset{x}{d} z\right)^3}{m^3 y^{3m-1}} \text{ u. s. w.}$$

Hier ist, da x stets ungleich einer Wurzel ist, auch $y \gtrless 0$ und da auch $m \gtrless 0$ ist, so ist der Nenner stets ungleich Null, und wird also $\underset{x}{d}^a y$ stets dann Null werden, wenn der Zähler Null wird, d. h. es wird $\underset{x}{d} y = 0$, wenn $\underset{x}{d} z = 0$; es wird dann aber auch $\underset{x}{d}^2 y = 0$, wenn $\underset{x}{d}^2 z = 0$ wird u. s. w.

Sei nun $\underset{x}{d}^{2c} y$ der erste Diff, der ungleich Null ist, so verschwinden in der Formel für denselben alle Glieder auser dem ersten, da in jedem derselben mindestens eine der Grösen $\underset{x}{d} z = 0$, $\underset{x}{d}^2 z = 0$, $\underset{x}{d}^3 z = 0$ $\underset{x}{d}^{2c-1} z = 0$ im Zähler vorkommt, und bleibt nur als erstes Glied

$$\underset{x}{d}^{2c} y = \frac{\underset{x}{d}^{2c} z}{m \cdot y^{m-1}}$$

d. h. dies wird ungleich Null, wenn $\underset{x}{d}^{2c} z \gtrless 0$ ist.

Für $+ y$ haben dann $\underset{x}{d}^{2c} y$ und $\underset{x}{d}^{2c} z$ gleiche Vorzeichen. Nach 159 wird also $+ y$ ein gröster Wert, wenn $\underset{x}{d}^{2c} z$, also auch $\underset{x}{d}^{2c} y$ eine Strichzahl ist und wird $+ y$ ein kleinster Wert, wenn $\underset{x}{d}^{2c} z$ eine Pluszahl ist.

Als Beispiel diene die Gleichung:

$$y^3 = z = a_0 - a_1^2\, x + x^3$$

$$\underset{x}{d}\, z = - a_1^2 + 3\, x^2$$

$$\underset{x}{d^2}\, z = 3 \cdot 2x$$

Hier ist für $\underset{x}{d}\, z = 0$, $x^2 = \frac{1}{3} a_1^2$, $x = \pm a_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$, $y = \left(a_0 \pm 2 \sqrt{\frac{1}{3}}\, a^3\right)^{1/3} \gtrless 0.$

Hier ist also y für $x = + a_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Maximum, für $x = - a_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Minimum.

173. **Satz. Für alle Gleichungen nten Grades $y^{\frac{1}{m}} = z = \underset{0,n}{S}\, a_a\, x^a$ gelten für alle bestimmten Werte von x, welche ungleich einer Wurzel sind, und für welche der erste Diff nach x von y $\gtrless$ 0 ist, während die nächst höhern Diffe $\underset{x}{d^2} y$, $\underset{x}{d^3} y \cdots \underset{x}{d^c} y$ gleich Null sind, und der erste nächst höhere Diff, der ungleich Null ist $\underset{x}{d^{c+1}} y$ ist, für alle diese Gleichungen gelten folgende Formeln**

$$\underset{x}{d}\, y = \frac{z^{\frac{1}{m}} \cdot \underset{x}{d}\, z}{m \cdot z}\ ; \quad \underset{x}{d}\, z \gtrless 0$$

$$\underset{x}{d^c}\, y = 0\,; \quad \frac{\underset{x}{d^c}\, z}{z} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2) \cdots (m-c+1)}{m^c}\, \frac{\left(\underset{x}{d}\, z\right)^c}{z^c}$$

$$\underset{x}{d^{c+1}}\, y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \left[\frac{\underset{x}{d^{c+1}}\, z}{z} - \frac{m\,(m-1)\,(m-2) \cdots (m-c)}{m^{c+1}}\, \frac{\left(\underset{x}{d}\, z\right)^{c+1}}{z^{c+1}} \right].$$

Beweis: Nach 167 ist

$$\underset{x}{d}\, y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \cdot \frac{\underset{x}{d}\, z}{z}$$ und hier, wenn $\underset{x}{d}\, y \gtrless 0$ ist, auch $\underset{x}{d}\, z \gtrless 0$, da auch $z \gtrless 0$.

Ferner $\underset{x}{d^2}\, y = \dfrac{\underset{x}{d^2}\, z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - \dfrac{(m-1)\left(\underset{x}{d}\, z\right)^2}{m^2\, z^{2-\frac{1}{m}}}$; also, wenn $\underset{x}{d^2}\, y = 0$,

so ist $\dfrac{\underset{x}{d^2}\, z}{z} = \dfrac{m\,(m-1)}{m^2} \cdot \dfrac{\left(\underset{x}{d}\, z\right)^2}{z^2}$

Ebenſo $\frac{d^3}{x} y = \frac{\frac{d^3}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1)\left(\frac{d^2}{x} z\right)\frac{d}{x} z}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}}$

$$+ \frac{(m-1)(2m-1)\left(\frac{d}{x} z\right)^3}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}}$$

und wenn hier $\frac{d^3}{x} y = 0$ ist, ſo ergiebt ſich, wenn man den Wert für $\frac{d^2}{x} z$ einführt $\frac{\frac{d^3}{x} z}{z} = \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^3}{z^3}$

Ebenſo ist ferner

$$\frac{d^4}{x} y = \frac{\frac{d^4}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 4 \frac{(m-1)\left(\frac{d^3}{x} z\right)\frac{d}{x} z}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1)\left(\frac{d^2}{x} z\right)^2}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}}$$

$$+ 6 \frac{(m-1)(2m-1)\left(\frac{d^2}{x} z\right)\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)\left(\frac{d}{x} z\right)^4}{m^4 z^{4-\frac{1}{m}}}$$

und wenn hier $\frac{d^4}{x} y = 0$ ist, ſo ergiebt ſich, wenn man die Werte für $\frac{d^2}{x} z$ und für $\frac{d^3}{x} z$ einführt

$$\frac{\frac{d^4}{x} z}{z} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m^4} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^4}{z^4}$$

Und ſo fort allgemein, wenn $\frac{d}{x} y \gtrless 0$, aber $\frac{d^a}{x} y = 0$ für $a = 2, 3, \cdots c$

$$\frac{\frac{d^c}{x} z}{z} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-c+1)}{m^c} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^c}{z^c}$$

2. Wenn $\frac{d}{x} y \gtrless 0$ und auch $\frac{d^2}{x} y \gtrless 0$ ist, ſo ist nach 157

$$\frac{d^2}{x} y = \frac{\frac{d^2}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\frac{d^2}{x} z}{z} - \frac{m(m-1)}{m^2} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{z^2}\right]$$

Wenn $\frac{d}{x} y \gtrless 0$ ist und $\frac{d^2}{x} y = 0$, aber $\frac{d^3}{x} y \gtrless 0$ ist, ſo ist

$$\underset{x}{d}^3 y = \frac{\underset{x}{d}^3 z}{m\cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 3\,\frac{(m-1)\left(\underset{x}{d}^2 z\right)\underset{x}{d} z}{m^2\, z^{2-\frac{1}{m}}} + \frac{(m-1)(2m-1)\left(\underset{x}{d} z\right)^3}{m^3\, z^{3-\frac{1}{m}}}$$

und wenn man hier, da $\underset{x}{d}^2 y = 0$ den Wert für $\underset{x}{d}^2 z$ aus Teil 1 dieſes Beweiſes einführt, ſo ist

$$\underset{x}{d}^3 y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\underset{x}{d}^3 z}{z} - \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}\,\frac{\left(\underset{x}{d} z\right)^3}{z^3}\right]$$

Es ist ebenſo, wenn $\underset{x}{d}\, y \gtrless 0$ und $\underset{x}{d}^4 y \gtrless 0$, dagegen $\underset{x}{d}^2 y = 0 = \underset{x}{d}^3 y$ ist

$$\underset{x}{d}^4 y = \frac{\underset{x}{d}^4 z}{m\cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 4\,\frac{(m-1)\left(\underset{x}{d}^3 z\right)\underset{x}{d} z}{m^2\, z^{2-\frac{1}{m}}} - 3\,\frac{(m-1)\left(\underset{x}{d}^2 z\right)^2}{m^2\, z^{2-\frac{1}{m}}}$$

$$+\,6\,\frac{(m-1)(2m-1)\left(\underset{x}{d}^2 z\right)\left(\underset{x}{d} z\right)^2}{m^3\, z^{3-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)\left(\underset{x}{d} z\right)^4}{m^4\, z^{4-\frac{1}{m}}}$$

und wenn man hier den Wert für $\underset{x}{d}^2 z$ und für $\underset{x}{d}^3 z$ aus Teil 1 dieſes Beweiſes, da $\underset{x}{d}^2 y = 0$ und auch $\underset{x}{d}^3 y = 0$ ist, einführt, ſo erhält man

$$\underset{x}{d}^4 y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\underset{x}{d}^4 z}{z} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m^4}\,\frac{\left(\underset{x}{d} z\right)^4}{z^4}\right]$$

Und ſo fort allgemein, wenn $\underset{x}{d}\, y \gtrless 0$ ist, aber $\underset{x}{d}^a\, y = 0$ ist für $a = 2, 3 \cdots c$, dagegen $\underset{x}{d}^{c+1} y \gtrless 0$ ist, ſo ist

$$\underset{x}{d}^{c+1} y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\underset{x}{d}^{c+1} z}{z} - \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-c)}{m^{c+1}}\,\frac{\left(\underset{x}{d} z\right)^{c+1}}{z^{c+1}}\right]$$

Mit dieſen Formeln kann man nun leicht alle Eigenschaften der Gleichungen nten Grades unterſuchen.

174. **Satz. Die Gleichung nten Grades $y^m = z = \underset{0,n}{S}\, a_a\, x^a$ hat für alle Werte von x, welche ungleich einer Wurzel ſind, eine Fortbeugung, wenn der nächst höhere auser dem ersten Diff nach x von y, welcher ungleich Null ist, von geradem Grade 2c ist und zwar eine hohle Fortbeugung, wenn der $\underset{x}{d}^{2c} y$ eine Strichzahl. dagegen eine erhabene Fortbeugung, wenn derſelbe eine Pluszahl ist.**

Beweis: Unmittelbar nach 157.

Satz. Die Gleichung nten Grades $y^m = z = \underset{0,n}{S} a_a x^a$ hat für 175.
hat für alle Werte von x, welche ungleich einer Wurzel sind, eine Umbeugung, wenn der nächst höhere auser dem ersten Diff nach x von y, welcher ungleich Null ist, von ungeradem Grade $2c+1$ ist und zwar eine senkende Umbeugung, wenn der $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{2c+1} y$ eine Strichzahl, dagegen eine erhebende Umbeugung, wenn derselbe eine Pluszahl ist.

Beweis: Unmittelbar nach 160.

Einige Beispiele werden den leichten Gang dieser Untersuchung zeigen. Bemerkt möge noch werden, dass wenn $\underset{x}{\mathfrak{d}} z = 0$ ist, man stets auch die überaus einfachen Formeln von 171 anwenden kann.

Sei zunächst $y^3 = z = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} x - x^2 + 3x^3$, so wird

$$\underset{x}{\mathfrak{d}} z = \frac{1}{9} - 2x + 9x^2 = \left(3x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^2 z = 2 \cdot 3 \left(3x - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 9 \left(x - \frac{1}{9}\right)$$

Setzen wir hier $x = \frac{1}{9}$, so wird

$$y^3 = z = \frac{28}{243} \qquad \underset{x}{\mathfrak{d}} z = 0 \text{ und } \underset{x}{\mathfrak{d}}^2 z = 0$$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^3 z = 2 \cdot 9 \text{ und } \underset{x}{\mathfrak{d}}^3 y = \frac{\underset{x}{\mathfrak{d}}^3 z}{3\, y^{m-1}} = \frac{2 \cdot 3}{y^{m-1}}$$

d. h. für $+y$ findet hier eine erhebende Umbeugung statt.

Sei ferner $y^4 = z = 67 + 189x - 45x^2 - x^3 + x^4$

so wird $\underset{x}{\mathfrak{d}} z = 189 - 90x - 3x^2 + 4x^3$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^2 z = \quad -90 \quad -6x \quad +12x^2$$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^3 z = \qquad\qquad -6 \quad +24x$$

Setzen wir hier $\underset{x}{\mathfrak{d}}^2 z = 0 = -90 - 6x + 12x^2$, und also $x = 3$, so wird

$$y^3 = z = 463 \qquad \underset{x}{\mathfrak{d}} z = 0 \qquad \underset{x}{\mathfrak{d}}^2 z = 0$$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^3 z = 66 \qquad \text{und } \underset{x}{\mathfrak{d}}^3 y = \frac{\underset{x}{\mathfrak{d}}^3 z}{3\, y^{m-1}} = \frac{22}{y^{m-1}}$$

d. h. für $+y$ findet auch hier eine erhebende Umbeugung statt.

Nach dieser Behandlung der Gleichungen wenden wir uns nun zur Betrachtung der höhern Folgen:

Die Stetigkeit der Stufenfolgen, Loge, Winkelfolgen und Bogenfolgen.

176. **Satz. Die Stufenfolge oder die Exponentialfunktion von x a^x ist stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich, ſofern a eine Pluszahl ungleich eins ist.**

Beweis: Wenn $a > 1$ ist, ſo wächst mit x auch stets a^x nach Zahlenlehre 378, alſo ist auch a^x eine stetige Folge von x nach 15. Wenn $a < 1$ ist, ſo ist $\frac{1}{a} > 1$ und ſei $\frac{1}{a} = b$, ſo ist $a^x = b^{-x}$ d. h. mit wachſendem x nimmt b^{-x} stets ab, alſo ist gleichfalls a^x eine stetige Folge nach 15. Ueberdies hat dieſe Folge nicht beſondere Werte, da $\frac{d}{x} a^x = a^x$ stets ungleich Null bleibt.

177. **Satz. Der Log oder Logarithmus nach der Baſe a von x $l_a x$ ist stetig für jedes x gröser als Null, ſofern a eine Pluszahl ungleich eins ist.**

Beweis: Wenn $a > 1$ ist, ſo wächst nach Zahlenlehre 378 auch $l_a x$ stets mit wachſendem x, alſo ist auch $l_a x$ eine stetige Folge von x nach 15. Wenn $a < 1$ ist, ſo ist $\frac{1}{a} > 1$ und ſei $\frac{1}{a} = b$, ſo ist $l_a x = - l_b x$ d. h. mit wachſendem x nimmt $- l_b x$ stets ab, alſo ist gleichfalls $l_a x$ eine stetig Folge von x nach 15. Ueberdies hat dieſe Folge nicht beſondere Werte, da $\frac{d}{x} l_a x = \frac{1}{x \, l_e a}$ nach 113 ist und stets ungleich Null bleibt.

178. **Satz. Der Sin und der Cos von x ſind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.**

Beweis: 1. Der Sin von x wächst nach Zahlenlehre 459 mit wachſendem x stets von $x = \left(2\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(2\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\right)\pi$ und er nimmt mit wachſendem x stets ab von $x = \left(2\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(2\mathfrak{a} + 1\frac{1}{2}\right)\pi$, er ist alſo nach 15 stetig für jeden Wert von x. Der Sin von x bleibt dabei in den Grenzen zwischen -1 und $+1$. Für $x = \left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\right)\pi$ ist $\sin x = \pm 1$ und ist $\frac{d}{x} \sin x = \cos x$ für dieſen Wert gleich Null, dagegen $\frac{d^2}{x} \sin x = - \sin x$ für dieſen Wert $= \mp 1$ alſo ungleich

Null. Der sin x hat alſo an dieſen Punkten nach 157 ſein Maximum bez. ſein Minimum, kurz ſeine Fortbeugung.

2. Der Cos x wächst nach Zahlenlehre 459 mit wachſendem x stets $x = (2a - 1)\pi$ bis $-2a\pi$ und er nimmt mit wachſendem x stets von ab von $x = 2a\pi$ bis $(2a + 1)\pi$; er ist alſo nach 15 stetig für jeden Wert von x. Auch er bleibt wie der Sin in den Grenzen zwischen -1 und $+1$ und hat ſein Maximum bei $x = 2a\pi$ und ſein Minimum bei $x = (2a + 1)\pi$.

Satz. Die Tan. und die Cot. von x ſind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich. 179.

Beweis: 1. Die Tan x wächst nach Zahlenlehre 474 mit wachſendem x stets von $x = \left(a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ und zwar wächst dabei Tan x von $-\infty$ bis $+\infty$ oder von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$. Für den Wert von $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ geht es dann von $+\frac{1}{0}$ in $-\frac{1}{0}$ über und wächst dann wieder mit wachſendem x stets von $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(a + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi$ und ſo weiter. Die tan x ist alſo nach 15 für $x = \left(a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ stetig. Aber auch für die Werte $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$, wo $\tan x = \pm\frac{1}{0}$ ist, ist die Folge nach 692 stetig, denn ſetzen wir $y = \tan x$, ſo ist $\frac{1}{y} = \cot x$, und dieſe ist für $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$ und ist für dieſen Wert stetig.

2. Die cot x nimmt nach Zahlenl. 474 mit wachſendem x stets ab von $x = a\pi$ bis $x = (a + 1)\pi$ und zwar nimmt die cot x ab von $+\infty$ bis $-\infty$, ſie ist alſo nach 15 für $x = a\pi$ bis $x = (a + 1)\pi$ stetig. Aber auch für die Werte $x = a\pi$, wo $\cot x = \pm\frac{1}{0}$ wird, ist ſie nach 154 stetig, da für dieſen Wert $\tan x = \frac{1}{\cot x} = 0$ ist.

Satz. Die Sec x und die Cosec x ſind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich. 180.

Beweis: Es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Da nun nach 179 sin x und cos x stetig ſind für x von Strichunendlich bis Plusunendlich, ſo ſind auch sec x und cosec x nach 155 innerhalb der gleichen Grenzen stetig.

181. **Satz. Der arc (sin = x), und der arc (cos = x) ſind stetig für x von Stricheins bis Pluseins.**

Beweis: 1. Sei y = arc (sin = x), alſo x = sin y, ſo wächst nach Zahlenlehre 459, wenn x = sin y von — 1 bis + 1 wächst, y stets von $\left(2a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$, ebenſo wenn x = sin y von + 1 bis — 1 abnimmt, wächst y stets von $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $\left(2a + 1\frac{1}{2}\right)\pi$ es ist alſo nach 15 y = arc (sin = x) eine stetige Folge von $\left(2a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$ und ebenſo von $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $\left(2a + 1\frac{1}{2}\right)\pi$. Es ist aber auch arc (sin = x) für die Werte $x = \pm 1$ stetig, da dann arc $(\sin = x) = \left(2a \pm \frac{1}{2}\right)\pi$ ist, alſo ist arc (sin = x) stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.

2. Ebenſo folgt der Satz für arc (cos = x).

182. **Satz. Der arc (tan = x) und der arc (cot = x) ſind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.**

Beweis: Ganz wie zu 181.

183. **Satz. Der arc (sec = x) und der arc (cosec = x) ſind stetig für x von Stricheins bis Strichunendlich und von Plusunendlich bis Pluseins.**

Beweis: Ganz wie zu 181.

184. **Satz. Jede Richtfolge (komplexe Funktion) von x $F_\circ(x, i) = \varphi_\circ x + i\,\psi x$ ist stetig, wenn die beiden Reinfolgen $\varphi_\circ x$ und $\psi_\circ x$ stetig ſind.**

Beweis: Unmittelbar aus 16.

10. Die Integrale und die Integern der Diffe oder der Differentialquotienten.

Die nächste Aufgabe der Folgelehre oder Funktionenlehre ist es, für die Diffe oder Differentialquotienten der Formeln der Zahlenlehre oder niedern Analyſis wieder die ursprüngliche Folge oder Funktion

aufzusuchen, von welcher der Diff oder der Differentialquotient dieser Folge abgeleitet ist. Johannes Bernoulli hat diese Aufgabe 1691 in seinem Werke: Lectiones mathematicae de methodo integralium zuerst gelöst und hat diesem Zweige den Namen der Integralrechnung, des calculus integralis, gegeben. Er ist der Erfinder der Integralrechnung, und hat auch bereits die wichtigsten Sätze derselben aufgestellt.

Wenn man die Ableitung des Diffs von einer Formel der Zahlenlehre eine Knüpfung nennt, so bildet die Integralrechnung, d. h. das Aufsuchen der ursprünglichen Formel zu einem gegebenen Diffe (Differentialquotienten) die jener Knüpfung entsprechende Zerlegung. Bei jeder Zerlegung muss man aber, wie wir in Zahlenlehre 44 sahen, zwei Gattungen unterscheiden: Die Trennung und die Lösung. Bei der Trennung durfte es nur eine Formel geben, welche der Knüpfung entsprach; bei der Lösung dagegen konnte es beliebig viele, ein ganzes Gebiet von Formeln geben, welche derselben Knüpfung entsprachen.

Bei der Ableitung der Diffe giebt es nun in fast allen Fällen unzählig viele ursprüngliche Folgen oder Integrale, welche demselben Diffe entsprechen. Nach Satz 103 ist $\overset{m+1}{\underset{x}{d}} x^m = 0$ und ebenso $\overset{m+n}{\underset{x}{d}} x^m = 0$. Es ergeben also z. B. alle Formeln $\underset{0,m}{S} a_a x^a$ $= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a^m x_m$ nach 103 denselben Diff $\overset{m}{\underset{x}{d}}\left(\underset{0,m}{S} a_a x^a\right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot a_m = m!\, a_m$, was auch $a_0, a_1 \cdots a_{m-1}$ für Werte habe mögen. Die Integralrechnung ist also eine Lösung, wo demselben gegebenen Diffe unendlich viele Integrale entsprechen. Man hat für das Integral das Zeichen $\int$ eingeführt, aber nicht hinzugefügt, nach welcher Gröse integrirt werden soll, d. h. welche Gröse hier als die Veränderliche anzusehen ist. Um dies zu bezeichnen, setzt man hinten ein dx hinzu z. B. $\int adx$; da man aber $dx = 0$ setzt, so ist diese Bezeichnung fehlerhaft, denn man könnte dann $\int adx = S0$ und dies würde stets Null ergeben. Ich führe daher das Zeichen $\underset{x}{\S}$ ein, gelesen Integral nach x, z. B. $\underset{x}{\S}\, a = w_0 + ax$. Für die höhern Integrale entbehrt man jetzt noch eines Zeichens. Ich bezeichne daher mit $\overset{m}{\underset{x}{\S}}$ das mte Integral nach x und bezeichne mit w_a eine zur Höhe x^a gehörige willkürliche Beständige oder Konstante, so ist

$\underset{x}{\mathfrak{S}}^m a_m = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{a_m x^m}{m!}$. Die Integralrechnung hat daher auch alle Schattenseiten jeder Lösung. Man kann nicht einmal zwei Integrale desselben Diffs einandergleich setzen, da ja $a_0, a_1 \cdots a_{n-1}$ in beiden ganz verschiedene Werte haben können. Das einem Differentialquotienten entsprechende Integral ist also eine mehrwertige Gröse, welche unendlich viele Werte haben kann; es gilt daher für die Integrale kein einziges Gesetz der Formenlehre.

Die Herren Mathematiker oder Formenlehrer haben diesem Uebelstande dadurch abzuhelfen gesucht, dass sie die bestimmten Integrale einführten, d. h. sie schafften bei der Integration des ersten Differentialquotienten die willkürliche Konstante dadurch fort, dass sie das Integral für $x = a$ von dem Integrale für $x = b$ abzogen, also x nur von a bis b ändern liesen. So ist, wenn wir mit dem Zeichen $\underset{x}{\overset{a,b}{\mathfrak{S}}}{}^m$ das Integral von a bis b bezeichnen $\overset{a,b}{\mathfrak{S}}{}^m = w_1 (b - a) + w_2 (b^2 - a^2) + \cdots + w_{m-1} (b^{m-1} - a^{m-1}) + \frac{a_m}{m!} (b^m - a^m)$ und sind also alle willkürlichen konstanten $w_1, w_2 \cdots w_{m-1}$ geblieben und ist allein die willkürliche Gröse w_0 durch das Abziehen entfernt. Diese Einführung der bestimmten Integrale schafft also die willkürliche Konstante für das Glied w_0 fort und kann für das erste Integral benutzt werden, wenn es auch für dies Integral sehr unbequem und weitläuftig ist; dagegen ist es für höhere Integrale ganz unbrauchbar und kann die willkürliche Konstanten nicht entfernen.

Will man daher zu einer streng wissenschaftlichen und allgemeinen Behandlung der ursprünglichen Folgen gelangen, so muss man einen ganz andern Weg einschlagen und für jeden Diff eine, aber auch nur eine bestimmte ursprüngliche Folge aufstellen, der Art, dass es nur eine solche ursprüngliche Folge giebt, welche demselben Diffe entspricht, welche mithin einwertig ist und für welche demnach sämmtliche Gesetze der Grösenknüpfung, der Zahlenlehre und der Folgenlehre gelten. Ich nenne diese einwertige ursprüngliche Folge die integre Folge oder kurz die Integre. Die einwertige Integre unterscheidet sich dann vom vielwertigen Integrale ganz so wie die einwertige Funktion oder Folge vom vielwertigen Funktional oder Gefolge. Da man in dem vielwertigen Integrale jeder willkürlichen Konstante jeden beliebigen Wert

geben kann, fo gebe ich fämmtlichen willkürlichen Konstanten für die Integre den Wert Null, d. h. ich lasse die fämmtlichen willkürlichen Konstanten für die Integre verschwinden und behalte alfo nur eine einwertige Funktion, im obigen Beispiele alfo nur $\frac{a_m x^m}{m!}$. Für die mte Integre nehme ich das Zeichen $\underset{x}{d}^{-m}$. Im obigen Beispiele ist alfo $\underset{x}{d}^{-m} a_m = \frac{a_m x^m}{m!}$ und ist $\underset{x}{\mathfrak{S}}^m a_m = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + \underset{x}{d}^{-m} a_m$

Dies ist denn auch die allein wissenschaftliche Behandlung der Sache. Ein Beispiel wird uns dies klar machen. Betrachten wir den Fall eines Körpers. Setzen wir den Punkt, von wo er fällt, als Anfangspunkt d. h. $w_0 = 0$; nehmen wir die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers gleich Null, d. h. da jeder Körper, der in Bewegung ist, in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, fetzen wir, wenn x die Zeit bezeichnet, $w_1 x = 0$, fetzen wir endlich die Schnelligkeit, welche die Anziehung der Erde einem Körper in einer Sekunde giebt, gleich g, fo ist, wenn y den Weg bezeichnet, den der Körper in x Sekunden durchläuft $\underset{x}{d}^2 y = g$ und $\underset{x}{d}^{-2} g = \frac{g x^2}{1 \cdot 2}$ alfo unfre Integre.

Dagegen ist das vielwertige Integral $\underset{x}{\mathfrak{S}}^2 g = w_0 + w_1 x + \frac{g x^2}{1 \cdot 2}$ und bezeichnet hier w_0, wie weit der Anfangspunkt des Falles vom Anfangspunkt des y, und w_1, wie gros die Geschwindigkeit in jeder Sekunde bereits war, als die Anziehung der Erde auf den Körper zu wirken begann. Die Integre giebt uns alfo ganz ungetrübt die Einwirkung der Erdanziehung; fie allein ist abhängig von der Gröse diefer Anziehung in der Zeiteinheit g und der Zeit der Einwirkung x; die beiden willkürlichen Konstanten w_0 und w_1 find hier Null gefetzt. Man fieht schon hieraus, wie wichtig es ist, die Integre und das Integral zu unterscheiden. Jeder, der felbständig die Sache prüft, muss zu demfelben Ergebnisse gelangen. Nach diefen Bemerkungen gehe ich zur Integralrechnung felbst über.

Erklärung. Das erste Integral nach x von einer abgeleiteten Folge von x $f_0 x$ (gewöhnlich kurz das Integral von $f_0 x$ genannt) heist die Gefammtheit der Folgen von x, deren erster Diff oder Differentialquotient jene abgeleitete Folge von x ist. 185.

Das Zeichen des ersten Integrals nach x ist $\underset{x}{\mathfrak{S}}^1 f_0 x$ (gewöhnlich kurz $\int f_0 x$).

186. **Erklärung. Das mte Integral nach x von einer abgeleiteten Folge von x heist die Gesammtheit der Folgen von x, deren mter Diff oder Differentialquotient jene abgeleitete Folge von x ist.**

Das Zeichen des mten Integrals nach x ist $\int_x^m$ gelesen mtes Integral nach x von. Die willkürliche Beständige oder Constante, welche Vorzahl zu x^a ist, bezeichnen wir durch w_a.

187. **Satz. Das mte Integral nach x von $f_0 x$ hat m willkürliche Beständige oder Konstante, nämlich die willkürlichen w_0, $w_1 \cdots w_{m-1}$ oder es ist $\int_x^m f_0 x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + \varphi_0 x$ wo $\varphi_0 x$ die ursprüngliche Funktion von $f_0 x$ ist, sofern in ersterer alle Vorzahlen von x^0, $x^1 \cdots\cdots x^{m-1}$ gleich Null gesetzt werden.**

Beweis: Die Folge $w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w^{m-1} + \varphi x$ giebt nach 105 zum mten Diff oder Differentialquotienten $\frac{d}{x}^m \varphi x = f_0 x$.

188. **Erklärung. Die mte Integre nach x von einer abgeleiteten Folge von x heist die einwertige Folge von x, deren mter Diff oder Differentialquotient jene abgeleitete Folge von x ist, sofern in der erstern alle Vorzahlen von x^0, $x^1 \cdots x^{m-1}$ gleich Null gesetzt werden.**

Das Zeichen der mten Integren nach x ist $\frac{d}{x}^{-m}$ gelesen „mte Integre nach x von".

189. **Satz.** $\frac{d}{x}^m \frac{d}{x}^{-m} f_0 x = f_0 x = \frac{d}{x}^m \int_x^{-m} f_0 x.$

190. **Satz. Wenn $\varphi_0 x$ die mte Integre von $\frac{d}{x}^m \varphi_0 x$ ist, so ist**

$$\frac{d}{x}^{-m} \frac{d}{x}^m \varphi_0 x = \varphi_0 x = \frac{d}{x}^m \frac{d}{x}^{-m} \varphi_0 x$$

Beweis: Unmittelbar nach 188 und nach 189.

191. **Satz.** $\int_x^m f_0 x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{d}{x}^{-m} f_0 x$

Beweis: Unmittelbar nach Satz 187.

192. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-m}(f_{01} x + f_{02} x + f_{03} x + \cdots) = \frac{d}{x}^{-m} f_{01} x + \frac{d}{x}^{-m} f_{02} x + \frac{d}{x}^{-m} f_{03} x + \cdots$

Beweis: Seien $\varphi_{01} x$, $\varphi_{02} x$, $\varphi_{03} x \cdots$ die mten Integren von $f_{01} x$, $f_{02} x$, $f_{03} x, \cdots$; also $\varphi_{01} x = \frac{d}{x}^{-m} f_{01} x$, $\varphi_{2} x = \frac{d}{x}^{-m} f_{02} x$, $\varphi_{03} x = \frac{d}{x}^{-m} f_{03} x \cdots$ so ist $\frac{d}{x}^m (\varphi_{01} x + \varphi_{02} x + \varphi_{03} x + \cdots)$

$$= \underset{x}{d}^m \varphi_{o1}\, x + \underset{x}{d}^m \varphi_{o2}\, x + \underset{x}{d}^m \varphi_{o3}\, x + \cdots \qquad \text{(nach 88)}$$

$$= f_{o1}\, x + f_{o2}\, x + f_{o3}\, x + \cdots$$

Es ist demnach auch

$$\underset{x}{d}^{-m}(f_{o1}\, x + f_{o2}\, x + f_{o3}\, x + \cdots) = \underset{x}{d}^{-m} \underset{x}{d}^m (\varphi_{o1} x + f_{o2} x + \varphi_{o3} x + \cdots)$$

$$= \varphi_{o1} x + \varphi_{o2} x + \varphi_{o3} x + \cdots \text{(nach 190)}$$

$$= \underset{x}{d}^{-m} f_{o1}\, x + \underset{x}{d}^{-m} f_{o2}\, x + \underset{x}{d}^{-m} f_{o3}\, x + \cdots$$

Satz. Es ist $\underset{x}{d}^{-m} a\, f_o\, x = a\, \underset{x}{d}^{-m} f_o\, x$ 193.

Beweis: Sei $\varphi_o\, x = \underset{x}{d}^{-m} f_o\, x$ mithin auch $f_o\, x = \underset{x}{d}^m \varphi_o\, x$, ſo ist

$$a\, \underset{x}{d}^{-m} f_o x = a\, \varphi_o x = \underset{x}{d}^{-m} \underset{x}{d}^m a\, \varphi_o\, x \qquad \text{(nach 190)}$$

$$= \underset{x}{d}^{-m} a\, f_o\, x \text{ ; denn es ist}$$

$$\underset{x}{d}^m a\, \varphi_o\, x = a\, \underset{x}{d}^m \varphi_o\, x \qquad \text{(nach 90)}$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} a_n\, x^n = \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$; $\underset{x}{\mathfrak{S}}^1 a_n\, x^n \cong w_0 + \frac{1}{n+1} a_n\, x^{n+1}$ 194.

$$\underset{x}{d}^{-m} a_n\, x^n = \frac{n!}{(m+n)!} a_n\, x^{m+n}$$

$$\underset{x}{\mathfrak{S}}^m a_n\, x^n \cong w_0 + w_1\, x + \cdots + w_{m-1}\, x^{m-1} + \frac{n!}{(m+n)!} a_n\, x^{m+n}$$

Beweis: Es ist $\underset{x}{d}^m \frac{n!}{(m+n)!} a_n\, x^{m+n} = \frac{n!}{(m+n)!} a_n \underset{x}{d}^m x^{m+n}$

(nach 90)

$$= \frac{n!}{(m+n)!} a_n \frac{(m+n)!}{n!} x^n \qquad \text{(nach 104)}$$

$$= a_n\, x^n$$

Alſo ist $\underset{x}{d}^{-m} a_n\, x^n = \underset{x}{d}^{-m} \frac{n!}{(m+n)!} a_n\, x^{m+n}$

$$= \frac{n!}{(m+n)!} a_n\, x^{m+n} \qquad \text{(nach 190)}$$

Daraus ergeben ſich die andern Formeln.

Satz. $\underset{x}{d}^{-m} S a_\alpha\, x^\alpha = S \frac{\alpha!}{(m+\alpha)!} a_\alpha\, x^{m+\alpha}$ 195.

$$\underset{x}{\mathfrak{S}}^m S\, a_\alpha\, x^\alpha \cong w_0 + w_1\, x + \cdots + w_{m-1}\, x^{m-1} + S \frac{\alpha!}{(m+\alpha)!} a_\alpha\, x^{m+\alpha}$$

Beweis: Unmittelbar aus 189 und 191.

196. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} a_n x^{-(n+1)} = -\frac{1}{n} a_n x^{-n}$; $\underset{x}{S} a_n x^{-(n+1)} = w_0 - \frac{1}{n} a_n x^{-n}$

$$\underset{x}{d}^{-m} a_n x^{-(m+n)} = (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$$

$$\underset{x}{S}^m a_n x^{-(m+n)} \cong w_0 + w_1 x + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$$

Beweis: Es ist $\underset{x}{d}^m (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-)!} \underset{x}{d}^m x^{-n} \qquad \text{(nach 90)}$$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} (-1)^m n(n+1)\cdots(n+m-1) x^{-(m+n)}$$

(nach 104)

$$= (-1)^{2m} \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} x^{-(m+n)}$$

$$= a_n x^{-(m+n)}$$

Alfo ist $\underset{x}{d}^{-m} a_n x^{-(m+n)} = \underset{x}{d}^{-m} \underset{x}{d}^m (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)!\, a_n}{(m+n-1)!} x^{-n} \qquad \text{(nach 190)}$$

197. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{x} = l_e x \qquad \underset{x}{S} \frac{1}{x} \cong w_0 + l_e x.$

Beweis: Es ist $\underset{x}{d} l_e x = \frac{1}{x}$ nach 112; alfo ist

$$\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{x} = \underset{x}{d}^{-1} \underset{x}{d} l_e x = l_e x \qquad \text{(nach 189)}$$

198. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} x^{-(1-1/n)} = n x^{1/n}.$

Beweis: Es ist nach 108 $\underset{x}{d} n x^{1/n} = \frac{1}{x^{1-1/n}} = x^{-(1-1/n)}$; alfo ist

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{-(1-1/n)} = \underset{x}{d}^{-1} \underset{x}{d} n x^{1/n} = n x^{1/n} \qquad \text{(nach 189)}$$

199. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-m} x^{-(m-1/n)} = (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!}{n!} n^m x^{1/n}$;

$$\underset{x}{S}^m x^{-(m-1/n)} \cong w_0 + w_1 x + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!}{n!} n^m \cdot x^{1/n}$$

Beweis: Es ist nach 109

$\underset{x}{d}^m x^{1/n} = (-1)^{m-1} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{1}{n^m} x^{-(m-1/n)}$, mithin ist

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}\left[(-1)^{m-1}\cdot\frac{(n-m)!}{n!}\cdot n^{m}\cdot x^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=(-1)^{m-1}\cdot\frac{(n-m)!}{n!}n^{m}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}x^{\frac{1}{n}}=x^{-\left(m-\frac{1}{n}\right)};\ \text{alſo ist}$$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}x^{-\left(m-\frac{1}{n}\right)}=\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}\left[(-1)^{m-1}\cdot\frac{(n-m)!}{n!}n^{m}x^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=(-1)^{m-1}\cdot\frac{(n-m)!}{n!}n^{m}x^{\frac{1}{n}}.$$

Um hier andere Veränderliche einführen zu können, entwickeln wir zunächst die folgenden Sätze.

Satz. $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}e^{x}=e^{x}$ $\quad\underset{x}{\mathfrak{S}}^{1}e^{x}\cong w_{0}+e^{x}$ 200.

$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}e^{x}=e^{x}$ $\quad\underset{x}{\mathfrak{S}}^{m}e^{x}\cong w_{0}+w_{1}x+\cdots+w_{m-1}x^{m-1}+e^{x}.$

Beweis. Es ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}e^{x}=e^{x}$ (nach 120); alſo ist

$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}e^{x}=\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}e^{x}=e^{x}$ (nach 190).

Daraus ergeben ſich ſofort die andern Formeln.

Satz. $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\sin x=-\cos x$ $\quad\underset{x}{\mathfrak{S}}\sin x\cong w_{0}-\cos x$ 201.

$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\cos x=\sin x$ $\quad\underset{x}{\mathfrak{S}}\cos x\cong w_{0}+\sin x.$

Beweis: 1. Es ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{1}-\cos x=\sin x$ (nach 125); alſo ist

$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\sin x=\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{1}-\cos x=-\cos x$ (nach 190).

2. Es ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{1}\sin x=\cos x$ (nach 125); alſo ist

$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\cos x=\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{1}\sin x=\sin x$ (nach 190).

Satz. $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}\sin x=\sin\left(\frac{3m}{2}\pi+x\right);$ 202.

$$\underset{x}{\mathfrak{S}}^{m}\sin x\cong w_{0}+w_{1}x+\cdots+w_{m-1}x^{m-1}+\sin\left(\frac{3m}{2}\pi+x\right)$$

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-m}\cos x=\cos\left(\frac{3m}{2}\pi+x\right);$$

$$\underset{x}{\mathfrak{S}}^{m}\cos x\cong w_{0}+w_{1}x+\cdots+w_{m-1}x^{m-1}+\cos\left(\frac{3m}{2}\pi+x\right).$$

Beweis: 1. Es ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}\sin x=\sin\left(\frac{m}{2}\pi+x\right)$ (nach 126),

alſo $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{m}\sin\left(\frac{3m}{2}\pi+x\right)=\sin\left(\frac{4m}{2}\pi+x\right)=\sin x$: alſo ist

$$\underset{x}{d}^{-m}\sin x = \underset{x}{d}^{-m}\underset{x}{d}^{m}\sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) \quad \text{(nach 190).}$$

2. Es ist $\underset{x}{d}^{m}\cos x = \cos\left(\frac{m}{2}\pi + x\right)$ (nach 126),

alſo $\underset{x}{d}^{m}\cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \cos\left(\frac{4m}{2}\pi + x\right) = \cos x$; alſo ist

$$\underset{x}{d}^{-m}\cos x = \underset{x}{d}^{-m}\underset{x}{d}^{m}\cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) \quad \text{(nach 190).}$$

203. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(\cos x)^2} = \tan x$

$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(\sin x)^2} = -\cot x.$

Beweis: Unmittelbar aus 127.

204. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \sec x$; $\underset{x}{d}^{-1}\frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -\operatorname{cosec} x.$

Beweis. Unmittelbar aus 128.

205. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\cot x = l_e \sin x$; $\underset{x}{d}^{-1}\tan x = -l_e \cos x.$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 132.

206. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\cot x = -l_e \operatorname{cosec} x$; $\underset{x}{d}^{-1}\tan x = l_e \sec x.$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 133.

207. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{\sin x \cos x} = l_e \tan x = -l_e \cot x$;

$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{\sin 2x} = {}^1/_2\, l_e \tan x = -{}^1/_2\, l_e \cot x.$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 134.

208. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arc}(\tan = x)$; $\underset{x}{d}^{-1}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arc}(\cot = x).$

Beweis. Unmittelbar aus 130.

209. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \operatorname{arc}(\sin = x)$;

$\underset{x}{d}^{-1}\left(-\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = \operatorname{arc}(\cos = x).$

Beweis. Unmittelbar aus 129.

210. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}} = \operatorname{arc}(\sec = x)$;

$\underset{x}{d}^{-1}\left(-\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}\right) = \operatorname{arc}(\operatorname{cosec} = x).$

Beweis. Unmittelbar aus 131.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}(f_0 y)\underset{x}{d}\, y \overset{*}{=} \underset{y}{d}^{-1} f_0 y$, und $\underset{x}{d}^{-1} f_0 y = \left(\underset{y}{d}^{-1} f_0 y\right)\underset{y}{d}\, x$ 211.

* wo y eine Folge von x.

Beweis. Wir fetzen $F_0 y = \underset{y}{d}^{-1} f_0 y$, dann ist

$$\underset{x}{d} F_0 y = \left(\underset{y}{d} F_0 y\right)\underset{x}{d}\, y \qquad \text{(nach 95)}$$

aber $\underset{y}{d} F_0 y = f_0 y$, alfo ist $\underset{x}{d} F_0 y = (f_0 y)\underset{x}{d}\, y$ und alfo $F_0 y = \underset{x}{d}^{-1}(f_0 y)\underset{x}{d}\, y$, aber auch $F_0 y = \underset{y}{d}^{-1} f_0 y$, alfo ist $\underset{x}{d}^{-1}(f_0 y)\underset{x}{d}\, y = \underset{y}{d}^{-1} f_0 y$ oder

$$\underset{x}{d}^{-1} f_0 y = \left(\underset{y}{d}^{-1} f_0 y\right)\underset{y}{d}\, x.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} U \underset{x}{d} V \overset{*}{=} UV - \underset{x}{d}^{-1} V \underset{x}{d} U$ oder 212.

$$\underset{x}{d}^{-1} UW \overset{*}{=} U\underset{x}{d}^{-1} W - \underset{x}{d}^{-1}\left(\underset{x}{d}^{-1} W\right)\underset{x}{d}\, U$$

* wo U und V Folgen von x und $W = \underset{x}{d} V$ gefetzt ist.

Beweis. Es ist nach 89

$\underset{x}{d}\, UV = U\underset{x}{d} V + V\underset{x}{d} U$, alfo ist

$$\underset{x}{d}^{-1}\underset{x}{d}\, UV = UV = \underset{x}{d}^{-1}\left(U\underset{x}{d} V + V\underset{x}{d} U\right) = \underset{x}{d}^{-1} U\underset{x}{d} V + \underset{x}{d}^{-1} V\underset{x}{d} U,$$

mithin

$$\underset{x}{d}^{-1} U\underset{x}{d} V = UV - \underset{x}{d}^{-1} V\underset{x}{d} U.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} U\underset{x}{d} V = U\underset{x}{d}^{-1}\underset{x}{d} V - \underset{x}{d}^{-1}\left(\underset{x}{d}^{-1}\underset{x}{d} V\right)\underset{x}{d}\, U$ oder 213.

$$\underset{x}{d}^{-1} UW = U\underset{x}{d}^{-1} W - \underset{x}{d}^{-1}\left(\underset{x}{d}^{-1} W\right)\underset{x}{d}\, U.$$

Diefe Formel empfiehlt fich dort, wo $\underset{x}{d}^{-1}\underset{x}{d} V$ leicht gefunden werden kann und auch $\underset{x}{d} U$ eine einfache Formel ist. Sei z. B. $U = l_e(1+x^2)$, $V = {}^1\!/_2 x^2$

$$\underset{x}{d}^{-1} x\, l_e(1+x^2) = l_e(1+x^2)\underset{x}{d}^{-1} x - \underset{x}{d}^{-1}\left(\underset{x}{d}^{-1} x\right)\underset{x}{d}\, l_e(1+x^2)$$

$$= {}^1\!/_2 x^2 l_e(1+x^2) - \underset{x}{d}^{-1}\, {}^1\!/_2 x^2 \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= {}^1\!/_2 x^2 l_e(1+x^2) - \underset{x}{d}^{-1} \frac{x^3}{1+x^2} \text{ und da } \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2} \text{ ist}$$

$$= {}^1\!/_2 x^2 l_e(1+x^2) - \underset{x}{d}^{-1}\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$= {}^1\!/_2 x^2 l_e(1+x^2) - {}^1\!/_2 x^2 + {}^1\!/_2 l_e(1+x^2)$$

$$= {}^1\!/_2 (1+x^2) l_e(1+x^2) - {}^1\!/_2 x^2.$$

Wir wollen nun die Sätze über die Integern auch für die Richtgrösen aufstellen.

214. **Satz.** $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}(x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+1}}{c+1}$.

Beweis. Es ist

$$(x+iy)^{c+1} = \underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}\ \underset{x+iy}{\mathfrak{d}}(x+iy)^{c+1} = (c+1)\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}(x+iy)^c$$

(nach 136).

Alfo ist $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}(x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+1}}{c+1}$.

215. **Satz.** $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}(x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+m}}{(c+1)(c+2)\cdots(c+m)}$.

Beweis. Nach 137 ist $(x+iy)^{c+m} = \underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}\ \underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{m}}(x+iy)^{c+m}$

$$= (c+m)(c+m-1)\cdots(c+m-m+1)\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}(x+iy)^c.$$

Alfo ist $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}(x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+m}}{(c+1)(c+2)\cdots(c+m-1)(c+m)}$.

216. **Satz.** $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}[\mathfrak{S}a_a(x+iy)^a] = \underset{m,\cdot\cdot}{\mathfrak{S}}\frac{a!}{(a+m)!}a_a(x+iy)^{a+m}$.

Beweis. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}[\mathfrak{S}a_a(x+iy)^a] = \underset{m,\cdot\cdot}{\mathfrak{S}}\frac{(x+iy)^{a+m}}{(a+1)(a+2)\cdots(a+m)}$

$$= \underset{m,\cdot\cdot}{\mathfrak{S}}\frac{a!\,a_a(x+iy)^{a+m}}{(a+m)!}$$

(nach 215).

217. **Satz.** $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}(x+iy)^{-n} \overset{*}{=} \frac{-(x+iy)^{-(n-1)}}{n-1}$ * wo $n > 1$.

Beweis. Nach 139 ist

$$(x+iy)^{-(n-1)} = \underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}\ \underset{x+iy}{\mathfrak{d}}(x+iy)^{-(n-1)}$$

$$= -(n-1)\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}(x+iy)^{-n}.$$

Alfo ist $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}(x+iy)^{-n} = -\frac{(x+iy)^{-(n-1)}}{n-1}$.

218. **Satz.** $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-1}}\frac{1}{x+iy} = \mathrm{l_e}(x+iy)$.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 144.

219. **Satz.**

$$\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^{-m}}(x+iy)^{-(m+1)} = \frac{(-1)^m(x+iy)^{-1}}{m!} = (-1)^m\frac{1}{m!\,(x+iy)}.$$

Beweis. Nach 139 ist $\mathfrak{d}^{-m}_{x+iy}\,\mathfrak{d}^{m}_{x+iy}(x+iy)^{-1}$

$$= (x+iy)^{-1} = (-1)^m 1\cdot 2\cdots m\,\mathfrak{d}^{-m}_{x+iy}(x+iy)^{-(m+1)}$$

$$= (-1)^m m!\,\mathfrak{d}^{-m}_{x+iy}(x+iy)^{-(m+1)}.$$

Alfo ist

$$\mathfrak{d}^{-m}_{x+iy}(x+iy)^{-(m+1)} = \frac{(-1)^m(x+iy)^{-1}}{m!} = (-1)^m\frac{1}{m!\,(x+iy)}.$$

Satz. $\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{n(x+iy)^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}$; 220.

$$\mathfrak{d}^{-a}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^a(x+iy)^{\frac{1}{n}+a}}{(n+1)(2n+1)\cdots(an+1)}.$$

Beweis 1. Nach 140 ist $\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}\,\mathfrak{d}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}+1}$

$$= (x+iy)^{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n}+1\,\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}}.$$

Alfo ist $\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{n\cdot(x+iy)^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}$.

2. Nach 140 ist ferner $\mathfrak{d}^{-a}_{x+iy}\,\mathfrak{d}^{a}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}+a}$

$$= (x+iy)^{\frac{1}{n}+a} = \left(\frac{1}{n}+a\right)\left(\frac{1}{n}+a-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}+1\right)\mathfrak{d}^{-a}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)\cdots(an+1)}{n^a}\,\mathfrak{d}^{-a}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}}.$$

Alfo ist $\mathfrak{d}^{-a}_{x+iy}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{n^a}{(n+1)(2n+1)\cdots(an+1)}(x+iy)^{\frac{1}{n}+a}$.

Satz. $\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n-1}(x+iy)^{1-\frac{1}{n}}$; 221.

$$\mathfrak{d}^{-a}_{x+iy}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n^a(x+iy)^{a-\frac{1}{n}}}{(n-1)(2n-1)\cdots(an-1)}.$$

Beweis 1. Nach 141 ist

$$\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}\,\mathfrak{d}_{x+iy}(x+iy)^{-\frac{1}{n}+1} = (x+iy)^{-\frac{1}{n}+1} = \left(-\frac{1}{n}+1\right)\mathfrak{d}^{-1}_{x+iy}(x+iy)^{-\frac{1}{n}}.$$

Alfo ist $\mathrm{d}_{x+iy}^{-1}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}(x+iy)^{1-\frac{1}{n}}$.

2. Nach 141 ist ferner $\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}\,\mathrm{d}_{x+iy}^{a}(x+iy)^{-\frac{1}{n}+a}$

$$= \left(-\frac{1}{n}+a\right)\left(-\frac{1}{n}+a-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}+a-a+1\right)\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}(x+iy)^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{(an-1)((a-1)n-1)\cdots(n-1)}{n^a}\,\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}(x+iy)^{-\frac{1}{n}}.$$

Alfo ist $\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n^a(x+iy)^{a-\frac{1}{n}}}{(n-1)(2n-1)\cdots(an-1)}$.

222. **Satz.** $\mathrm{d}_{x+iy}^{-1}e^{x+iy} = e^{x+iy}$; $\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}e^{x+iy} = e^{x+iy}$.

Beweis. Nach 142 ist $\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}\,\mathrm{d}_{x+iy}^{a}e^{x+iy} = \mathrm{d}_{x+iy}^{-a}e^{x+iy}$.

Alfo ist $\mathrm{d}_{x+iy}^{-a}e^{x+iy} = e^{x+iy}$.

223. **Satz.** $\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}a^{x+iy} = \frac{a^{x+iy}}{(l_e a)^m}$; $\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}e^{a(x+iy)} = \frac{e^{a(x+iy)}}{a^m}$.

Beweis. Unmittelbar nach 143.

224. **Satz.** $\mathrm{d}_{x+iy}^{-1}\sin(x+iy) = -\cos(x+iy)$;

$\mathrm{d}_{x+iy}^{-1}\cos(x+iy) = \sin(x+iy)$.

Beweis. Unmittelbar nach 145.

225. **Satz.** $\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}\sin(x+iy) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x + iy\right)$;

$\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}\cos(x+iy) = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x + iy\right)$.

Beweis. Nach 146 ist $\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}\,\mathrm{d}_{x+iy}^{m}\sin(x+iy) = \sin(x+iy)$

$$= \sin\left(\frac{4m}{2}\pi + x + iy\right) = \mathrm{d}_{x+iy}^{-m}\sin\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right).$$

Alfo ist, wenn wir x für $\frac{m}{2}\pi + x$ einführen

$\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}\sin(x+iy) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x + iy\right)$. Und ebenfo für

$\mathrm{d}_{x+iy}^{-m}\cos(x+iy)$.

Satz. $\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{1}{(\cos(x+iy))^2} = \tan(x+iy);$ 226.

$\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{1}{(\sin(x+iy))^2} = -\cot(x+iy).$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 147.

Satz. 227.

$\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{\sin(x+iy)}{(\cos(x+iy))^2} = \underset{x+iy}{d}^{-1}(\tan(x+iy))\sec(x+iy) = \sec(x+iy);$

$\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{\cos(x+iy)}{(\sin(x+iy))^2} = \underset{x+iy}{d}^{-1}(\cot(x+iy))\operatorname{cosec}(x+iy) = \operatorname{cosec}(x+iy)$.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 148.

Satz. 228.

$\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{1}{[1-(x+iy)^2]^{1/2}} \cong \text{Aarc}(\sin = x+iy) = -\text{Aarc}(\cos = x+iy).$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 149.

Satz. 229.

$\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{1}{1+(x+iy)^2} \cong \text{Aarc}\tan(= x+iy) = -\text{Aarc}(\cot = x+iy).$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 150.

Satz. $\underset{x+iy}{d}^{-1}\frac{1}{(x+iy)[1+(x+iy)^2]^{1/2}} \cong \text{Aarc}(\sec = x+iy)$ 230.

$= -\text{Aarc}(\operatorname{cosec} = x+iy).$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 151.

Satz. Alle Grundformeln für die Integern gelten alſo ebenſo für die Richtgrösen wie für die reinen Zahlen oder reellen Grösen. 231.

11. Die Integern zu den Diffgleichungen.

Wir haben in der vorhergehenden Nummer die Integern von denjenigen Diffen aufgeſucht, welche wir in Nummer 8 unmittelbar durch Ableitung der Diffe gewonnen hatten. In dieſer Nummer wollen wir dagegen die Integern zu denjenigen Diffen ſuchen, welche uns gegeben ſind und welche ſich nicht unmittelbar durch Ableitung von Diffen ergeben. Man muss in dieſem Falle der gegebenen Diffgleichung eine Form geben, welche in jedem Gliede nur ſolche Diffe enthalten, welche unmittelbar durch Ableitung gewonnen werden können.

A. Das Integern durch Einführung (Substitution) einer neuen Veränderlichen.

Das einfachste Mittel ist, dass man $f_0x = \varphi_0 z$ ſetzt und nun nach $\underset{x}{d} f_0x = \left(\underset{z}{d}\varphi_0 z\right)\underset{x}{d}z$ ſetzt. Sei z. B. $(a+bx)^n$ gegeben, ſo ſetze

$a + bx = z$, so ist $\frac{d}{x}z = b$; $\quad \frac{d}{z}^{-1}(z)^n = \frac{z^{n+1}}{n+1}$, mithin ist

$$\frac{d}{x}^{-1}(a + bx)^n = \frac{z^{n+1}}{(n+1)b} = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}.$$

Sei z. B. $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a+bx}$ zu suchen, so setze $z = a + bx$, $\frac{d}{x}z = b$

$$\frac{d}{z}^{-1}\frac{1}{z} = l_e z, \text{ also } \frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a+bx} = \frac{l_e z}{b} = \frac{l_e(a+bx)}{b}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich die folgenden Sätze:

232. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}(a + bx)^n = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}$;

$$\frac{d}{x}^{-m}(a+bx)^n = \frac{n!(a+bx)^{n+m}}{(n+m)!b^m}.$$

233. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}$;

$$\frac{d}{x}^{-m}\frac{1}{(a+bx)^n} = \frac{(-1)^m m!}{b^m(n-m)!(a+bx)^{n-m}}.$$

234. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b}l_e(a+bx)$.

235. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}(a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+1}}{b\left(\frac{m}{n}+1\right)}$;

$$\frac{d}{x}^{-p}(a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+p}}{b^p\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m}{n}+2\right)\cdots\left(\frac{m}{n}+p\right)}.$$

236. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}(a+bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{1-\frac{m}{n}}}{b\left(1-\frac{m}{n}\right)}$;

$$\frac{d}{x}^{-p}(a+bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{p-\frac{m}{n}}}{b^p\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(2-\frac{m}{n}\right)\cdots\left(p-\frac{m}{n}\right)}.$$

237. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}l_e x = x l_e x - x$.

Beweis. $\frac{d}{x}(x l_e x - x) = l_e x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = l_e x$.

238. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-m}l_e x = \frac{x^m}{m!}\left[l_e x - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]$.

Beweis. $\frac{d}{x}\frac{x^m}{m!}\left[l_e x-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]$

$$=\frac{d}{x}\left[\frac{x^m}{m!}l_e x-\frac{x^m}{m!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right].$$

$$=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}l_e x+\frac{x^{m-1}}{m!}-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{1}{m}$$

$$-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m-1}\right)$$

$$=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}l_e x-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m-1}\right).$$

Und entsprechend

$$\frac{d^2}{x}\frac{x^m}{m!}\left[l_e x-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$=\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}l_e x-\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-2}\right)$$

$$\frac{d^{m-1}}{x}\frac{x^m}{m!}\left[l_e x-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]=x\cdot l_e x-x$$

$$\frac{d^m}{x}\frac{x^m}{m!}\left[l_e x-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]=l_e x \quad \text{(nach 237).}$$

Setzen wir $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}=p_m$, fo ist

$p_1=\frac{1}{1}=1$, $p_2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $p_3=\frac{11}{6}$, $p_4=\frac{25}{12}$, $p_5=\frac{137}{60}$, $p_6=\frac{147}{60}$,
$p_7=\frac{1089}{420}$, $p_8=\frac{2283}{840}$, $p_9=\frac{7129}{2520}$, $p_{10}=\frac{7381}{2520}$, $p_{11}=\frac{83711}{27720}$, $p_{12}=\frac{86021}{27720}$,
$p_{13}=\frac{1'145993}{360360}$, $p_{14}=\frac{1'171733}{360360}$, $p_{15}=\frac{1'195757}{360360}$, $p_{16}=\frac{2'436599}{720720}$,
$p_{17}=\frac{42'242903}{12'252240}$, $p_{18}=\frac{42'923583}{12'252240}$, $p_{19}=\frac{827'800317}{232'792560}$, $p_{20}=\frac{839'439945}{232'792560}$.

Satz. 239.

$$\frac{d}{x}^{-m}l_e(a+bx)=\frac{(a+bx)^m}{b^m\cdot m!}\left[l_e(a+bx)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right].$$

Satz. $\frac{d}{x}^{-(m+n)}\frac{1}{(a+bx)^n}$ 240.

$$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,(a+bx)^m}{m!\,b^{m+n}}\left[l_e(a+bx)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right].$$

Beweis. Nach 236 ist

$$\frac{d}{x}^{-p}\frac{1}{(a+bx)^n}=(-1)^p\frac{p!}{b^p\cdot(n-p)!\,(a+bx)^{n-p}}, \text{ alfo}$$

$$\frac{d}{x}^{-(n-1)}\frac{1}{(a+bx)^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{b^{n-1}\cdot(a+bx)}$$

$$\underset{x}{d}^{-n}\frac{1}{(a+bx)^n}=(-1)\frac{(n-1)!\,l_e(a+bx)}{b^n} \qquad \text{(nach 215).}$$

$$\underset{x}{d}^{-(m+n)}\frac{1}{(a+bx)^n}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!(a+bx)^m}{b^{m+n}\cdot m!}\left[l_e(a+bx)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]$$

(nach 238).

Durch diesen Satz können wir nun jede Integre von $\frac{1}{(a+bx)^n}$ finden. Wir wenden uns nun zu den Integern von $(a+bx^n)^\mu$, deren Integern Schwierigkeiten bereiten.

241. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}x^{n-1}(a+bx^n)^\mu=\frac{(a+bx^n)^{\mu+1}}{b\cdot(\mu+1)}$.

Beweis. Setze $a+bx^n=z$, so ist $\underset{x}{d}z=b\cdot n\cdot x^{n-1}$ u. s. w.

Aus diesem Satze ergeben sich noch unmittelbar die Formeln.

242. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{x}{(a+bx^2)^{1/2}}=\frac{(a+bx^2)^{1/2}}{b};\quad \underset{x}{d}^{-1}\frac{x}{(a+bx^2)^{3/2}}=-\frac{1}{b(a+bx^2)^{1/2}}.$$

243. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx^2)^{3/2}}=\frac{x}{a(a+bx^2)^{1/2}}$.

244. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{n-1}}{a+bx^n}=\frac{1}{n\cdot b}l_e(a+bx^n)$.

245. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}l_e\frac{a+bx}{a-bx}$;

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{a-bx^2}=\frac{1}{2(ab)^{1/2}}l_e\frac{a^{1/2}+xb^{1/2}}{a^{1/2}-xb^{1/2}}.$$

Beweis. $\underset{x}{d}\,l_e\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}}\underset{x}{d}\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{2ab}{a^2-b^2x^2}$,

mithin folgt die erste Formel. Und wenn man $a^2=c$ und $b^2=d$ setzt, so auch die zweite Formel.

246. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a^2+b^2x^2)^{1/2}}=\frac{1}{b}l_e\left(bx+(a^2+b^2x^2)^{1/2}\right)$;

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx^2)^{1/2}}=\frac{1}{b^{1/2}}l_e\left[xb^{1/2}+(a+bx^2)^{1/2}\right].$$

Beweis. Setze $a^2 + b^2x^2 = z$, fo ist $\frac{d}{x}\frac{1}{b}l_e(bx + z^{1/2})$

$$= \frac{1}{b}\left(\frac{1}{bx + z^{1/2}}\right)\frac{d}{x}(bx + z^{1/2}) = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{bx + z^{1/2}}\right)\left(b + \frac{b^2x}{z^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left(\frac{1}{bx + z^{1/2}}\right)\frac{b}{z^{1/2}}(z^{1/2} + bx) = \frac{1}{z^{1/2}} = \frac{1}{(a^2 + b^2x^2)^{1/2}}.$$

Setze $a^2 = c$ und $b^2 = d$, fo folgt die zweite Formel.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\text{arc}\left(\tan = \frac{bx}{a}\right)$; 247.

$$\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a + bx^2} = \frac{1}{(ab)^{1/2}}\text{arc}\left(\tan = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$$

Beweis. Nach 130 ist $\frac{d}{z}\text{arc}(\tan = z) = \frac{1}{1 + z^2}$, fetze $z = \frac{bx}{a}$, fo ist $\frac{d}{x}z = \frac{b}{a}$, alfo $\frac{d}{x}\text{arc}\left(\tan = \frac{bx}{a}\right) = \frac{1}{1 + z^2}\frac{d}{x}z = \frac{b}{a}\frac{1}{1 + \frac{b^2x^2}{a^2}}$

$= \frac{ab}{a^2 + b^2x^2}$, mithin folgt die erste Formel und fetzt man $a^2 = c$ und $b^2 = d$, fo folgt auch die zweite Formel.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{(a^2 - b^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b}\text{arc}\left(\sin = \frac{bx}{a}\right)$; 248.

$$\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{(a - bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}}\text{arc}\left(\sin = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$$

Beweis. Nach 129 ist $\frac{d}{z}\text{arc}(\sin = z) = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}$, fetze $z = \frac{bx}{a}$, alfo $\frac{d}{x}z = \frac{b}{a}$, fo ist $\frac{d}{x}\text{arc}\left(\sin = \frac{bx}{a}\right) = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}\frac{d}{x}z = \frac{b}{a}\frac{1}{\left(1 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{1/2}}$

$= \frac{b}{(a^2 - b^2x^2)^{1/2}}$, mithin folgt die erste und durch Setzen von $a^2 = c$ und $b^2 = d$ die zweite Formel.

Für die Winkelfolgen hat man ferner die folgenden Gleichungen.

Satz. 249.

$$\frac{d}{x}^{-1}\cos(a + bx) = \frac{1}{b}\sin(a + bx); \qquad \frac{d}{x}^{-1}\cos bx = \frac{1}{b}\sin bx.$$

Beweis. Nach 125 ist $\frac{d}{z}\sin z = \cos z$, setze also $a + bx = z$; $\frac{d}{x}z = b$, so ist $\frac{d}{x}\sin(a + bx) = b\cos\cdot(a + bx)$, daraus folgt der Satz.

250. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-1}\sin(a + bx) = -\frac{1}{b}\cos(a + bx);\quad \frac{d}{x}^{-1}\sin bx = -\frac{1}{b}\cos bx.$$

251. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-1}\cot(a + bx) = \frac{1}{b}l_e\sin(a + bx);\qquad \frac{d}{x}^{-1}\cot x = l_e\sin x.$$

Beweis. $\frac{d}{x}l_e\sin x = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{x}\sin x = \cot x$, also auch $\frac{d}{z}l_e\sin z = \cot z$. Setze $z = a + bx$, also $\frac{d}{x}z = b$, so folgt der Satz.

252. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-1}\tan(a + bx) = -\frac{1}{b}l_e\cos(a + bx);\quad \frac{d}{x}^{-1}\tan x = -l_e\cos x.$$

253. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab}\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{b\tan x}{a}\right).$

Beweis. Nach 130 ist $\frac{d}{z}\mathrm{arc}(\tan = z) = \frac{1}{1 + z^2}$. Setze $z = \frac{b\cdot\tan x}{a}$, also $\frac{d}{x}z = \frac{b}{a}\frac{1}{(\cos x)^2}$, so ist $\frac{d}{x}\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{b\tan x}{a}\right)$

$$= \frac{1}{1 + \frac{b^2(\tan x)^2}{a^2}}\cdot\frac{b}{a}\frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{\left(a^2 + b^2\frac{(\sin x)^2}{(\cos x^2)}\right)(\cos x)^2}$$

$$= \frac{ab}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2}$$

und daraus unmittelbar der Satz.

254. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{a^2(\cos x)^2 - b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{2ab}l_e\frac{a + b\tan x}{a - b\tan x}.$

Beweis. Nach 245 ist $\frac{1}{2ab}\frac{d}{z}l_e\frac{a + bz}{a - bz} = \frac{1}{a^2 - b^2z^2}$, setze $z = \tan x$. $\frac{d}{z} = \frac{1}{(\cos x)^2}$, so ist $\frac{1}{2ab}\frac{d}{x}l_e\frac{a + b\tan x}{a - b\tan x} = \frac{1}{a^2 - b^2(\tan x)^2}\frac{1}{(\cos x)^2}$

$$= \frac{1}{a^2(\cos x)^2 - b^2(\sin x^2)}$$ und daraus unmittelbar der Satz.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\mathbf{arc(sin = ax) = x \cdot arc(sin = ax)} + \frac{(1-a^2x^2)^{1/2}}{a}$. 255.

Beweis. Es ist $\underset{x}{d}\left[x\cdot arc(sin = ax) + \frac{(1-a^2x^2)^{1/2}}{a}\right]$

$$= arc(sin = ax) + x\frac{a}{(1-a^2x^2)^{1/2}} - \frac{a^2x}{a(1-a^2x^2)^{1/2}} = arc(sin = ax).$$

und daraus unmittelbar der Satz.

Satz. 256.

$$\underset{x}{d}^{-1}\mathbf{arc(tan = ax) = x \cdot arc(tan = ax)} - \frac{1}{2a}l_e(1 + a^2x^2).$$

Beweis. $\underset{x}{d}\left[x\cdot arc(tan = ax) - \frac{1}{2a}l_e(1 + a^2x^2)\right]$

$$= arc(tan = ax) + x\underset{x}{d}arc(tan = x) - \frac{1}{2a}\underset{x}{d}l_e(1 + a^2x^2) = arc(tan = ax)$$

und daraus unmittelbar der Satz.

B. Das Integern durch Reihen.

Ein ganz allgemeines, aber nur selten zu schnell konvergirenden Reihen führendes Mittel, die Integern zu finden, ist die Entwicklung der gegebenen Gleichung in eine echte Reihe, welche man dann integern kann.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}f_0x \overset{*}{=} S\frac{a_a}{a+1}x^{a+1}$; $\underset{x}{d}^{-m}f_0x \overset{*}{=} S\frac{a!\,a_a}{(m+a)!}x^{m+a}$ 257.

* **wo $f_0x = Sa_ax^a$, a_a endlich und $x^2 < 1$ ist.**

Beweis. Da $f_0x = Sa_ax^a$, wo a_a endlich und $x^2 < 1$ ist, so ist nach 194

$$\underset{x}{d}^{-1}f_0x = \underset{x}{d}^{-1}(Sa_ax^a) = S\underset{x}{d}^{-1}a_ax^a = S\frac{a_a}{a+1}x^{a+1}$$

$$\underset{x}{d}^{-m}f_0x = \underset{x}{d}^{-m}(Sa_ax^a) = Sa_a\underset{x}{d}^{-m}x^a = S\frac{a_a\cdot a!}{(m+a)!}x^{m+a} \text{ (nach 195).}$$

Satz. 258.

$$\underset{x}{d}^{-1}(f_0x)\varphi_0x \overset{*}{=} Sa_a\underset{x}{d}^{-1}x^a\varphi_0x; \quad \underset{x}{d}^{-m}(f_0x)\varphi_0x \overset{*}{=} Sa_a\underset{x}{d}^{-m}x^a\varphi_0x$$

* **wo $f_0x = Sa_ax^a$, a_a endlich, $x^2 < 1$ und auch $\left(\underset{x}{d}^{-m}x^a\varphi_0x\right)^2 < 1$.**

Beweis. Da $f_0x = Sa_ax^a$, a_a endlich und $x^2 < 1$ ist, so ist, da auch $\left(\underset{x}{d}^{-m}x^a\varphi_0x\right)^2 < 1$,

$$\underset{x}{d}^{-1}(f_0x)\varphi_0x = Sa_a\underset{x}{d}^{-1}x^a\varphi_0x \text{ und } \underset{x}{d}^{-m}(f_0x)\varphi_0x = Sa_a\underset{x}{d}^{-m}x^a\varphi_0x.$$

C. Das Integern der Brüche von Folgen.

259. **Erklärung. Ein Bruch ganzer Höhenreihen heist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner jeder eine endliche Höhenreihe von x zu ganzen Plusstufen ist.**

Der Bruch ganzer Höhenfolgen heist echt, wenn die Höhenreihe des Zählers von nicht höherm Grade ist als die des Nenners; er heist unecht, wenn die Höhenreihe des Zählers von höherm Grade ist als die des Nenners.

Die Form der echten gebrochnen Höhenreihe ist

$$\frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$ **wo n und m ganze Zahlen und $n \geqq m$ ist.**

1. Die Zerlegung der Brüche ganzer Höhenreihen in Teilbrüche.

260. **Satz. Jeder unechte Bruch ganzer Höhenreihen lässt ſich in eine ganze Höhenreihe und in einen echten Bruch ganzer Höhenreihen zerlegen.**

Beweis. Da der Bruch unecht ist, ſo ist die Höhenreihe des Zählers von höherm Grade als der Nenner. Teilt man alſo den Zähler durch den Nenner, ſo erhält man eine ganze Höhe, bez. Höhenreihe von x und als Rest einen echten Bruch, in welchem der Zähler von niederem, höchstens aber gleichem Grade ist, wie der Nenner.

Wir werden daher im Folgenden nur die echten Brüche ganzer Höhenreihen von der Form

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$ wo m und n ganze Pluszahlen und $n \geqq m$ ist

zu betrachten haben.

Der Nenner dieſes Bruches ist nach Zahlenlehre 570

$$f_0 x = \underset{0,n}{S}\, a_\alpha x^\alpha = C(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

Hier können wir Zähler und Nenner durch C teilen, da $C \gtrless 0$ ist; dann fällt C fort. Ferner können mehre der Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_n$ einander gleich ſein, ſeien alſo $\mathfrak{a}$ Wurzeln gleich a, $\mathfrak{b}$ Wurzeln gleich b u. ſ. w., ſo ist $f_0 x = (x - b)^{\mathfrak{b}}(x - c)^{\mathfrak{c}} \cdots (x - l)^{\mathfrak{l}}$ wo $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots + \mathfrak{l} = n$ und die Grösen $a, b, c, \cdots l$ ſämmtlich einander ungleich ſind, und gilt dann der folgende Satz.

Satz. Der echte Bruch ganzer Höhenreihen 261.

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a}, \text{ wo } f_0 x = (x-b)^{\mathfrak{b}}(x-c)^{\mathfrak{c}}(x-d)^{\mathfrak{d}}\cdots(x-l)^{\mathfrak{l}} \text{ und}$$

$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots + \mathfrak{l} = n$ ist, ist gleich

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}} + \cdots + \frac{B_{\mathfrak{b}-1}}{x-b}$$

$$+ \frac{C_0}{(x-c)^{\mathfrak{c}}} + \frac{C_1}{(x-c)^{\mathfrak{c}-1}} + \cdots + \frac{C_{\mathfrak{c}-1}}{x-c}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{L_0}{(x-l)^{\mathfrak{l}}} + \frac{L_1}{(x-l)^{\mathfrak{l}-1}} + \cdots + \frac{L_{\mathfrak{l}-1}}{x-l}$$

wo die Grösen $B_0 B_1 \cdots\cdots L_{\mathfrak{l}-1}$ sämmtlich endliche bestimmte und unveränderliche Grösen sind.

Beweis. Wir setzen $(x-c)^{\mathfrak{c}}(x-d)^{\mathfrak{d}}\cdots(x-l)^{\mathfrak{l}} = \varphi_0 x$, dann ist also $f_0 x = (x-b)^{\mathfrak{b}}\varphi_0 x$. Bezeichnen wir nun mit $F_0 x_b$ und $\varphi_0 x_b$ die Folgen (a) $F_0 x$ und $\varphi_0 x$, sofern in denselben $x = b$ gesetzt ist, und setzen wir

$$B_0 = \frac{F_0 x_b}{\varphi_0 x_b} \text{ und setzen wir } F_{01} x = \frac{F_0 x - B_0 \varphi_0 x}{x-b}, \qquad \text{(b)}$$

so wird $F_0 x = B_0 \varphi_0 x + (x-b) F_{01} x$ und (c)

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{F_0 x}{(x-b)^{\mathfrak{b}}\varphi_0 x} = \frac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}} + \frac{F_{01} x}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}\varphi_0 x}. \qquad \text{(d)}$$

Hier ist, da $\varphi_0 x$ das Fach $x - b$ nicht mehr enthält, auch $\varphi_0 x_b$ ungleich Null, also nach (b) die Gröse B_0 eine endliche bestimmte, unveränderliche Gröse. Setzen wir in (c) den Wert für B_0 aus (a) so wird

$$F_{01} x = \frac{F_0 x - \dfrac{F_0 x_b}{\varphi_0 x_b}\varphi_0 x}{x-b}.$$

Hier sind im Zähler $F_0 x$ und $\varphi_0 x$ endliche Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen, also ist der Zähler eine solche Höhenreihe und da $F_{01} x(x-b) = F_0 x - \dfrac{F_0 x_b}{\varphi_0 x_b}\varphi_0 x$ ist, so wird der Zähler für $x = b$ Null; er enthält also noch $x - b$ als Fach und lässt sich durch $x - b$ teilen. Es ist demnach auch der Bruch

$$\frac{F_0 x - \dfrac{F_0 x_b}{\varphi_0 x_b}\varphi_0 x}{x-b} = F_{01} x$$

eine Höhenreihe von x zu ganzen Plusstufen.

Der gegebene echte Bruch $\dfrac{F_0 x}{f_0 x}$ ist also nach (d) in zwei Stücke zerlegt, in $\dfrac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}}$, wo der Zähler eine endliche bestimmte feste

Gröse und in $\frac{F_{01}x}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}\varphi_0 x}$, wo der Zähler und der Nenner Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen ganz von der Form des gegebenen Bruches ſind, der Grad des Nenners aber um eine Einheit niedriger ist.

Wenden wir nun das gleiche Verfahren auf dieſen neuen Bruch an, ſo erhalten wir

$$\frac{F_0 x}{(x-b)^{\mathfrak{b}}\varphi_0 x}=\frac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}}+\frac{F_{02}x}{(x-b)^{\mathfrak{b}-2}\varphi_0 x},$$

$$B_1=\frac{F_{01}x_b}{\varphi_0 x_b}\quad F_{02}x=\frac{F_{01}x-B_1\varphi_0 x}{x-b}.$$

Setzen wir dies gleiche Verfahren ſo weiter fort, ſo müssen wir zu der Gleichung gelangen

$$\frac{F_0 x}{(x-b)^{\mathfrak{b}}\varphi_0 x}=\frac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}}+\cdots+\frac{B_{\mathfrak{b}-1}}{x-b}+\frac{F_{0\mathfrak{b}}x}{\varphi_0 x}.$$

Setzen wir nun ferner $\psi_0 x=(x-d)^{\mathfrak{d}}\cdots(x-l)^{\mathfrak{l}}$, ſo ist $\varphi_0 x=(x-c)^{\mathfrak{c}}\psi_0 x$, alſo $\frac{F_{0\mathfrak{b}}x}{\varphi_0 x}=\frac{F_{0\mathfrak{b}}x}{(x-c)^{\mathfrak{c}}\psi_0 x}$. Mit dieſem echten Bruche ganzer Höhenreihen laſsen ſich wieder dieſelben Umwandlungen vornehmen, wie mit dem gegebenen Bruche. Es wird alſo

$$\frac{F_{0\mathfrak{b}}x}{\varphi_0 x}=\frac{F_{0\mathfrak{b}}x}{(x-c)^{\mathfrak{c}}\psi_0 x}=\frac{C_0}{(x-c)^{\mathfrak{c}}}+\frac{C_1}{(x-c)^{\mathfrak{c}-1}}+\frac{C_2}{(x-c)^{\mathfrak{c}-2}}+\cdots$$
$$+\frac{C_{\mathfrak{c}-1}}{x-c}+\frac{F_{0\mathfrak{c}}x}{\psi_0 x}.$$

Indem man dies Verfahren ſo weiter fortſetzt, gelangt man schlieslich zu der im Satze aufgeſtellten Gleichung.

Uns bleibt nun noch die Aufgabe, die Grösen $B_0, B_1, \cdots L_{\mathfrak{l}-1}$ zu bestimmen. Um dieſe Aufgabe zu vereinfachen, betrachten wir zuerst den Fall, wo $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=\mathfrak{d}=\cdots=\mathfrak{l}=1$ ist, d. h. wo der Nenner $f_0 x=(x-b)(x-c)(x-d)\cdots(x-l)$ keine gleichen Fache enthält.

262. **Satz. Wenn in dem echten Bruche zweier Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen der Nenner $f_0 x=(x-b)(x-c)\cdots(x-l)$ keine gleichen Fache enthält, ſo ist**

$$\frac{F_0 x}{f_0 x}=\frac{\underset{0,m}{S}A_a x^a}{\underset{0,n}{S}a_a x^a}=\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{D}{x-d}+\cdots+\frac{L}{x-l}\quad\textbf{und ist}$$

$\frac{F_0 x}{\frac{d}{x}f_0 x}=B$, **ſofern $x=b$, dagegen gleich C, ſofern $x=c$, gleich D, ſofern $x=d,\cdots$ geſetzt wird.**

Beweis. Nach 261 ist in diefem Falle

$$\frac{F_0x}{f_0x}=\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{D}{x-d}+\cdots+\frac{L}{x-l}$$

und ist nach (b) im vorigen Satze $B=\frac{F_0b}{\varphi_0b}$ und nach (a)

$f_0x=(x-b)\varphi_0x$, hieraus folgt

$\frac{d}{x}f_0x=(x-b)\frac{d}{x}\varphi_0x+\varphi_0x$, alfo ist für $x=b$ $\frac{d}{x}f_0b=\varphi_0b$.

Wir haben demnach $B=\frac{F_0b}{\varphi_0b}=\frac{F_0b}{\frac{d}{x}f_0b}$, d. h. $B=\frac{F_0x}{\frac{d}{x}f_0x}$, fofern in diefen Folgen $x=b$ gefetzt wird.

Ganz entsprechend ergiebt fich für jeden andern Zähler

$$C=\frac{F_0c}{\frac{d}{x}f_0c}\quad D=\frac{F_0d}{\frac{d}{x}f_0d}\cdots L=\frac{F_0l}{\frac{d}{x}f_0l},$$

d. h. der Zähler gleich $\frac{F_0x}{\frac{d}{x}f_0x}$, fofern in diefer Folge x gleich der entsprechenden Wurzel gefetzt wird.

Als Beispiel diene der Bruch $\frac{x^2-5}{x^3+5x^2+2x-8}$, wo der Nenner $x^3+5x^2+2x-8=(x-1)(x+2)(x+4)$ ist, dann ist

$$\frac{F_0x}{\frac{d}{x}f_0x}=\frac{x^2-5}{3x^2+10x+2}, \text{ alfo } B=\frac{1-5}{3+10+2}=-\frac{4}{15},\ C=\frac{4-5}{12-10+2}=-\frac{1}{4},$$

$$D=\frac{16-5}{48-40+2}=\frac{11}{10},$$

mithin $\frac{x^2-5}{x^3+5x^2+2x-8}=-\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{x+4}$.

Satz. Wenn in dem vorigen Satze zwei Wurzeln b und c einander conjugirte Richtgrösen find, fo find auch ihre Zähler B und C einander conjugirte Richtgrösen und lassen fich die beiden Teilbrüche in einen Bruch von der Form $\frac{Px+Q}{(x-p)^2+q^2}$ zufammenziehen, aus welchem alle Jgrösen verschwunden find. 263.

Beweis. Wenn in dem Nenner eine Wurzel b eine Richtgröse (komplexe Gröse) $b=p+iq$ ist, fo ist nach Zahlenlehre 573 auch eine zweite Wurzel c die dazu conjugirte Gröse $c=p-iq$. Dann erhält alfo der vorige Satz die Form

$$\frac{F_0x}{f_0x}=\frac{B}{x-(p+iq)}+\frac{C}{x-(p-iq)}+\frac{D}{x-d}+\cdots+\frac{L}{x-l}.$$

Hier ist $B = \frac{F_o x}{\underset{x}{d} f_o x}$, wenn $x = p + iq$ gefetzt und $C = \frac{F_o x}{\underset{x}{d} f_o x}$, wenn $x = p - iq$ gefetzt, d. h. beide werden Richtgrösen und zwar, wenn $B = M + iN$ ist, fo wird $C = M - iN$. Fügen wir nun die beiden Brüche einander zu, fo erhalten wir, da im Nenner $(x - p - iq)(x - p + iq) = (x - p)^2 + q^2$ ist,

$$\frac{(M + iN)(x - p + iq) + (M - iN)(x - p - iq)}{(x - p)^2 + q^2}$$

$$= \frac{2Mx - 2(Mp + Nq)}{(x - p)^2 + q^2} = \frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2},$$

wo $P = 2M$ und $Q = -2(Mp + Nq)$ ist. Alfo wird dann

$$\frac{F_o x}{f_o x} = \frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2} + \frac{D}{x - d} + \cdots + \frac{L}{x - l}.$$

Auf gleiche Weife kann man je zwei Brüche, deren Nenner zwei conjugirte Wurzeln find, behandeln.

Als Beispiel behandle ich

$$\frac{F_o x}{f_o x} = \frac{5x - 3}{x^3 - x^2 - 4x + 2}; \quad \frac{F_o x}{\underset{x}{d} f_o x} = \frac{5x - 3}{3x^2 - 2x - 4}$$

Wurzeln $x = 1 + i$, $x = 1 - i$, $x = -1$

$$\frac{F_o x}{f_o x} = \frac{A}{x - 1 - i} + \frac{B}{x - 1 + i} + \frac{C}{x + 1}$$

$A = -{}^1/_{20}(11 + 13i)$, $B = -{}^1/_{20}(11 - 13i)$, $C = -8$

und $\frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2} = -\frac{{}^1/_{10}(11x - 24)}{x^2 - 2x + 2}$.

264. **Satz** **Wenn in dem echten Bruche zweier Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen der Nenner $f_o x = (x - b)^b \varphi_o x$ gleiche Fache und zwar b gleiche Fache $x - b$ enthält, fo ist**

$$\frac{F_o x}{f_o x} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a} = \frac{B_0}{(x - b)^b} + \frac{B_1}{(x - b)^{b-1}} + \cdots + \frac{B_{b-1}}{x - b} + \frac{F_{ob} x}{\varphi_o x}$$

und fetzen wir hier

$$B_0 + B_1(x - b) + \cdots + B_{b-1}(x - b)^{b-1} = X$$

und bezeichnen wir mit X_b den Wert diefer Folge, wo $x = b$ gefetzt ist, fo ist $B_0 = X_b$, $B_1 = \underset{x}{d} X_b, \cdots a!\, B_a = \underset{x}{d}^a X_b$

und ist $E_o x_b = B_0 \varphi_o x_b$ $\quad \underset{x}{d}^m F_o x_b = S m^{\cdot a} \underset{x}{d}^{m-a} \varphi_o x_b$

$$\underset{x}{d}^a X_b = S \frac{m!}{(m - a)!} B_a \underset{x}{d}^{m-a} \varphi_o x_b$$ **und hieraus B_a zu berechnen.**

Beweis. Nach 261a ist

$$\frac{F_o x}{f_o x} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \cdots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \frac{F_{ob}x}{\varphi_o x}$$

auch ist $f_o x = (x-b)^b \varphi_o x$. Hieraus ergiebt sich, wenn wir Alles auf den Nenner $(x-b)^b \varphi_o x$ bringen

$F_o x = [B_0 + B_1(x-b) + \cdots + B_{b-1}(x-b)^{b-1}]\varphi_o x + (x-b)^b F_{ob} x$

und wenn wir $B_0 + B_1(x-b) + \cdots + B_{b-1}(x-b)^{b-1} = X$ setzen, und jede Folge von x, für welche $x = b$ gesetzt ist, mit Folge x_b bezeichnen.

$F_o x = X\varphi_o x + (x-b)^b F_{ob} x$ und für $x = b$ $F_o x_b = X_b \varphi_o x_b$.

Nun ist aber, wenn wir die Diffe von X_b entwickeln

$B_0 = X_b$, $B_1 = \underset{x}{d} X_b$; $1 \cdot 2 B_2 = \underset{x}{d}^2 X_b$; $a! B_a = \underset{x}{d}^a X_b$.

Wir werden also die sämmtlichen Grösen $B_0, B_1 \cdots B_{b-1}$ unmittelbar haben, wenn wir die Grösen $X_b, \underset{x}{d} X_b, \cdots \underset{x}{d}^{b-1} X_b$ haben.

Es ist aber $F_o x_b = X_b \varphi_o x_b = B_0 \varphi_o x_b$;

$$\underset{x}{d} F_o x_b = X_b \underset{x}{d} \varphi_o x_b + \varphi_o x_b \underset{x}{d} X_b = B_0 \underset{x}{d} \varphi_o x_b + B_1 \varphi_o x_b$$

und nach 92

$$\underset{x}{d}^m F_o x_b = S m^{\cdot a} \underset{x}{d}^{m-a} \varphi_o x_b \underset{x}{d}^a X_b = S \frac{m!}{(m-a)!} B_a \underset{x}{d}^{m-a} \varphi_o x_b,$$

da $m^{\cdot a} \cdot a! = \dfrac{m!}{a!(m-a)!}$ und $a! = \dfrac{m!}{(m-a)!}$ ist.

Hieraus lassen sich, da $F_o x_b$ und $\varphi_o x_b$ bekannt sind, die Folgen $X_b, \underset{x}{d} X_b \cdots \underset{x}{d}^{b-1} X_b$ berechnen.

Als Beispiel berechne ich $\dfrac{F_o x}{f_o x} = \dfrac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{1}{x^5 - x^4 - x^3 + x^2}$

und setze $x_b = 0$, $\varphi_o x = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$, $F_o x = 1$

$$\underset{x}{d} \varphi_o x = 3x^2 - 2x - 1 \qquad \underset{x}{d} F_o x = 0,$$

so ist $B_0 = 1$, $\underset{x}{d} F_o x = 0 = B_0 \underset{x}{d} \varphi_o x_b + \varphi_o x_b B_1 = 1(-1) + 1 \cdot B_1$

$B_1 = 1$.

Ferner

$x_c = 1$ $\quad \psi_o x = x^2(x+1) = x^3 + x^2$ $\quad \underset{x}{d} \psi_o x = 3x^2 + 2x$

$C_0 = \dfrac{F_o x_c}{\psi_o x_c} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \underset{x}{d} F_o x_c = 0 = C_0 \underset{x}{d} \psi_o x_c + \psi_o x_c C_1 = C_0 \cdot 5 + 2C_1$

$C_1 = -\dfrac{5}{4}$.

Endlich

$x_d = -1 \quad D = \frac{F_0 x_d}{\varphi_0 x_d} = \frac{1}{4}$, ſomit ist

$$\frac{1}{x^5 - x^4 - x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{5}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}.$$

Wenn in der Gleichung $f_0 x = (x - b)^b (x - c)^c \cdots (x - l)^l$ zwei Wurzeln einander conjugirte Richtgröſsen ſind, z. B.

$f_0 x = (x - b - ic)^b (x - b + ic)^b \cdots (x - l)^l$, ſo ſind auch die Zähler derſelben wieder conjugirte Richtgröſen und kann man die Teilbrüche

$\frac{M + iN}{(x - (b + ic))^b} + \frac{M - iN}{(x - (b - ic))^b}$ wieder entsprechend wie in Satz 263 mit einander vereinigen zu dem Nenner $((x - b)^2 + c^2)^b$.

2. Das Integern der Teilbrüche von Höhen.

Nachdem wir die Brüche in Teilbrüche zerlegt haben, wenden wir uns nun zu dem Integern dieſer Teilbrüche und dadurch der ganzen Brüche.

265. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1} \frac{Ax^m}{(a + bx)^n} = \mathrm{S}(-1)^\alpha \frac{A m^{\cdot\alpha} a^\alpha}{(m - n - \alpha + 1) b^{m+1}} (a + bx)^{m - n - \alpha + 1}.$$

Beweis. Wir ſetzen $a + bx = z$, $b = \underset{x}{d} z$, $x = \frac{z - a}{b}$, dann ist

$$\frac{Ax^m}{(a + bx)^n} = \frac{A(z - a)^m}{b^m \cdot z^n} = \frac{A}{b^m \cdot z^n}(z - a)^m$$

$$= \frac{A}{b^m z^n} \mathrm{S}(-1)^\alpha \cdot m^{\cdot\alpha} z^{m-\alpha} a^\alpha = \mathfrak{S} \frac{(-1)^\alpha A \cdot m^{\cdot\alpha} \cdot a^\alpha}{b^m} z^{m - n - \alpha}$$

$$= \mathfrak{S} \frac{(-1)^\alpha A \cdot m^{\cdot\alpha} \cdot a^\alpha}{b^m} (a + bx)^{m - n - \alpha},$$ alſo ist

$$\underset{x}{d}^{-1} \frac{Ax^m}{(a + bx)^n} = \mathfrak{S} \frac{(-1)^\alpha \cdot A \cdot m^{\cdot\alpha} \cdot a^\alpha}{(m - n - \alpha + 1) b^{m+1}} (a + bx)^{m - n - \alpha + 1}.$$

266. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-r} \frac{Ax^m}{(a + bx)^n} = \mathrm{S}(-1)^\alpha \frac{A \cdot a^\alpha \cdot m^{\cdot\alpha} (m - n - \alpha)!}{b^{m+r}(m + r - n - \alpha)!} (a + bx)^{m + r - n - \alpha}.$$

Beweis. Unmittelbar nach 265.

267. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} \frac{B}{x - b} \overset{*}{=} B l_e (x - b)$ * wo $x > b$.

Beweis. Unmittelbar nach 197.

268. **Satz. Wenn** $\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

und $f_0 x = (x - b)(x - c) \cdots (x - l)$ **ist, wo die Wurzeln ſämmtlich einander ungleich, auch** $x > b$, $x > c, \cdots x > l$ **und** $B, C, \cdots L$ **nach**

261 bestimmt sind, so ist

$$\underset{x}{\overset{-1}{d}}\frac{F_0x}{f_0x} = B\cdot l_e(x-b) + C\cdot l_e(x-c) + \cdots + L\cdot l_e(x-l).$$

Beweis. Unmittelbar aus 267 und 262.

Satz. 269.

$$\underset{x}{\overset{-(r+1)}{d}}\frac{B}{x-b} \overset{*}{=} B\frac{(x-b)^r}{r!}\left[l_e(x-b) - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right)\right]$$

* wo $x > b$ und $r > 0$.

Beweis. Unmittelbar nach 240, wenn wir $n = 1$, $m = r$ setzen.

Satz. Wenn $\frac{F_0x}{f_0x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$ 270.

und $f_0x = (x-b)(x-c)\cdots(x-l)$ ist, wo die Wurzeln sämmtlich einander ungleich, auch $x > b$, $x > c, \cdots x > l$ und $r > 0$ ist, auch $B, C, \cdots L$ nach 261 bestimmt sind, so ist

$$\underset{x}{\overset{-(r+1)}{d}}\frac{F_0x}{f_0x} = \frac{B(x-b)^r}{r!}l_e(x-b) + \frac{C(x-c)^r}{r!}l_e(x-c) + \cdots$$
$$+ \frac{L(x-l)^r}{r!}l_e(x-l)$$
$$+ [B(x-b)^r + C(x-c)^r + \cdots + L(x-l)^r]\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right)$$

Beweis. Unmittelbar nach 269 und 262.

Satz. Wenn $n > 1$, $x > b$ und $r > 0$ ist, so ist 271.

$$\underset{x}{\overset{-r}{d}}\frac{B}{(x-b)^n} \overset{*}{=} \frac{(-1)^r \cdot r!\,B}{(n-r)!\,(x-b)^{n-r}} \qquad \text{* wo } r < n \text{ ist}$$

$$\underset{x}{\overset{-r}{d}}\frac{B}{(x-b)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,B\,l_e(x-b) \qquad \text{wo } r = n \text{ ist}$$

$$\underset{x}{\overset{-r}{d}}\frac{B}{(x-b)^n}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,B}{(r-n)!}(x-b)^{r-n}\left[l_e(x-b) - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-n}\right)\right]$$

wo $r > n$ ist.

Beweis. Der erste Teil des Satzes unmittelbar nach 233, der zweite unmittelbar nach 234 und dem ersten Teile, der dritte Teil unmittelbar nach 240.

Satz. Wenn $\frac{F_0x}{f_0x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$ 272.

und $f_0x = (x-b)^b(x-c)^c\cdots(x-l)^l$

wo f_0x gleiche Wurzeln enthält, auch $x > b$, $x > c, \cdots x > l$ und $B_0, B_1, \cdots L_{l-1}$ nach 264 bestimmt sind, auch $r > 0$ ist, so ist

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{F_0 x}{f_0 x} = \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}} + \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{B_1}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}} + \cdots + \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{B_{\mathfrak{b}-1}}{x-b}$$

$$+ \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{C_0}{(x-c)^{\mathfrak{c}}} + \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{C_1}{(x-c)^{\mathfrak{c}-1}} + \cdots + \frac{C_{\mathfrak{c}-1}}{x-c}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{L_0}{(x-l)^{\mathfrak{l}}} + \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{L_1}{(x-l)^{\mathfrak{l}-1}} + \cdots + \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}\frac{L_{\mathfrak{l}-1}}{x-l}$$

wo $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-r}$ von den Teilbrüchen nach 270 genommen werden.

Beweis. Unmittelbar nach 264

Durch die vorhergehenden Sätze können wir ganz allgemein jede Integre beliebigen Grades von jedem Bruche von Höhenreihen mit ganzen Plusstufen entwickeln. Für die Fälle, wo es fich um erste Integern handelt von Brüchen, deren Nenner Jgrösen als Wurzeln enthält, hat man die folgenden Sätze entwickelt, welche vielfach in Gebrauch find und daher noch erwähnenswert find.

273. **Satz.**

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2} \overset{*}{=} \frac{2}{(4ac-b^2)^{1/2}}\text{arc}\left(\tan = \frac{b+2cx}{(4ac-b^2)^{1/2}}\right)$$

$$^*\ \text{wo } 4ac - b^2 > 0$$

$$\overset{*}{=} -\frac{2}{b+2cx} \qquad ^*\ \text{wo } 4ac - b^2 = 0$$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\, l_e \frac{(b^2-4ac)^{1/2} + b + 2cx}{(b^2-4ac)^{1/2} - (b+2cx)}$$

$$^*\ \text{wo } 4ac - b^2 < 0 \text{ und } (b^2-4ac)^{1/2} > b + 2cx$$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\, l_e \frac{b + 2cx + (b^2-4ac)^{1/2}}{b + 2cx - (b^2-4ac)^{1/2}}$$

$$^*\ \text{wo } 4ac - b^2 < 0 \text{ und } (b^2-4ac)^{1/2} < b + 2cx.$$

Beweis. Es ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-1}\dfrac{1}{a+bx+cx^2}$

$$= \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-1}\frac{c}{ac+bcx+c^2x^2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x}^{-1}\frac{c}{(ac-{}^1\!/_4 b^2) + (cx + {}^1\!/_2 b)^2}$$

Wir fetzen hier $y = cx + {}^1\!/_2 b = \dfrac{b+2cx}{2}$, alfo $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{x} y = c$

und $(ac - {}^1\!/_4 b^2)^{1/2} = \alpha$, $(4ac - b^2)^{1/2} = 2\alpha$.

1. Es fei $ac - {}^1\!/_4 b^2 > 0$ oder $4ac - b^2 > 0$, alfo α reell, fo ist

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\mathfrak{d}_x y}{\alpha^2+y^2}=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arc}\left(\tan=\frac{y}{\alpha}\right)$$ (nach 247),

alfo $$=\frac{2}{(4ac-b^2)^{1/2}}\,\mathrm{arc}\left(\tan=\frac{b+2cx}{(4ac-b^2)^{1/2}}\right).$$

2. Es fei $4ac-b^2=0$, dann ist $\alpha=0$, alfo

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\mathfrak{d}_x y}{y^2}=-\frac{1}{y}=-\frac{2}{b+2cx}.$$ (nach 196).

3. Es fei $4ac-b^2<0$, alfo $b^2-4ac>0$ und fei $(b^2-4ac)^{1/2}>b+2cx$. Dann fetzen wir $(\frac{1}{4}b^2-ac)^{1/2}=\alpha$, alfo $\alpha>y$, dann ist

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\mathfrak{d}_x y}{-\alpha^2+y^2}=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{(-1)\mathfrak{d}_x y}{\alpha^2-y^2}=-\frac{1}{2\alpha}\,l_e\frac{\alpha+y}{\alpha-y}$$

(nach 245), alfo

$$=-\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\,l_e\frac{(b^2-4ac)^{1/2}+b+2cx}{(b^2-4ac)^{1/2}-b-2cx}.$$

Da fonst der Log von einer Strichgröse zu nehmen wäre.

4. Es fei $4ac-b^2<0$, alfo $b^2-4ac>0$ und fei $(b^2-4ac)^{1/2}<b+2cx$. Dann fetzen wir wieder $(\frac{1}{4}b^2-ac)^{1/2}=\alpha$, dann ist $\alpha<y$ und es ist

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\mathfrak{d}_x y}{y^2-\alpha^2}=-\frac{1}{2\alpha}\,l_e\frac{y+\alpha}{y-\alpha}$$ (nach 245), alfo

$$=-\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\,l_e\frac{b+2cx+(b^2-4ac)^{1/2}}{b+2cx-(b^2-4ac)^{1/2}}.$$

Für diefe Formel lassen fich die höhern Integern nicht mehr ableiten, fofern nicht $4ac-b^2=0$ ist.

Satz. 274.

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{x}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{2c}l_e(a+bx+cx^2)-\frac{b}{2c}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

Beweis. Es ist nach 112

$$\mathfrak{d}_x l_e(a+bx+cx^2)=\frac{b+2cx}{a+bx+cx^2},$$ alfo ist

$$l_e(a+bx+cx^2)=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}$$ (und nach 195)

$$=b\,\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}+2c\,\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{x}{a+bx+cx^2},$$

mithin ist

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{x}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{2c}\mathrm{l_e}(a+bx+cx^2)-\frac{b}{2c}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

und letztere Gröse nach 273 bekannt.

275. **Satz.** $\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}=\frac{B}{2c}\mathrm{l_e}(a+bx+cx^2)$

$$+\frac{2Ac-Bb}{2c}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

Beweis.

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}=B\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{x}{a+bx+cx^2}+A\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

$$=\frac{B}{2c}\mathrm{l_e}(a+bx+cx^2)-\frac{Bb}{2c}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}+A\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

(nach 274)

$$=\frac{B}{2c}\mathrm{l_e}(a+bx+cx^2)+\frac{2Ac-Bb}{2c}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

276. **Satz.** $\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a+1}}=\frac{b+2cx}{a(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)^a}$

$$+\frac{(2a-1)2c}{a(4ac-b^2)}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^a}$$

oder $\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{a+1}}=\frac{\alpha}{a\lambda T^a}+\frac{(2a-1)2c}{a\lambda}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^a}$,

wo $T=a+bx+cx^2$, $\alpha=b+2cx$, $\lambda=4ac-b^2$.

Beweis. Wir ſetzen $a+bx+cx^2=T$, $4ac-b^2=\lambda$, und $b+2cx=\alpha$, dann ist $\underset{x}{\mathrm{d}}T=b+2cx$,

$\underset{x}{\mathrm{d}}\frac{\alpha}{T^a}=-a\frac{\alpha^2}{T^{a+1}}+2c\frac{1}{T^a}$, auch ist

$cT=ac+bcx+c^2x^2=ac-{}^1/_4b^2+(cx+{}^1/_2)^2$,

alſo $4cT=4ac-b^2+(2cx+b)^2=\lambda+\alpha^2$,

alſo $\alpha^2=(b+2cx)^2=4cT-\lambda$, demnach ist

$$\underset{x}{\mathrm{d}}\frac{\alpha}{T^a}=+a\lambda\frac{1}{T^{a+1}}-(4ca-2c)\frac{1}{T^a}=a\lambda\frac{1}{T^{a+1}}-2c(2a-1)\frac{1}{T^a}.$$

Und wenn man die Integern nimmt

$\frac{\alpha}{T^a}=a\lambda\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{a+1}}-2c(2a-1)\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^a}$, mithin

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{a+1}}=\frac{\alpha}{a\lambda T^a}+\frac{(2a-1)2c}{a\lambda}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^a}.$$

Satz. $$\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}} \overset{*}{=} \mathop{S}_{0,n-1} \frac{(2n+1-2c)!\,2^{c}c^{c}\alpha}{n(n-1)\cdots(n-c)\lambda^{c+1}T^{n-c}} + \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot 2^{n}c^{n}}{n!\,\lambda^{n}}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}$$ 277.

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$ und wo $(2n+1-2c)! = (2n+1-2)(2n+1-4)\cdots(2n+1-2c)$ ist, und für $c = 0$ $(2n+1-2c)! = 1$ gefetzt ist.

Beweis: 1. Diefer Satz gilt für $n = 1$, denn es ist nach 276

$$\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^2} = \frac{\alpha}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}.$$

2. Wenn der Satz für n gilt, fo gilt er auch für $n+1$, denn es ist nach 276

$$\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^{n+2}} = \frac{\alpha}{(n+1)\lambda T^{n+1}} + \frac{(2(n+1)-1)2c}{(n+1)\lambda}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}}$$

mithin, wenn wir nach der Vorausfetzung $\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}}$ entwickeln,

$$\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^{n+2}} = \frac{\alpha}{(n+1)\lambda T^{n+1}} + \frac{(2(n+1)+1-2)2c}{(n+1)\lambda}\mathop{S}_{0,n-1}\frac{(2n+1-2c)!\,2^{c}\cdot c^{c}\cdot\alpha}{n(n-1)\cdots(n-c)\lambda^{c+1}T^{n-c}} + \frac{(2(n+1)-1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot 2^{n+1}\cdot c^{n+1}}{(n+1)!\,\lambda^{n+1}}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}$$

und fetzen wir $b = c + 1$, fo erhalten wir

$$\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^{n+2}} = \mathop{S}_{0,(n+1)-1}\frac{(2(n+1)+1-2b)!\,2^{b}\cdot c^{b}\cdot\alpha}{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-b)\lambda^{b+1}T^{n+1-b}} + \frac{(2(n+1)-1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot 2^{n+1}\cdot c^{n+1}}{(n+1)!\,\lambda^{n+1}}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}.$$

Der Satz gilt alfo, wenn er für n gilt, auch für $n+1$. Nun gilt er für 1, alfo auch für 2, 3 ⋯ kurz allgemein.

Wir erhalten für:

$$n = 1,\quad \mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^2} = \frac{\alpha}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}$$

$$n = 2,\quad \mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^3} = \frac{\alpha}{2\lambda T^2} + \frac{3c\alpha}{\lambda^2 T} + \frac{6c^2}{\lambda^2}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}$$

$$n = 3,\quad \mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^4} = \frac{\alpha}{3\lambda T^3} + \frac{5c\alpha}{3\lambda^2 T^2} + \frac{10c^2\alpha}{\lambda^3 T} + \frac{20c^3}{\lambda^3}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}$$

$$n = 4,\quad \mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T^5} = \frac{\alpha}{4\lambda T^4} + \frac{7c\alpha}{6\cdot\lambda^2 T^3} + \frac{35c^2\alpha}{6\cdot\lambda^3 T^2} + \frac{35c^3\alpha}{\lambda^4 T} + \frac{70c^4}{\lambda^4}\mathop{d}_{x}{}^{-1}\frac{1}{T}$$

$$n=5,\ \underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^6}=\frac{\alpha}{5\lambda T^5}+\frac{9c\alpha}{10\lambda^2T^4}+\frac{21\cdot c^2\alpha}{5\cdot\lambda^3T^3}+\frac{21c^3\alpha}{\lambda^4T^2}+\frac{126c^4\alpha}{\lambda^5T}+\frac{252c^5}{\lambda^5}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T}$$

$$n=6,\ \underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^7}=\frac{\alpha}{6\lambda T^6}+\frac{11c\alpha}{15\lambda^2T^5}+\frac{33c^2\alpha}{10\lambda^3T^4}+\frac{77c^3\alpha}{5\lambda^4T^3}+\frac{77c^4\alpha}{\lambda^5T^2}+\frac{462c^5\alpha}{\lambda^6T}+\frac{924c^6}{\lambda^6}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T}$$

278. **Satz.** $$\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^m}{T^{n+1}}=-\frac{1}{(2n-m+1)c}\frac{x^{m-1}}{T^n}$$
$$-\frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{m-1}}{T^{n+1}}+\frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}$$
wo $T=a+bx+cx^2$ gesetzt ist.

Beweis. Es ist $\underset{x}{d}\frac{x^{m-1}}{T^n}=(m-1)\frac{x^{m-2}}{T^n}-n\frac{x^{m-1}(b+2cx)}{T^{n+1}}$

und wenn man rechts das erste Glied mit $\frac{T}{T}$ vervielfacht, und für T im Zähler den Wert $T=a+bx+cx^2$ setzt, so ist

$$\underset{x}{d}\frac{x^{m-1}}{T^n}=(m-1)a\frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}-(n-m+1)b\frac{x^{m-1}}{T^{n+1}}-(2n-m+1)c\frac{x^m}{T^{n+1}}.$$

Hieraus ergiebt sich die entsprechende Integerngleichung.

$$\frac{x^{m-1}}{T^n}=(m-1)a\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}-(n-m+1)b\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{m-1}}{T^{n+1}}$$
$$-(2n-m+1)c\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^m}{T^{n+1}}\quad\text{oder}$$

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^m}{T^{n+1}}=-\frac{1}{(2n-m+1)c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^n}$$
$$-\frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{m-1}}{T^{n+1}}+\frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}.$$

Nach dieser Formel kann man nun die Formeln entwickeln

$$m=1,\ \underset{x}{d}^{-1}\frac{x}{T^{n+1}}=-\frac{1}{2ncT^n}-\frac{b}{2c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}}$$

$$m=2,\ \underset{x}{d}^{-1}\frac{x^2}{T^{n+1}}=-\frac{x}{(2n-1)cT^n}-\frac{(n-1)b}{(2n-1)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x}{T^{n+1}}+\frac{a}{(2n-1)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}}$$

$$m=3,\ \underset{x}{d}^{-1}\frac{x^3}{T^{n+1}}=-\frac{x^2}{(2n-2)cT^n}-\frac{(n-2)b}{(2n-2)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^2}{T^{n+1}}+\frac{2a}{(2n-2)c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}}$$

u. s. w.

Durch Anwendung dieser Formeln kann man dann auch für
$\underset{x}{d}^{-1}\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots+Hx^h}{(a+bx+cx^2)^{n+1}}$ die Formeln entwickeln.

279. **Satz.** $$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x\cdot T^{n+1}}\overset{*}{=}\underset{y}{d}^{-1}\frac{y^{2n+1}}{(c+by+ay^2)^{n+1}}$$

* **wo $y=\frac{1}{x}$ oder $x=\frac{1}{y}$ ist.**

Beweis. Man fetze $y = \frac{1}{x}$, alfo $x = \frac{1}{y}$ und $\underset{y}{\mathrm{d}}x = -\frac{1}{y^2}$, dann ist

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x(a + bx + cx^2)^{n+1}} = \underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{y}{\left(a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2}\right)^{n+1}}$$

$$= \underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{y^{2n+3}}{(ay^2 + by + c)^{n+1}} = \underset{y}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{y^{2n+3}}{(ay^2 + by + c)^{n+1}}\underset{y}{\mathrm{d}}x$$

$$= -\underset{y}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{y^{2n+1}}{(ay^2 + by + c)^{n+1}}.$$

Diefe Formel kann man dann integern und in dem Ergebnisse wieder $\frac{1}{x}$ statt y fetzen.

Satz. $$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x^m T^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}T^n}$$ 280.

$$-\frac{(n + m - 1)b}{(m-1)a}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m-1}T^{n+1}} - \frac{(2n + m - 1)c}{(m-1)a}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m-2}T^{n+1}}.$$

Beweis. Setzen wir in 278 statt m nun $-m + 2$, da der Satz auch für $-m$ gilt, indem er die Umkehrung einer Diff-Formel ist, welche für alle möglichen m und n richtig bleibt, fo erhalten wir

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m-2}T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n + m - 1)c}\cdot\frac{1}{x^{m-1}T^n}$$

$$-\frac{(n + m - 1)b}{(2n + m - 1)c}\cdot\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m-1}T^{n+1}} - \frac{(m-1)a}{(2n + m - 1)c}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{x^m T^{n+1}}$$

und hieraus, wenn man die letzte Integre auf die linke Seite stellt, unmittelbar den Satz.

3. Das Integern von Brüchen mit der Tiefe zweiten Grades.

Wenn in dem gegebenen Bruche Tiefen vorkommen, fo lassen fich die Integern nur noch unter gewissen Bedingungen gewinnen, welche wir im Folgenden besprechen wollen.

Satz. $$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{(a + bx)^n}{(a + bx)^{1/2}} = \underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}(a + bx)^{n - 1/2} = \frac{2(a + bx)^{n + 1/2}}{(2n + 1)b}.$$ 281.

Beweis. Nach 232 ist $\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}(a + bx)^{\mu} = \frac{(a + bx)^{\mu+1}}{(\mu + 1)b}$, fetzen wir hier $\mu = n - \frac{1}{2}$, fo folgt unmittelbar der Satz.

282. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^m(a+bx)^n}{(a+bx)^{1/2}} = \underset{x}{d}^{-1}x^m(a+bx)^{n-1/2}$

$$= \frac{2x^m(a+bx)^{n+1/2}}{(2m+2n+1)b} - \frac{2ma}{(2m+2n+1)b}\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx)^{n-1/2}.$$

Beweis. Wenn man teilweiſe integert nach 212, ſo erhält man

$$\underset{x}{d}^{-1}x^m(a+bx)^{n-1/2} = x^m\underset{x}{d}^{-1}(a+bx)^{n-1/2}$$

$$- m\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}\underset{x}{d}^{-1}(a+bx)^{n-1/2}$$

und nach 281

$$= \frac{2x^m(a+bx)^{n+1/2}}{(2n+1)b} - \frac{2m}{(2n+1)b}\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx)^{n+1/2}$$

Wenn man dieſe Gleichung mit $(2n+1)b$ vervielfacht und im letzten Gliede $(a+bx)^{n+1/2} = (a+bx)(a+bx)^{n-1/2}$ ſetzt, ſo erhält man

$$(2n+1)b\underset{x}{d}^{-1}x^m(a+bx)^{n-1/2} = 2x^m(a+bx)^{n+1/2}$$

$$-2ma\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx)^{n-1/2} - 2mb\underset{x}{d}^{-1}x^m(a+bx)^{n-1/2}.$$

Bringt man hier das letzte Glied allein auf die linke Seite, ſo hat man die Gleichung des Satzes.

283. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}(A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m)(a+bx)^{n-1/2} = \underset{0,m}{\mathfrak{S}} A_\alpha\underset{x}{d}^{-1}x^\alpha(a+bx)^{n-1/2}.$$

Um ferner die Integre von $\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}}$ zu gewinnen, ſchlagen wir denſelben Weg ein, den wir in 273 betraten.

284. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}} \overset{*}{=} \frac{1}{c^{1/2}}l_e\left[{}^1\!/_2 b + cx + c^{1/2}(a+bx+cx^2)^{1/2}\right]$$

* wo $c > 0$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{(-c)^{1/2}}\text{arc}\left[\sin = \frac{-2cx-b}{(b^2-4ac)^{1/2}}\right]$$

* wo $c < 0$

Beweis: 1. Es ſei $+c$ eine Plusgröse, dann ist $ac + bcx + c^2x^2 = (ac - {}^1\!/_4b^2) + ({}^1\!/_2b + cx)^2$. Setzen wir hier $ac - {}^1\!/_4b^2 = \alpha^2$, und ${}^1\!/_2b + cx = y$, alſo $c = \underset{x}{d}y$, oder $\underset{y}{d}x = \frac{1}{c}$, ſo ist

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}}=\underset{x}{d}^{-1}\frac{c^{1/2}}{(ac+bcx+c^2x^2)^{1/2}}=\underset{x}{d}^{-1}\frac{c^{1/2}}{(\alpha^2+y^2)^{1/2}}$$

und nach 211

$$=\underset{y}{d}^{-1}\frac{c^{1/2}}{c(\alpha^2+y^2)^{1/2}}=\frac{1}{c^{1/2}}\underset{y}{d}^{-1}\frac{1}{(\alpha^2+y^2)^{1/2}}$$

und nach 246

$$=\frac{1}{c^{1/2}}l_e\left(y+(\alpha^2+y^2)^{1/2}\right)$$

$$=\frac{1}{c^{1/2}}l_e\left[{}^1/_2b+cx+(ac+bcx+c^2x^2)^{1/2}\right]$$

$$=\frac{1}{c^{1/2}}l_e\left[{}^1/_2b+cx+c^{1/2}(a+bx+cx^2)^{1/2}\right].$$

2. Es ſei $+c$ eine Strichgröse, und $-c=\gamma$, wo γ eine Plusgröse, dann ist

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}}=\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx-\gamma x^2)^{1/2}}=\underset{x}{d}^{-1}\frac{\gamma^{1/2}}{(a\gamma+b\gamma x-\gamma^2x^2)^{1/2}}$$

$$=\gamma^{1/2}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{({}^1/_4b^2+a\gamma)-(\gamma x-{}^1/_2b)^{1/2}}.$$

Setzen wir hier

${}^1/_4b^2+a\gamma=\alpha^2$ und $\gamma x-{}^1/_2b=y$; $x=\frac{y+{}^1/_2b}{\gamma}$ $\underset{y}{d}x=\frac{1}{\gamma}$, ſo ist

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}}=\frac{\gamma^{1/2}}{\gamma}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(\alpha^2-y^2)^{1/2}}=\frac{1}{\gamma^{1/2}}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{y}{\alpha}\right)$$

(nach 248)

$$=\frac{1}{(-c)^{1/2}}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{-2cx-b}{(b^2-4ac)^{1/2}}\right)$$

wo wieder $\gamma=-c$ geſetzt ist.

3. Wenn $c=0$, ſo wird $a+bx+cx^2=a+bx$ und führt auf Satz 281 zurück.

Satz. 285.

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a+1/2}}=\frac{2(b+2c)}{(2a-1)(4ac-b^2)}\,\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a-1/2}}$$

$$+\frac{(a-1)2c}{(2a-1)(4ac-b^2)}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a-1/2}}$$

oder $\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{a+1/2}} \overset{*}{=} \frac{2\alpha}{(2a-1)\lambda}\,\frac{1}{T^{a-1/2}} + \frac{(a-1)8c}{(2a-1)\lambda}\cdot\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{a-1/2}}$

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2c$, $\lambda = 4ac - b^2$.

Beweis. Nach Satz 276 ist

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{n+1}} = \frac{\alpha}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^n}.$$

Setzen wir hier $n = a - 1/2$, fo folgt unmittelbar der Satz.

286. **Satz.** $\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{n+1/2}} \overset{*}{=} \frac{2\alpha}{(2n-1)\lambda}\,\frac{1}{T^{n-1/2}}$

$$+ \underset{1,n-1}{\mathrm{S}} \frac{2\alpha\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-c)(8c)^c}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-(2c+1))\lambda^{c+1}}\,\frac{1}{T^{n-\frac{2c+1}{2}}}$$

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$.

Beweis: 1. Diefer Satz gilt für $n = 1$, denn es ist nach 285

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{1+1/2}} = \frac{2\alpha}{\lambda}\,\frac{1}{T^{1/2}}$$

2. Wenn der Satz für n gilt, fo gilt er auch für $n + 1$, wenn wir $a = n + 1$ fetzen, denn es ist nach 285

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{(n+1)+1/2}} = \frac{2\alpha}{(2(n+1)-1)\lambda}\,\frac{1}{T^{(n+1)-1/2}}$$

$$+ \frac{((n+1)-1)8c}{(2(n+1)-1)\lambda}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{T^{n+1/2}}$$ und nach der Annahme

$$= \frac{2\alpha}{(2(n+1)-1)\lambda}\cdot\frac{1}{T^{(n+1)-1/2}} + \frac{((n+1)-1)2c}{(2(n+1)-1)\lambda}\Bigg[\frac{2\alpha}{(2(n+1)-3)\lambda}\,\frac{1}{T^{n+1-3/2}}$$

$$+ \underset{1,n-1}{\mathrm{S}} \frac{2\alpha(n-1)(n-2)\cdots(n-c)(8c)^c}{(2(n+1)-3)(2n-3)\cdots(2n-(2c+1))\lambda^{c+1}}\,\frac{1}{T^{n-\frac{2c+1}{2}}}\Bigg]$$

$$= \frac{2\alpha}{(2(n+1)-1)\lambda}\,\frac{1}{T^{(n+1)-1/2}}$$

$$+ \underset{1,n-1}{\mathrm{S}} \frac{2\alpha((n+1)-1)((n+1)-2)\cdots((n+1)-(c+1))(8c)^{c+1}}{(2(n+1)-1)(2(n+1)-3)\cdots(2(n+1)-(2(c+1)+1))\lambda^{c+2}}\,\frac{1}{T^{(n+1)-\frac{2(c+1)+1}{2}}}$$

d. h. die Formel gilt auch für $n + 1$, wo $c + 1$ bis $(n + 1) - 1$ genommen wird. Die Formel gilt alfo allgemein.

287. **Satz.**

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} T^{n+1/2} \overset{*}{=} \frac{2\alpha}{(n+1)8c} T^{n+1/2} + \frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} T^{n-1/2}$$

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$.

Beweis. Wir setzen in 285 $a = -n$, dann wird $a + {}^1/_2 = -(n - {}^1/_2)$ und $a - {}^1/_2 = -(n + {}^1/_2)$ und wir erhalten

$$\underset{x}{d}^{-1} T^{n - 1/2} = -\frac{2\alpha}{(2n+1)\lambda} T^{n + 1/2} + \frac{(n+1)8c}{(2n+1)\lambda}\underset{x}{d}^{-1} T^{n + 1/2}.$$

Setzen wir nun das letzte Glied allein auf die linke Seite und vervielfachen beide Seiten mit $\frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c}$, so erhalten wir

$$\underset{x}{d}^{-1} T^{n + 1/2} = \frac{2\alpha}{(n+1)8c} T^{n + 1/2} + \frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c}\underset{x}{d}^{-1} T^{n - 1/2}.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} T^{n + 1/2} \overset{*}{=} \frac{2\alpha \cdot T^{n+1/2}}{(n+1)8c}$ 288.

$$+ \underset{1,n}{S} \frac{2\alpha(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+3-2c)\lambda^c}{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-c)(8c)^{c+1}} T^{n+1/2-c}$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+1-2c)\lambda^{c+1}}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n+1-c)(8c)^{c+1}}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{1/2}}$$

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$ ist.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 0$, denn es ist nach 287

$$\underset{x}{d}^{-1} T^{1/2} = \frac{2\alpha}{8c} T^{1/2} + \frac{\lambda}{8c}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{1/2}}.$$

2. Wenn der Satz für n gilt, so gilt er auch für $n + 1$, denn es ist nach 287, wenn wir für n nun $n + 1$ setzen

$$\underset{x}{d}^{-1} T^{(n+1)+1/2} = \frac{2\alpha}{((n+1)+1)8c} T^{(n+1)+1/2} + \frac{(2(n+1)+1)\lambda}{(n+1+1)8c}\underset{x}{d}^{-1} T^{n+1/2}$$

und nach der Annahme

$$= \frac{2\alpha}{((n+1)+1)8c} T^{(n+1)+1/2} + \frac{(2(n+1)+1)\lambda}{((n+1)+1)8c}\Bigg[\frac{2\alpha}{(n+1)8c} T^{n+1/2}$$

$$+ \underset{1,n}{S} \frac{2\alpha(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+3-2c)\lambda^c}{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-c)(8c)^{c+1}} T^{n+1/2-c}$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\lambda^{n+1}}{(n+1)\cdot n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1(8c)^{n+1}}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{1/2}}\Bigg]$$

$$= \frac{2\alpha T^{(n+1)+1/2}}{((n+1)+1)8c} +$$

$$\underset{1,n}{S} \frac{2\alpha(2(n+1)+1)(2(n+1)-1)\cdots(2(n+1)+3-2(c+1))\lambda^{c+1}}{((n+1)+1)(n+1)((n+1)-1)\cdots((n+1)+1-(c+1))(8c)^{c+2}} T^{(n+1)+1/2-(c+1)}$$

$$+ \frac{(2(n+1)+1)(2(n+1)-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\lambda^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)(n+1)((n+1)-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1(8c)^{(n+1)+1}}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{T^{1/2}}$$

d. h. die Formel gilt auch für n + 1, wo c + 1 bis n + 1 genommen wird. Die Formel gilt alſo ganz allgemein.

289. **Satz.** $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{x^m}{T^{n+1/2}} = -\frac{1}{(2n-m)c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^{n-1/2}}$$
$$-\frac{(2n+1-2m)b}{(2n-m)2c}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{x^{m-1}}{T^{n+1/2}}+\frac{(m-1)a}{(2n-m)c}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{x^{m-2}}{T^{n+1/2}}.$$

Beweis. Unmittelbar aus Satz 277, wenn man statt n die Gröse $n - {}^1/_2$ einführt.

290. **Satz.** $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{x^m T^{n+1/2}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}T^{n-1/2}}$$
$$-\frac{(2(n+m)-3)b}{(m-1)2a}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m-1}T^{n+1/2}}-\frac{(2n-m-2)c}{(m-1)a}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m-2}T^{n+1/2}}.$$

Beweis. Unmittelbar aus 279, wenn man statt n die Gröse $n - {}^1/_2$ einführt.

Ein ſehr fruchtbarer Weg, um Brüche, welche Tiefen enthalten, in Brüche mit Höhen zu verwandeln, ist die Einführung einer neuen Veränderlichen, durch welche die Tiefe in eine Höhe umgewandelt wird. Die Einführung geschieht nach dem Satze 211.

So ſetzt man

1. $(\alpha+\beta x)^{1/2} = y$, alſo $x = \dfrac{y^2-\alpha}{\beta}$ $\quad \underset{y}{\mathfrak{d}}x = \dfrac{2y}{\beta}.$

2. $(\alpha+\beta x)^{\frac{1}{n}} = y$, alſo $x = \dfrac{y^n-\alpha}{\beta}$ $\quad \underset{y}{\mathfrak{d}}x = \dfrac{ny^{n-1}}{\beta}.$

3. Wenn $(\alpha^2+\beta^2x^2)^{1/2}$ vorkommt, ſo ſetzt man

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{1/2}-\beta x}{\alpha} = y, \text{ alſo } x = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1-y^2}{2y} \qquad \underset{y}{\mathfrak{d}}x = -\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1+y^2}{2y^2}$$
$$(\alpha^2+\beta^2x^2)^{1/2} = \alpha\frac{1+y^2}{2y}.$$

4. Wenn $(\alpha^2-\beta^2x^2)^{1/2}$ vorkommt, ſo ſetzt man

$$\left(\frac{\alpha-\beta x}{\alpha+\beta x}\right)^{1/2} = y, \text{ alſo } x = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1-y^2}{1+y^2} \qquad \underset{y}{\mathfrak{d}}x = -\frac{4\alpha}{\beta}\,\frac{y}{(1+y^2)^2}$$
$$(\alpha^2-\beta^2x^2)^{1/2} = \frac{2\alpha y}{1+y^2}.$$

5. $(a+bx+cx^2)^{1/2} = \gamma(\alpha+\beta x+x^2)^{1/2} = \gamma(y-x) = \gamma\dfrac{\alpha+\beta y+y^2}{\beta+2y}$, da $x = \dfrac{y^2-\alpha}{\beta+2y}$. Ferner $\underset{y}{\mathfrak{d}}x = \dfrac{\alpha+\beta y+y^2}{(\beta+2y)^2}$, alſo nach 211

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}}=\mathfrak{d}_y^{-1}\frac{\beta+2y}{\gamma(\alpha+\beta y+y^2)}\mathfrak{d}_y x$$

$$=\mathfrak{d}_y^{-1}\frac{\beta+2y}{\gamma(\alpha+\beta y+y^2)}\frac{2(\alpha+\beta y+y^2)}{(\beta+2y)^2}=\mathfrak{d}_y^{-1}\frac{2}{\gamma(\beta+2y)}=\frac{1}{\gamma}l_e(\beta+2y).$$

6. $(a+bx-cx^2)^{1/2}=\gamma(\alpha+\beta x-x^2)^{1/2}=\gamma((x-a_1)(a_2-x))^{1/2}$

$=\gamma(x-a_1)y=\gamma\frac{(a_2-a_1)y}{1+y^2}$, da $a_2-x=(x-a_1)y^2$, alſo $x=\frac{a_2+a_1y^2}{1+y^2}$.

Ferner $\mathfrak{d}_y x=\frac{2(a_1-a_2)y}{(1+y^2)^2}$, alſo nach 211

$$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{(a+bx-cx^2)^{1/2}}=\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1+y^2}{\gamma(a_2-a_1)y}\mathfrak{d}_y x$$

$$=\mathfrak{d}_y^{-1}\frac{1+y^2}{\gamma(a_2-a_1)y}\frac{2(a_1-a_2)y}{(1+y^2)^2}=\mathfrak{d}_y^{-1}-\frac{2}{\gamma(1+y^2)}=-\frac{2}{\gamma}\,\mathrm{arc}(\tan=y).$$

Satz. Die Brüche mit Tiefen verwandelt man in Brüche mit Höhen durch Einführung einer neuen Veränderlichen nach Satz 211, und nimmt dann die Integre. 291.

4. Das Integren von Brüchen mit beliebigen Tiefen.

Wenn $\mathfrak{d}_x^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ zu ſuchen iſt, wo m, n, p und q ganze Zahlen ſind, ſo kann man die Tiefe durch Einführen einer neuen Veränderlichen entfernen, wenn entweder $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl iſt.

Satz. Um $\mathfrak{d}_x^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ zu finden, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl iſt, ſetze $a+bx^n=z^q$, dann iſt 292.

$$\mathfrak{d}_x^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}}\mathfrak{d}_z^{-1}(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}z^{p+q-1}.$$

Beweis. Da $a+bx^n=z^q$ geſetzt iſt, ſo iſt $x=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$,

mithin $\mathfrak{d}_z x=\frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$, alſo

$$\mathfrak{d}_x^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\mathfrak{d}_z^{-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m-1}{n}}\cdot z^p\cdot\frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$=\frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}}\mathfrak{d}_z^{-1}(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}z^{p+q-1}.$$

293. **Satz.** Um $\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ zu finden, wenn $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist, fetze $ax^{-n}+b=z^q$, dann ist

$$\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=-\frac{q\cdot a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n}\,\frac{z^{p+q-1}}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}.$$

Beweis. Da $ax^{-n}+b=z^q$ gefetzt ist, fo ist $x=\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{1}{n}}$

und $\underset{z}{d}x=-\frac{qa^{\frac{1}{n}}}{n}\,\frac{z^{q-1}}{(z^q-b)^{\frac{1}{n}+1}}$, alfo

$$\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\underset{x}{d}^{-1}x^{m+\frac{pn}{q}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\underset{z}{d}^{-1}\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-\frac{1}{n}}z^{p+q-1}\cdot\left(-\frac{q\cdot a^{\frac{1}{n}}}{n}\,\frac{1}{(z^q-b)^{\frac{1}{n}+1}}\right)$$

$$=-\frac{q\cdot a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n}\,\underset{z}{d}^{-1}\frac{z^{p+q-1}}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}.$$

Wenn weder $\frac{m}{n}$ noch $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl giebt, fo kann man nach Satz 212 die Rückleitung oder Reduktion verfuchen.

294. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^s=\frac{x^m}{m}(a+bx^n)^s-\frac{bns}{m}\underset{x}{d}^{-1}x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

Beweis. Nach 212 ist, da $\underset{x}{d}(a+bx^n)=bnx^{n-1}$ ist

$$\underset{x}{d}^{-1}(a+bx^n)^s x^{m-1}=(a+bx^n)^s\frac{x^m}{m}-\underset{x}{d}^{-1}\left(\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}\right)\underset{x}{d}(a+bx^n)^s$$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^s}{m}-\underset{x}{d}^{-1}\frac{s}{m}x^m(a+bx^n)^{s-1}bnx^{n-1}$$

$$=\frac{x^m}{m}(a+bx^n)^s-\frac{bns}{m}\underset{x}{d}^{-1}x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

295. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^s=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{bn(s+1)}$

$$-\frac{m-n}{bn(s+1)}\underset{x}{d}^{-1}x^{m-n-1}(a+bx^n)^{s+1}.$$

Beweis. Nach 294 ist, wenn man das letzte Glied allein auf die linke Seite bringt,

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^s}{bns} - \frac{m}{bns}\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s$$

und ſetzen wir hier m für m + n und s für s − 1, alſo m − n für m und s + 1 für s; ſo iſt

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{bn(s+1)}$$
$$- \frac{m-n}{bn(s+1)}\underset{x}{d}^{-1} x^{m-n-1}(a+bx^n)^{s+1}.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{am}$ 296.

$$- \frac{b(m+ns+n)}{am}\underset{x}{d}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^s.$$

Beweis. Es iſt $\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s$

$$= \underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)(a+bx^n)^{s-1}$$

$$= a\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1} + b\underset{x}{d}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1},$$

andrerſeits iſt nach 294

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^s}{m} - \frac{bns}{m}\underset{x}{d}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

Setzen wir dieſe beiden Werte gleich und bringen das erſte Glied $a\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1}$ allein auf die linke Seite, alſo

$$a\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^s}{m}$$
$$- \left(\frac{bns}{m} - b\right)\underset{x}{d}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

Setzen wir nun endlich s für s − 1, alſo s + 1 für s, ſo iſt

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{am}$$
$$- \frac{b(m+ns+n)}{am}\underset{x}{d}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^s.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{b(m+ns)}$ 297.

$$- \frac{a(m-n)}{b(m+ns)}\underset{x}{d}^{-1} x^{m-n-1}(a+bx^n)^s.$$

Beweis. Setzen wir m für m + n, alſo m — n für m und bringen das letzte Glied in 296 allein auf die linke Seite, ſo folgt unmittelbar der Satz.

298. **Satz.** $$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^s}{m+ns} + \frac{ans}{m+ns}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

Beweis. Setzen wir die in 296 benutzte identische Formel

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = a\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1} + b\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}$$

und entwickeln wir das letzte Glied nach Satz 295, ſo erhalten wir

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = a\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1} + b\left[\frac{x^m(a+bx^n)^s}{bns} - \frac{m}{bns}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s\right]$$

und wenn wir hier das erste und das letzte Glied in ein Glied vereinigen

$$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^s}{m+ns} + \frac{ans}{m+ns}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1}$$

299. **Satz.** $$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = -\frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{an(s+1)} + \frac{m+n+ns}{an(s+1)}\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{s+1}.$$

Beweis. Setzen wir s für s — 1, alſo s + 1 für s, und bringen wir das letzte Glied in 298 allein auf die linke Seite, ſo folgt unmittelbar der Satz.

Die obigen Formeln gestatten nun eine Reihe von Rückleitungen. Nach 294 kann man m vergrösern und gleichzeitig s vermindern, nach 295 kann man m vermindern und gleichzeitig s vergrösern. Nach 296 kann man m vergrösern nach 297 kann man m vermindern, während s unverändert bleibt; endlich nach 299 kann man s vergrösern und nach 298 kann man s vermindern, während m unverändert bleibt.

D. Die Integren von Stufen, Logen, von Winkeln und Bogenfolgen.

1. Die Integren von Stufenfolgen oder von Exponentialgrösen.

300. **Satz.** $$\underset{x}{\mathrm{d}}^{-1} f_0 e^{ax} \doteq \frac{1}{a}\underset{y}{\mathrm{d}}^{-1}\frac{1}{y} f_0 y \quad \text{* wo } y = e^{ax}.$$

Beweis. Wir ſetzen $e^{ax}=y$, alſo $x=\frac{l_e y}{a}$ $\underset{y}{d}x=\frac{1}{ay}$ und wenden nun den Satz 211 an $\underset{x}{d}^{-1} f_0 y = \underset{y}{d}^{-1} f_0 y \, \underset{y}{d} x = \underset{y}{d}^{-1}\frac{1}{ay} f_0 y.$

Einige Beispiele werden die Anwendung dieſes Satzes zeigen.

1) $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}} = \frac{1}{a} \underset{y}{d}^{-1}\frac{1}{y+\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{a}\underset{y}{d}^{-1}\frac{1}{y^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc}(\tan = y)$

(nach 268) $=\frac{1}{a} \operatorname{arc}(\tan = e^{ax})$

2) $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(1+e^{ax})^{1/2}} = \frac{1}{a}\underset{y}{d}^{-1}\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{(1+y)^{1/2}}$. Setzen wir $1+y=z^2$, alſo

$y=z^2-1$, $\underset{z}{d}y=2z$

$=\frac{1}{a} \underset{z}{d}^{-1}\frac{1}{z^2-1}\cdot\frac{1}{z}\cdot 2z = \frac{2}{a}\underset{z}{d}^{-1}\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{a} l_e\frac{z-1}{z+1}$

da $\underset{x}{d} l_e \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{z^2-1}$ nach 112 und 94 ist.

$=\frac{1}{a} l_e\frac{(1+e^{ax})^{1/2}-1}{(1+e^{ax})^{1/2}+1}$. Da $z=(1+y)^{1/2}=(1+e^{ax})^{1/2}$ ist.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} x^m e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1} e^{ax}.$ 301.

Beweis. Wenden wir den Satz 212 an, ſo iſt, da $\underset{x}{d}^{-1} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$ iſt,

$\underset{x}{d}^{-1} x^m e^{ax} = x^m \underset{x}{d}^{-1} e^{ax} - \underset{x}{d}^{-1} m x^{m-1} \underset{x}{d}^{-1} e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1} e^{ax}.$

Satz. 302.

$$\underset{x}{d}^{-1} x^m e^{ax} \underset{*}{=} e^{ax}\left[\frac{x^m}{a} - \frac{m}{a^2}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^3}x^{m-2} - \dots + (-1)^m \frac{m!}{a^{m+1}}\right]$$

$$\underset{*}{=} e^{ax}\cdot\left[\mathop{\mathrm{S}}(-1)^{\alpha}\frac{m(m-1)\cdot\cdot(m-\alpha+1)}{a^{\alpha+1}} x^{m-\alpha}\right]$$

*** m ganze Pluszahl.**

Beweis. Unmittelbar aus 300.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x^m}e^{ax} = -\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x^{m-1}}e^{ax}.$ 303.

Beweis. Setzen wir in 301 $-m$ ſtatt $m-1$, alſo $-m+1$ ſtatt m, und bringen das letzte Glied allein auf die linke Seite, ſo folgt unmittelbar der Satz.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{e^{ax}}{x} = l_e x + \mathop{\mathrm{S}}\limits_{1,}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(ax)^{\alpha}}{\alpha!}$ 304.

$$= l_e x + \frac{1}{1}\,\frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(ax)^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\,\frac{(ax)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots.$$

Beweis. Nach 120 ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} e^{ax} = a^{\mathfrak{a}} e^{ax}$ und dies für $x = 0$ gleich $a^{\mathfrak{a}}$, mithin ist nach 101

$$e^{ax} = \mathop{\mathbf{S}} \frac{(ax)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

mithin ist

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1} \frac{e^{ax}}{x} = \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1} \left[\frac{1}{x} + \frac{a}{1} + \frac{a^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \right]$$

$$= l_e x + \frac{1}{1}\cdot\frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\,\frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = l_e x + \mathop{\mathbf{S}}_{1,} \frac{1}{\mathfrak{a}}\cdot\frac{(ax)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}.$$

305. **Satz.**

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1} \frac{1}{x^m}\cdot e^{ax} = -e^{ax}\left[\mathop{\mathbf{S}}_{1,m-1} \frac{a^{\mathfrak{a}-1}}{(m-1)(m-2)\cdots(m-\mathfrak{a})x^{m-\mathfrak{a}}}\right] + \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{e^{ax}}{x}.$$

Beweis. 1. Der Satz gilt für $m = 1$, denn es ist

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{x}\cdot e^{ax} = \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{e^{ax}}{x}.$$

2. Wenn der Satz für m gilt, so gilt er auch für $m+1$, denn es ist nach 303

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{x^{m+1}}\cdot e^{ax} = -\frac{e^{ax}}{((m+1)-1)x^{(m+1)-1}} + \frac{a}{(m+1)-1}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{x^m}e^{ax}$$

und nach Annahme

$$= -e^{ax}\left[\frac{1}{((m+1)-1)x^{(m+1)-1}} + \frac{a}{(m+1)-1}\mathop{\mathbf{S}}_{1,m-1}\frac{a^{\mathfrak{a}-1}}{(m-1)(m-2)\cdots(m-\mathfrak{a})x^{m-\mathfrak{a}}}\right]$$

$$+ \frac{a}{(m+1)-1}\,\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{e^{ax}}{x}$$

$$= -e^{ax}\left[\mathop{\mathbf{S}}_{0,(m-1)}\frac{a^{(\mathfrak{a}+1)-1}}{((m+1)-1)((m+1)-2)\cdots(m+1)-(\mathfrak{a}+1)x^{(m+1)-(\mathfrak{a}+1)}}\right]$$

$$+ \frac{a^{(m+1)-1}}{((m+1)-1)!}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{e^{x}}{x}.$$

Der Satz gilt also auch für $m+1$, wo $\mathfrak{a}$ von 0 bis $m-1$, also $\mathfrak{a}+1$ von 1 bis $(m+1)-1$ genommen wird, d. h. der Satz gilt allgemein.

Wenn andere Folgen von x in Verbindung mit e^{ax} gegeben sind, so kann man die obigen Sätze benutzen, um sie auf die einfachste Form zu bringen und dann die Folge in eine unendliche Reihe entwickeln. Oder man versucht das teilweise Integren

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} e^{ax} f_o x = \frac{1}{a} e^{ax} f_o x - \frac{1}{a} \frac{d}{x}^{-1} e^{ax} \frac{d}{x} f_o x.$ 306.

Beweis. Unmittelbar nach 212.

2. Die Integren von Logfolgen oder Logarithmischen Diffen.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} f_o l_e x \; * \; \frac{d}{y}^{-1} e^y f_o y$ $\quad *$ **wo** $l_e x = y$. 307.

Beweis. Wir ſetzen $l_e x = y$, dann iſt $x = e^y$, $\frac{d}{y} x = e^y$, alſo

$$\frac{d}{x}^{-1} f_o l_e x = \frac{d}{x}^{-1} f_o y = \left(\frac{d}{y}^{-1} f_o y\right) \frac{d}{y} x = \frac{d}{y}^{-1} e^y f_o y.$$

Nach dieſem Satze kann man die Gleichungen integern, welche nur Folgen von $l_e x$ enthalten.

Satz. 308.

$$\frac{d}{x}^{-1} (l_e x)^m \; * \; x[S(-1)^{\mathfrak{a}} m(m-1)\cdots(m-(\mathfrak{a}-1))(l_e x)^{m-\mathfrak{a}}]$$

$*$ **wo m ganze Pluszahl.**

Beweis.

$$\frac{d}{x}^{-1} (l_e x)^m = \frac{d}{y}^{-1} e^y y^m \qquad \text{nach 307, wo } l_e x = y$$

$$= e^y [y^m - m y^{m-1} + m(m-1) y^{m-2} - \cdots + (-1)^m m!]$$

(nach 302)

$$= e^y [S(-1)^{\mathfrak{a}} m(m-1)\cdots(m-(\mathfrak{a}-1)) y^{m-\mathfrak{a}}]$$

$$= x[S(-1)^{\mathfrak{a}} m(m-1)\cdots(m-(\mathfrak{a}-1))(l_e x)^{m-\mathfrak{a}}].$$

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{l_e x} = l_e(l_e x) + \frac{1}{1} \frac{l_e x}{1} + \frac{1}{2} \frac{(l_e x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{(l_e x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ 309.

$$= l_e(l_e x) + \mathop{S}_{1,} \frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{(l_e x)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}.$$

Beweis. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{l_e x} * \frac{d}{y}^{-1} e^y \frac{1}{y}$ $\qquad$ nach 307, wo $l_e x = y$

$$= l_e y + \frac{1}{1} \cdot \frac{y}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

$$= l_e y + \mathop{S}_{1,} \frac{1}{\mathfrak{a}} \cdot \frac{y^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} \qquad \text{(nach 304)}$$

$$= l_e(l_e x) + \frac{1}{1} \cdot \frac{l_e x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(l_e x)^2}{2!} + \cdots$$

$$= l_e(l_e x) + \mathop{S}_{1,} \frac{1}{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(l_e x)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}.$$

310. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(l_e x)^m} = -x\left[\mathop{S}\limits_{1,m-1}\frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-a)(l_e x)^{m-a}}\right] + \frac{1}{(m-1)!}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{l_e x}.$$

Beweis.

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(l_e x)^m} \overset{*}{=} \underset{y}{d}^{-1} e^y \frac{1}{y^m} \qquad \text{nach 307, wo } l_e x = y$$

$$= -e^y\left[\mathop{S}\limits_{1,m-1}\frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-a)y^{m-a}}\right] + \frac{1}{(m-1)!}\underset{y}{d}^{-1}\frac{e^y}{y} \qquad \text{(nach 305)}$$

$$= -x\left[\mathop{S}\limits_{1,m-1}\frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-a)(l_e x)^{m-a}}\right] + \frac{1}{(m-1)!}\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{l_e x}.$$

311. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} x^\mu f_0(l_e x) \overset{*}{=} \underset{y}{d}^{-1} e^{(\mu+1)y} f_0 y$ * wo $l_e x = y$.

Beweis. Wir ſetzen $l_e x = y$, alſo $x = e^y$, $\underset{y}{d}x = e^y$, dann ist nach 211

$$\underset{x}{d}^{-1} x^\mu f_0(l_e x) = \underset{y}{d}^{-1} e^{\mu y}(f_0 y)e^y = \underset{y}{d}^{-1} e^{(\mu+1)y} f_0 y.$$

312. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x}(l_e x)^m \overset{*}{=} \frac{(l_e x)^{m+1}}{m+1}$ * wo $m \gtrless -1$.

Beweis. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x}(l_e x)^m = \underset{y}{d}^{-1} y^m = \frac{y^{m+1}}{m+1} = \frac{(l_e x)^{m+1}}{m+1}.$

313. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x \cdot l_e x} = l_e(l_e x).$

Beweis. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x \cdot l_e x} = \underset{y}{d}^{-1}\frac{1}{y} = l_e y = l_e(l_e x).$

314. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1} x^\mu (l_e x)^m = x^{\mu+1}\left[\frac{(l_e x)^m}{\mu+1} - \frac{m(l_e x)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)(l_e x)^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \cdots + (-1)^m\frac{m!}{(\mu+1)^{m+1}}\right]$$

$$= x^{\mu+1}\left[\mathop{S}\limits_{0,m}\frac{m(m-1)\cdots(m-(a-1))(l_e x)^{m-a}}{(\mu+1)^{a+1}}\right].$$

Beweis. $\mathfrak{d}_x^{-1} x^{\mu}(l_e x)^m$

$$= \mathfrak{d}_y^{-1} e^{(\mu+1)y} y^m \qquad \text{und nach 295}$$

$$= e^{(\mu+1)y}\left[\frac{y^m}{\mu+1} - \frac{m y^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)y^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \dots + \frac{(-1)^m\cdot m!}{(\mu+1)^{m+1}}\right]$$

$$= x^{\mu+1}\left[\frac{(l_e x)^m}{\mu+1} - \frac{m(l_e x)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)(l_e x)^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \dots + \frac{(-1)^m\cdot m!}{(\mu+1)^{m+1}}\right]$$

In allen Fällen, wo nicht reine Folgen von $l_e x$ gegeben ſind, muss die gegebene Folge in eine Reihe entwickelt und dann integert werden, ſo ſelbst schon bei der einfachen Folge $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x} l_e(1+x)$ muss $l_e(1+x)$ in eine Reihe entwickelt werden, um integert zu werden.

3. Die Integren von Winkelfolgen oder von goniometrischen Funktionen.

Wir betrachten hier zuerst die Gleichungen, in denen nur Winkelfolgen einer Veränderlichen vorkommen. Um dieſe leicht behandeln zu können, führt man die verschiedenen Winkelfolgen auf eine einzige Winkelfolge zurück und zwar entweder auf sin x, oder auf cos x, oder auf tan x, oder auf tan ½x.

a. Zurückführung aller Winkelfolgen auf sin x.

Bekanntlich ist $\cos x = (1 - (\sin x)^2)^{1/2}$, $\tan x = \frac{\sin x}{(1 - (\sin x)^2)^{1/2}}$; führt man in dieſer Weiſe alle Folgen auf sin x zurück, ſo hat man nur noch $\mathfrak{d}_x^{-1} f_0 \sin x$ zu behandeln, wobei stets vorausgeſetzt werden ſoll, dass x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ enthalten, alſo echt ſei.

Satz. $\mathfrak{d}_x^{-1} f_0 \sin x = \mathfrak{d}_y^{-1} \frac{f_0 y}{(1-y^2)^{1/2}}$ **wo $\sin x = y$.** 315.

Beweis. Nach 211 ist

$$\mathfrak{d}_x^{-1} f_0 \sin x = \mathfrak{d}_x^{-1} f_0 y = \left(\mathfrak{d}_y^{-1} f_0 y\right)\mathfrak{d}_y x$$

$$= \mathfrak{d}_y^{-1} \frac{f_0 y}{(1-y^2)^{1/2}}; \quad \text{da } x = \text{arc}(\sin = y), \text{ alſo}$$

$$\mathfrak{d}_y x = \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}} \qquad \text{(nach 129).}$$

Satz. $\mathfrak{d}_x^{-1} \sec x = l_e \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)$. 316.

Beweis.

$$\frac{d}{x}^{-1}\sec x = \frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{(1-(\sin x)^2)^{1/2}} = \frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{(1-y^2)^{1/2}} = \frac{d}{y}^{-1}\frac{1}{1-y^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} l_e \frac{1+y}{1-y} = \tfrac{1}{2} l_e \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = l_e \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x),$$

da $\frac{d}{x} l_e \frac{1+y}{1-y} = \frac{2}{1-y^2}$ nach 112 und 94 und

da $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = (\tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x))^2$ nach Zahlenlehre 485 ist.

317. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}\operatorname{cosec} x = l_e \tan \tfrac{1}{2} x$.

Beweis.

$$\frac{d}{x}^{-1}\operatorname{cosec} x = \frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{\sin x} = \frac{d}{x}^{-1}\frac{1}{y} = \frac{d}{y}^{-1}\frac{1}{y(1-y^2)^{1/2}} = -l_e\frac{1+(1-y^2)^{1/2}}{y}$$

$$= -l_e\frac{1+\cos x}{\sin x} = l_e\frac{\sin x}{1+\cos x} = l_e \tan \tfrac{1}{2} x$$

(nach Zahlenlehre 472).

318. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^q$

(1) $= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q-2}$

(2) $= -\frac{(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q+2}$

(3) $= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q+1}}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q}$

(4) $= -\frac{(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q+1}}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q}$

(5) $= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p}(\cos x)^{q-2}$

(6) $= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p}(\cos x)^{q+2}$.

Beweis. Wir ſetzen $\sin x = y$, dann iſt $\cos x = (1-y^2)^{1/2}$, $x = \operatorname{arc}(\sin = y)$ $\frac{d}{y}x = \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}}$, alſo $\frac{d}{x}y = (1-y^2)^{1/2}$

$$\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p\cdot(\cos x)^q = \frac{d}{y}^{-1} y^p(1-y^2)^{\frac{1}{2}q}\frac{d}{y}x = \frac{d}{y}^{-1} y^p(1-y^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}.$$

Setzen wir alſo $m-1=p$ oder $m=p+1$, $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $s=q-1$, ſo folgt nach Satz 296

$$\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p(\cos x)$$

$$= \frac{y^{p+1}(1-y^2)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\frac{d}{y}^{-1} y^{p+2}(1-y^2)^{q-3}$$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q-3}\frac{d}{x}y$$

$$= (\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1} + \frac{q-1}{p+1}\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q-2},$$

alſo gilt die Formel (1) des Satzes.

Ebenſo folgt die Formel (2) nach 295, die Formel (3) nach Satz 296, die Formel (4) nach Satz 297, die Formel (5) nach Satz 298 und die Formel (6) nach Satz 299.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^q$ (1) 319.

$$* = -\frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q}\left[(\sin x)^{p-1} + \sum_{0,\frac{1}{2}(p-1)} \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+q-2a)}\right]$$

* **wo p ungerade.**

$$* = -\frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q}\left[(\sin x)^{p-1} + \sum_{0,\frac{1}{2}p-1} \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+q-2a)}\right. \quad (2)$$

$$\left. + \frac{(p-1)(p-3)\cdots 3\cdot 1\,\frac{d}{x}^{-1}(\cos x)^q}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(q+2)}\right]$$

* **wo p gerade.**

Beweis. Unmittelbar, wenn man 318 (4) wiederholt anwendet.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^q$ (1) 320.

$$* = \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q}\left[(\cos x)^{q-1} + \sum_{0,\frac{1}{2}(q-1)} \frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+q-2a)}\right]$$

* **wo q ungerade.**

$$* = \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q}\left[(\cos x)^{q-1} + \sum_{0,\frac{1}{2}q-1} \frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+q-2a)}\right. \quad (2)$$

$$\left. + \frac{(q-1)(q-3)\cdots 3\cdot 1\,\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+2)}\right]$$

* **wo q gerade.**

Beweis. Unmittelbar, wenn man 318 (5) wiederholt anwendet.

Ebenſo ergeben ſich die Formeln für $\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p(\sec x)^q$ aus 318 (6) und für $\frac{d}{x}^{-1}(\operatorname{cosec} x)^p(\cos x)^q$ aus 318 (3).

321. (1) **Satz.** $\overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\sin x)^p$

$$\overset{*}{=} -\frac{\cos x}{p}\left[(\sin x)^{p-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(p-1)}{S} \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p-2)(p-4)\cdots(p-2a)}\right]$$

* **wo p ungerade.**

$$(2) \overset{*}{=} -\frac{\cos x}{p}\left[(\sin x)^{p-1} + \underset{0,\frac{1}{2}p-1}{S} \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p-2)(p-4)\cdots(p-2a)} + \frac{(p-1)(p-3)\cdots 3\cdot 1\cdot x}{(p-2)(p-4)\cdots 4\cdot 2\cdot}\right]$$

* **wo p gerade.**

Beweis. Unmittelbar aus 319, wenn man $q = 0$ setzt, denn dann ist $(\cos x)^q = (\cos x)^0 = 1$ und $(\cos x)^{q+1} = (\cos x)^1 = \cos x$, und im letzten Gliede für gerades p $\overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\cos x)^q = \overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\cos x)^0 = \overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}1 = x$.

322. (1) **Satz.** $\overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\cos x)^q$

$$\overset{*}{=} \frac{\sin x}{q}\left[(\cos x)^{q-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(q-1)}{S} \frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(q-2)(q-4)\cdots(q-2a)}\right]$$

* **wo q ungerade.**

$$(2) \overset{*}{=} \frac{\sin x}{q}\left[(\cos x)^{q-1} + \underset{0,\frac{1}{2}q-1}{S} \frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(q-2)(q-4)\cdots(q-2a)} + \frac{(q-1)(q-3)\cdots 3\cdot 1\cdot x}{(q-2)(q-4)\cdots 4\cdot 2\cdot}\right]$$

* **wo q gerade.**

Beweis. Unmittelbar aus 320, wenn man $p = 0$ setzt, denn dann ist $(\sin x)^p = (\sin x)^0 = 1$, $(\sin x)^{p+1} = (\sin x)^1 = \sin x$ und im letzten Gliede für gerades q $\overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\sin x)^p = \overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\sin x)^0 = \overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}1 = x$.

323. (1) **Satz.** $\overset{\mathrm{d}}{\underset{\mathrm{x}}{}}{}^{-1}(\sin x)^p$

$$\overset{*}{=} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}}{2^{p-1}}\left[\frac{\cos px}{p} - p\cdot\frac{\cos(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\,\frac{\cos(p-4)x}{p-4} - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}\cdot p^{\cdot\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\cos x}{1}\right]$$

* **wo p ungerade.**

$$(2) \overset{*}{=} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}p}}{2^{p-1}}\left[\frac{\sin px}{p} - p\cdot\frac{\sin(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\,\frac{\sin(p-4x)}{p-4} - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}p-1}p^{\cdot\frac{1}{2}p-1}\frac{\sin 2x}{2} + (-1)^{\frac{1}{2}p}p^{\cdot\frac{1}{2}p}\frac{x}{2}\right]$$

* **wo p gerade,**

oder

$$\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p \overset{*}{=} \frac{(-1)^{1/2(p+1)}}{2^{p-1}}\left[\underset{0,1/2(p-1)}{S}(-1)^a p^{\cdot a}\frac{\cos(p-2a)x}{p-2a}\right] \qquad (1)$$

* wo p ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{(-1)^{1/2p}}{2^{p-1}}\left[\underset{0,1/2p-1}{S}(-1)^a p^{\cdot a}\frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} + (-1)^{1/2p}p^{\cdot 1/2p}\cdot\frac{x}{2}\right] \qquad (2)$$

* wo p gerade.

Beweis. Nach Zahlenlehre 514 ist unmittelbar für ungerades p

$$\frac{d}{x}^{-1}(\sin x)^p = \frac{(-1)^{1/2(p-1)}}{2^{p-1}}\frac{d}{x}^{-1}\left[\sin px - p\cdot\sin(p-2)x + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\sin(p-4)x - \cdots + (-1)^{1/2(p-1)}p^{\cdot 1/2(p-1)}\cdot\sin x\right]$$

$$= \frac{(-1)^{1/2(p+1)}}{2^{p-1}}\left[\frac{\cos px}{p} - p\cdot\frac{\cos(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\frac{\cos(p-4)x}{p-4} - \cdots + (-1)^{1/2(p-1)}p^{\cdot 1/2(p-1)}\cos x\right]$$

und ebenso der Satz für gerades p.

Satz. 324.

$$\frac{d}{x}^{-1}(\cos x)^p \overset{*}{=} \frac{1}{2^{p-1}}\left[\frac{\sin px}{p} + p\frac{\sin(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\frac{\sin(p-4)x}{p-4} + \cdots + p^{\cdot 1/2(p-1)}\cdot\sin x\right]$$

* wo p ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2^{p-1}}\left[\frac{\sin px}{p} + p\frac{\sin(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\frac{\sin(p-4)x}{p-4} + \cdots + p^{\cdot 1/2p-1}\frac{\sin 2x}{2} + p^{\cdot 1/2p}\frac{x}{2}\right]$$

* wo p gerade,

oder

$$\frac{d}{x}^{-1}(\cos x)^p \overset{*}{=} \frac{1}{2^{p-1}}\left[\underset{0,1/2(p-1)}{S} p^{\cdot a}\cdot\frac{\sin(p-2a)x}{p-2a}\right]$$

* wo p ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2^{p-1}}\left[\underset{0,1/2p-1}{S} p^{\cdot a}\cdot\frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} + p^{\cdot 1/2p}\frac{x}{2}\right]$$

* wo p gerade.

Beweis. Aus Zahlenlehre 513 ganz wie der Beweis zu 323.

Satz. 325.

$$\frac{d}{x}^{-1}(\tan x)^p \overset{*}{=} \underset{0,1/2(p-3)}{S}(-1)^a\frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{1/2(p+1)} l_e \cos x \qquad (1)$$

* wo p ungerade.

$$\overset{*}{=} \underset{0,1/2p-1}{S}(-1)^a\frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{1/2p}x \quad \text{* wo p gerade.} \qquad (2)$$

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus 318 (2), wenn man $-q$ statt q fetzt, da $(\sin x)^{p-1-2a} \cdot (\cos x)^{-p+1+2a} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{p-1-2a}$ $= (\tan x)^{p-1-2a}$ ist. Bei ungeradem p wird dann das letzte Glied $= (-1)^{1/2 p} \underset{x}{d}^{-1} \frac{\sin x}{\cos x} = (-1)^{1/2 p+1} l_e \cos x$. Bei geradem p wird das letzte Glied $= (-1)^{1/2 p} \underset{x}{d}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^0 = (-1)^{1/2 p} \underset{x}{d}^{-1} 1 = (-1)^{1/2 p} \cdot x$.

b. Zurückführung aller Winkelfolgen auf cos x.

Da $\sin x = (1 - (\cos x)^2)^{1/2}$ und $\tan x = \frac{(1 - (\cos x)^2)^{1/2}}{\cos x}$ ist, fo ist die Zurückführung aller Winkelfolgen auf cos x leicht, und hat man nur noch $\underset{x}{d}^{-1} f_0 \cos x$ zu behandeln, wobei stets vorausgefetzt werden foll, dass x zwischen $-\pi$ und π und alfo echt ist.

326. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} f_0 \cos x = -\underset{y}{d}^{-1} \frac{f_0 y}{(1 - y^2)^{1/2}}$ **wo** $\cos x = y$.

Beweis. Nach 211 ist

$$\underset{x}{d}^{-1} f_0 \cos x = \underset{x}{d}^{-1} f_0 y = \left(\underset{y}{d}^{-1} f_0 y\right) \underset{y}{d} x = -\underset{y}{d}^{-1} \frac{f_0 y}{(1 - y^2)^{1/2}},$$

da $x = \mathrm{arc}(\cos = y)$, alfo $\underset{y}{d} x = -\frac{1}{(1 - y^2)^{1/2}}$ (nach 129).

Die Zurückführung ist daher von der auf sin x fo wenig verschieden, dass eine weitere Behandlung derfelben nicht erforderlich erscheint.

c. Die Zurückführung aller Winkelfolgen auf tan x.

Bekanntlich ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, alfo $(\tan x)^2 = \frac{1 - (\cos x)^2}{(\cos x)^2}$; mithin $(\cos x)^2 (1 + (\tan x)^2) = 1$ oder $\cos x^2 = \frac{1}{1 + (\tan x)^2}$ und $(\sin x)^2 = (\tan x)^2 \cdot (\cos x)^2 = \frac{(\tan x)}{1 + (\tan x)^2}$. Alfo wenn wir $\tan x = y$ fetzen $(\cos x)^2 = \frac{1}{1 + y^2}$, $(\sin x)^2 = \frac{y^2}{1 + y^2}$, $x = \mathrm{arc}(\tan = y)$, mithin $\underset{y}{d} x = \frac{1}{1 + y^2}$ (nach 130).

Man kann alfo Alles auf die Form $\underset{x}{d} f_0 \tan x$ zurückführen.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} f_0 \tan x = \underset{y}{d}^{-1} \frac{f_0 \cdot y}{1+y^2}$ wo $\tan x = y$. 327.

Beweis. Nach 211 ist

$$\underset{x}{d}^{-1} f_0 \tan x = \underset{x}{d}^{-1} f_0 y = \left(\underset{y}{d}^{-1} f_0 y\right) \underset{y}{d} x = \underset{y}{d}^{-1} \frac{f_0 y}{1+y^2}.$$

Diefe Zurückführung hat den Vorteil, dass wenn $f_0 \tan x$ keine Tiefen enthält, auch $\underset{x}{d}^{-1} f_0 \tan x$ keine Tiefen enthält. Wir entwickeln hiernach die folgenden leichten Sätze.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b}{a} \tan x\right)$. 328.

Beweis. $\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{(a^2+b^2(\tan x)^2)(\cos x)^2}$

Setzen wir nun $\tan x = y$, fo haben wir nach 327 und den Vorbemerkungen

$$\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \underset{y}{d}^{-1} \frac{1+y^2}{a^2+b^2y^2} \underset{y}{d} x = \underset{y}{d}^{-1} \frac{1}{a^2+b^2y^2}$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b}{a} y\right) \quad \text{(nach 247)}$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \tan = \left(\frac{b}{a} \tan x\right).$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} \frac{(\cos x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(\cos x)\sin x}{2a^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]}$ 329.

$+ \frac{1}{2a^3b} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b \tan x}{a}\right)$.

Beweis. Nach 327 und den Vorbemerkungen und nach demfelben Verfahren wie in Satz 328.

Satz. 330.

$$\underset{x}{d}^{-1} \frac{(\sin x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = -\frac{(\cos x)\sin x}{2b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]}$$

$$+ \frac{1}{2ab^3} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b \cdot \tan x}{a}\right).$$

Beweis. Ganz entsprechend wie zu Satz 329.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(b^2 - a^2)(\cos x)\sin x}{2a^2b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]}$ 331.

$+ \frac{b^2 + a^2}{2a^3b^3} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b \cdot \tan x}{a}\right)$.

Beweis. Unmittelbar durch Addition oder Zufügung von 329 und 330.

d. Die Zurückführung der Winkelfolgen auf $\tan \tfrac{1}{2}x$.

Setzen wir $\tan {}^1\!/_2 x = t$, ſo haben wir nach Zahlenlehre 471

$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$ und nach der Einleitung zu c vor N. 327

$$(\sin x)^2 = \frac{(\tan x)^2}{1 + (\tan x)^2} = \frac{(2t)^2}{(1 + t^2)^2},\ \text{alſo}\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}\ \text{und}$$

$$\cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\quad {}^1\!/_2 x = \operatorname{arc}(\tan = t),\quad \underset{t}{d} x = \frac{2}{1 + t^2}.$$

332. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} F_0 \tan {}^1\!/_2 x \overset{*}{=} \underset{t}{d}^{-1} (F_0 t) \cdot \frac{2}{1 + t^2}$ * wo $\tan {}^1\!/_2 x = t$.

Beweis. Da $\tan {}^1\!/_2 x = t$ ist, ſo ist ${}^1\!/_2 x = \operatorname{arc}(\tan = t)$, mithin nach 130 $\underset{t}{d} x = \frac{2}{1 + t^2}$, alſo ist, wenn wir $t = \tan {}^1\!/_2 x$ einführen

$$\underset{x}{d}^{-1} F_0 \tan {}^1\!/_2 x = \underset{x}{d}^{-1} F_0 t = \underset{t}{d}^{-1}\left(F_0 t \underset{t}{d} x\right) = \underset{t}{d}^{-1} F_0 t \frac{2}{1 + t^2}.$$

333. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c}$

$$\overset{*}{=} \frac{2}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}}\right)$$

* wo $a^2 + b^2 < c^2$

$$\overset{*}{=} - \frac{2}{b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x} \quad \text{* wo } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\overset{*}{=} - \frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \operatorname{le}\left[\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} + b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} - (b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x)}\right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ und $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} > b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x$

$$\overset{*}{=} - \frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \operatorname{le}\left[\frac{b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x + (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}{b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x - (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}\right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ und $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} < b + (c - a)\tan {}^1\!/_2 x$.

Beweis. Wenn wir $\tan {}^1\!/_2 x = t$ ſetzen, ſo ist nach den Vorbemerkungen vor 332

$$\underset{x}{d}^{-1} \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c} = \underset{t}{d}^{-1} \frac{2}{c + a + 2bt + (c - a)t^2},$$

alſo nach 273, wenn wir hier ${}^1\!/_2(c + a)$ für a und ${}^1\!/_2(c - a)$ für c ſetzen

$$\overset{*}{=} \frac{2}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b + (c - a)t}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}}\right) \quad \text{* wo } a^2 + b^2 < c^2$$

$$\overset{*}{=} - \frac{2}{b + (c - a)t} \quad \text{* wo } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{(a^2+b^2-c^2)^{1/2}}\,l_e\left[\frac{(a^2+b^2-c^2)^{1/2}+b+(c-a)t}{(a^2+b^2-c^2)^{1/2}-(b+(c-a)t)}\right]$$

* wo $a^2+b^2>c^2$ und $(a^2+b^2-c^2)^{1/2}>b+(c-a)t$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{(a^2+b^2-c^2)^{1/2}}\,l_e\left[\frac{b+(c-a)t+(a^2+b^2-c^2)^{1/2}}{b+(c-a)t-(a^2+b^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

* wo $a^2+b^2>c^2$ und $(a^2+b^2-c^2)^{1/2}<b+(c-a)t$

und wenn wir hier $\tan {}^1/_2\, x = t$ ſetzen, die Formeln des Satzes.

Wenn $a=c$ ist, ſo kann man die Formeln 333 nicht anwenden, dann gilt der folgende Satz.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{a\cos x+b\sin x+c} \overset{*}{=} \underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{a(1+\cos x)+b\sin x}$ 334.

$$=\frac{1}{b}l_e(a+b\tan {}^1/_2 x) \qquad * \text{ wo } a=c.$$

Beweis. Da $a=c$, ſo haben wir die zweite Formel und dieſe wird nach Zahlenlehre 472

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{a(1+\cos x)+b\sin x}=\underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{(a+b\tan {}^1/_2 x)(1+\cos x)}$$

$$=\underset{t}{d}\frac{1}{(a+bt)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\underset{t}{d}_x=\underset{t}{d}\frac{1+t^2}{(a+bt)\cdot 2}\underset{t}{d}_x=\underset{t}{d}\frac{1}{a+bt}$$

$$=\frac{1}{b}l_e(a+bt)=\frac{1}{b}(a+b\tan {}^1/_2 x).$$

Wir betrachten nun demnächst die Gleichungen, in denen auser den Winkelfolgen der Veränderlichen auch andere Folgen der Veränderlichen vorkommen und zwar zunächst Höhen der Veränderlichen und demnächst auch Stufenfolgen der Veränderlichen.

e. Gleichungen mit x^n und $\sin x$ bez. $\cos x$.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1} x^n \sin ax =$ 335.

$$-\frac{x^n\cdot\cos ax}{a}+\frac{nx^{n-1}\sin ax}{a^2}-\frac{n(n-1)}{a^2}\underset{x}{d}^{-1}x^{n-2}\sin ax.$$

Beweis. Nach Satz 212 und nach 201 ist

$$\underset{x}{d}^{-1}x^n\sin ax=-\frac{x^n\cos ax}{a}+\frac{n}{a}\underset{x}{d}^{-1}x^{n-1}\cos ax$$

$$=-\frac{x^n\cos ax}{a}+\frac{n}{a}\cdot\frac{x^{n-1}\sin ax}{a}-\frac{n(n-1)}{a^2}\underset{x}{d}^{-1}x^{n-2}\sin ax.$$

336. **Satz.** $\mathfrak{d}_x^{-1} x^n \sin ax$

$$= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a^2}\cdot x^{n-1}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^3}x^{n-2}\cos ax$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{a^4}x^{n-3}\sin ax$$

$$= -\frac{x^n}{a}\cos ax + \mathfrak{S}\frac{n(n-1)\cdots(n-2\alpha)}{a^{2\alpha+2}}x^{n-1-2\alpha}\sin ax$$

$$- \mathfrak{S}\frac{n(n-1)\cdots(n-2\alpha-1)}{a^{2\alpha+3}}x^{n-2-2\alpha}\cos ax.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 335.

337. **Satz.** $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x^n} = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a\cos ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$

$$- \frac{a^2}{(n-1)(n-2)}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x^{n-2}}.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 335, wenn man $-n+2$ für n setzt und das letzte Glied allein auf die linke Seite stellt.

338. **Satz.** $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x^n}$

$$\overset{*}{=} \mathfrak{S}_{0,\frac{1}{2}n-2} (-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$

$$+ \mathfrak{S}_{0,\frac{1}{2}n-2} (-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha+1}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\cdots4\cdot3\cdot2\cdot1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x}$$

* wo n gerade

$$\overset{*}{=} \mathfrak{S}_{0,\frac{1}{2}(n-3)} (-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$

$$+ \mathfrak{S}_{0,\frac{1}{2}(n-5)} (-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha+1}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x}$$

* wo n ungerade.

Beweis. Unmittelbar aus 337.

339. **Satz.** $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x} = \frac{1}{1}\cdot\frac{ax}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^3x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{a^5x^5}{1\cdot2\cdots5} - \cdots$

$$= \mathfrak{S}\frac{(-1)^\alpha}{2\alpha+1}\cdot\frac{a^{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)!}.$$

Beweis. Nach 73 ist $\sin ax = \mathfrak{S}(-1)^a \frac{a^{2a+1}x^{2a+1}}{(2a+1)!}$, mithin ist

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{\sin ax}{x} = \mathfrak{S}(-1)^a \frac{a^{2a+1}}{(2a+1)!}\underset{x}{d}^{-1}x^{2a} = \mathfrak{S}\frac{(-1)^a}{2a+1}\,\frac{a^{2a+1}x^{2a+1}}{(2a+1)!}.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{\cos ax}{x} = l_e x - {}^1/_2\frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + {}^1/_4\frac{a^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$ 340.

$$= l_e x + \mathfrak{S}_{1,}(-1)^a\frac{1}{2a}\cdot\frac{a^{2a}x^{2a}}{(2a)!}.$$

Beweis. Nach 73 ist $\cos ax = 1 + \mathfrak{S}_{1,}(-1)^a\frac{a^{2a}x^{2a}}{(2a)!}$, mithin ist

$$\underset{x}{d}^{-1}\frac{\cos ax}{x} = \underset{x}{d}^{-1}\frac{1}{x} + \mathfrak{S}_{1,}(-1)^a\frac{a^{2a}}{(2a)!}\underset{x}{d}^{-1}x^{2a-1}$$

$$= l_e x + \mathfrak{S}_{1,}(-1)^a\frac{1}{2a}\cdot\frac{a^{2a}x^{2a}}{(2a)!}.$$

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}x^n\cos ax$ 341.

$$= \frac{x^n\sin ax}{a} + \frac{nx^{n-1}\cos ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2}\underset{x}{d}^{-1}x^{n-2}\cos ax.$$

Beweis. Ganz wie 335.

Satz. 342.

$$\underset{x}{d}^{-1}x^n\cos ax = \frac{x^n}{a}\sin ax + \mathfrak{S}(-1)^a\frac{n(n-1)\cdots(n-2a)x^{n-1-2a}\cos ax}{a^{2a+2}}$$

$$+ \mathfrak{S}\frac{(-1)^a n(n-1)\cdots(n-2a-1)x^{n-2-2a}\sin ax}{a^{2a+3}}.$$

Beweis. Unmittelbar aus 336.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{\cos ax}{x^n} = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a\sin ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$ 343.

$$-\frac{a^2}{(n-1)(n-2)}\underset{x}{d}^{-1}\frac{\cos ax}{x^{n-2}}.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 342, wenn man $-n+2$ für n fetzt und das letzte Glied allein auf die linke Seite fetzt.

Satz. $\underset{x}{d}^{-1}\frac{\cos ax}{x^n}$ 344.

$$= \mathfrak{S}_{0,1,\,{}^1/_2 n-2}(-1)^{a+1}\frac{a^{2a}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2a)x^{n-1-2a}}$$

$$+ \mathop{\mathbf{S}}\limits_{0,\frac{1}{2}n-2} (-1)^{\alpha} \frac{a^{2\alpha+1}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} \mathfrak{d}_x^{-1} \frac{\cos ax}{x} \quad * \text{ wo n gerade.}$$

$$\stackrel{*}{=} \mathop{\mathbf{S}}\limits_{0,\frac{1}{2}(n-3)} (-1)^{\alpha+1} \frac{a^{2\alpha}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$

$$+ \mathop{\mathbf{S}}\limits_{0,\frac{1}{2}(n-5)} \frac{(-1)^{\alpha}a^{2\alpha+1}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \mathfrak{d}_x^{-1} \frac{\sin ax}{x}$$

*** wo n ungerade.**

Beweis. Unmittelbar aus 343.

345. (1) **Satz.** $\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cdot\cos bx)}{a^2+b^2}$

(2) $\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cos bx = \dfrac{e^{ax}(a\cdot\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$.

Beweis. Nach Satz 212 ist

$\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx = -\dfrac{e^{ax}\cos bx}{b} + \dfrac{a}{b}\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cdot\cos bx$ und ist

$\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cos bx = \dfrac{e^{ax}\sin bx}{b} - \dfrac{a}{b}\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cdot\sin bx$, alſo ist, wenn wir die Glieder mit $\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx$ allein auf die linke Seite ſchaffen,

$\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx \cdot \dfrac{a^2+b^2}{b^2} = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{b^2}$,

d. h. $\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx = e^{ax}\dfrac{(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$, und ebenſo, wenn wir die Glieder mit $\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cos bx$ allein auf die linke Seite ſchaffen,

$\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cos bx = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$.

346. **Satz.** $\mathfrak{d}_x^{-1} x^n e^{ax}\sin bx = \dfrac{1}{a^2+b^2}\Big[x^n e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)$

$- na\mathfrak{d}_x^{-1} x^{n-1}e^{ax}\sin bx + nb\mathfrak{d}_x^{-1} x^{n-1}e^{ax}\cos bx\Big]$.

Beweis. Nach 212 ist, wenn man Satz 345 anwendet

$\mathfrak{d}_x^{-1} x^n(e^{ax}\sin bx) = x^n\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx - \mathfrak{d}_x^{-1}\left(\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx\right)\mathfrak{d}_x x^n$

$$= x^n \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{d}{x}^{-1} \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)nx^{n-1}}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\Big[x^n e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) - na\frac{d}{x}^{-1} x^{n-1}e^{ax}\sin bx$$

$$+ nb\frac{d}{x}^{-1} x^{n-1}e^{ax}\cos bx\Big].$$

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} x^n e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[x^n e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)$ 347.

$- na\frac{d}{x}^{-1} x^{n-1}e^{ax}\cos bx - nb\frac{d}{x} x^{n-1}e^{ax}\sin bx\Big].$

Beweis. Ebenso wie der Beweis zu 346.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} xe^{ax}\sin bx$ 348.

$$= \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a(a^2+b^2)x - (a^2-b^2))\sin bx - (b(a^2+b^2)x - 2ab)\cos bx]$$

und $\frac{d}{x}^{-1} xe^{ax}\cos bx$

$$= \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a(a^2+b^2)x - (a^2-b^2))\cos bx + (b(a^2+b^2)x - 2ab)\sin bx].$$

Beweis. Unmittelbar aus 346 und 345, bez. 347 und 345.

4. Die Integren von Bogenfolgen oder von kyklometrischen Funktionen.

Die Bogenfolgen lassen sich leicht auf Winkelfolgen zurückführen. Denn es ist unmittelbar, wenn $\text{arc}(\sin = x) = y$ ist $x = \sin y$, $\frac{d}{y}x = \cos y$, also $\frac{d}{x}^{-1} f_o \text{arc}(\sin = x) = \frac{d}{y}^{-1}(f_o y)\cos y$ und ebenso einfach bei den andern Bogenfolgen.

Satz. 349.

$\frac{d}{x}^{-1} f_o \cdot \text{arc}(\sin = x) \overset{*}{=} \frac{d}{y}^{-1}(f_o y)\cos y$ * wo $\text{arc}(\sin = x) = y$.

Satz. 350.

$\frac{d}{x}^{-1} f_o \text{arc}(\cos = x) \overset{*}{=} -\frac{d}{y}^{-1}(f_o y)\sin y$ * wo $\text{arc}(\cos = x) = y$.

Satz. 351.

$\frac{d}{x}^{-1} f_o \text{arc}(\tan = x) \overset{*}{=} \frac{d}{y}^{-1}(f_o y)(\sec y)^2$ * wo $\text{arc}(\tan = x) = y$.

Satz. 352.

$\frac{d}{x}^{-1} f_o \text{arc}(\cot = x) \overset{*}{=} -\frac{d}{y}^{-1}(f_o y)(\text{cosec}\, y)^2$ * wo $\text{arc}(\cot = x) = y$.

Hiernach lassen sich leicht integern die Gleichungen

$\frac{d}{x}^{-1} e^{a\,\text{arc}(\sin = x)} \overset{*}{=} \frac{d}{y}^{-1} e^{ay}\cos y$ * wo $\text{arc}(\sin = x) = y$

$\underset{x}{d}^{-1}(\operatorname{arc}(\sin = x))^m \overset{*}{=} \underset{y}{d}^{-1} y^m \cos y$ $\quad$ * wo $\operatorname{arc}(\sin = x) = y$

$\underset{x}{d}^{-1} e^{a \cdot \operatorname{arc}(\cos = x)} \overset{*}{=} -\underset{y}{d}^{-1} e^{ay} \sin y$ $\quad$ * wo $\operatorname{arc}(\cos = x) = y$

$\underset{x}{d}^{-1}(\operatorname{arc}(\cos = x))^m \overset{*}{=} -\underset{y}{d}^{-1} y^m \sin y$ $\quad$ * wo $\operatorname{arc}(\cos = x) = y$.

353. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\operatorname{arc}(\sin = x) \overset{*}{=} \operatorname{arc}(\sin = x)\underset{x}{d}^{-1} f_0 x - \underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}.$$

Beweis. Nach 212 ist

$$\underset{x}{d}^{-1}(\operatorname{arc}(\sin = x))(f_0 x) = \operatorname{arc}(\sin = x)\underset{x}{d}^{-1} f_0 x - \underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\underset{x}{d}\operatorname{arc}(\sin = x)$$

$$= \operatorname{arc}(\sin = x)\underset{x}{d}^{-1} f_0 x - \underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$$

(nach 129).

Ganz ebenso ergeben sich die folgenden Sätze.

354. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\operatorname{arc}(\cos = x) = \operatorname{arc}(\cos = x)\underset{x}{d}^{-1} f_0 x + \underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}.$$

355. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\operatorname{arc}(\tan = x) = \operatorname{arc}(\tan = x)\underset{x}{d}^{-1} f_0 x - \underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\frac{1}{1 + x^2}.$$

356. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\operatorname{arc}(\cot = x) = \operatorname{arc}(\cot = x)\underset{x}{d}^{-1} f_0 x + \underset{x}{d}^{-1}(f_0 x)\frac{1}{1 + x^2}.$$

Hieraus ergeben sich z. B. unmittelbar, wenn man $f_0 x = 1$, bez. $f_0 x = x^{m-1}$ setzt, die folgenden Sätze:

357. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} \operatorname{arc}(\sin = x) = x \cdot \operatorname{arc}(\sin = x) + (1 - x^2)^{1/2}$.

358. **Satz.** $\underset{x}{d}^{-1} \operatorname{arc}(\tan = x) = x \cdot \operatorname{arc}(\tan = x) - \frac{1}{2} l_e(1 + x^2)$.

359. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}\operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{x^m}{m}\operatorname{arc}(\sin = x) - \frac{1}{m}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^m}{(1 - x^2)^{1/2}}.$$

360. **Satz.**

$$\underset{x}{d}^{-1} x^{m-1}\operatorname{arc}(\tan = x) = \frac{x^m}{m}\operatorname{arc}(\tan = x) - \frac{1}{m}\underset{x}{d}^{-1}\frac{x^m}{1 + x^2}.$$

Dritter Abschnitt der Folgelehre: Die dehnende Folgelehre oder die Lehre von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen.

12. Die allgemeinen Sätze über die Folgen mehrer Veränderlichen.

Für die Lehre von den Folgen oder Funktionen zweier und mehrer Veränderlichen musste ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden, wenn man zu brauchbaren Ergebnissen gelangen wollte. Die geehrten Lefer werden gebeten, diefen neuen Weg zu betreten und zu prüfen; fie werden dann fehen, dass die Lehre von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen ebenfo reiche Ergebnisse liefert, wie die Lehre von den Folgen einer Veränderlichen.

Erklärung. Die Folge (Funktion) zweier Veränderlichen heist eine Folge, wenn die Formel zwei Veränderliche x und y enthält. 361.

Das Zeichen für die Folge der beiden Veränderlichen x und y ist $f_0(x, y)$ gelefen „Folge von x und y".

Erklärung. Die Folge (Funktion) mehrer Veränderlichen heist eine Folge, wenn die Formel mehr als zwei Veränderliche x, y, z, t, u,·· enthält. 362.

Das Zeichen für die Folge mehrer Veränderlichen x, y, z,··· ist $f_0(x, y, z, \cdots)$ gelefen „Folge von x, y, z, u. f. w."

Erklärung. Stetig heist die Folge zweier oder mehrer Veränderlichen, wenn fie für jede der Veränderlichen stetig ist, fofern die andern Veränderlichen nur endliche Werte haben. 363.

Innerhalb bestimmter Grenzen heist die Folge stetig, wenn ſie innerhalb dieſer Grenzen für jede der Veränderlichen stetig ist.

364. **Erklärung. Unabhängig** von einander heisen die Veränderlichen, wenn ſich nicht eine derſelben als Folge oder Funktion der andern darstellen lässt.

Abhängig von den Grösen u, t,·· heisen die Veränderlichen x, y, z,··, wenn ſich letztere als Folgen der ersten darstellen lassen.

365. **Satz. Die steigende Höhenreihe zweier oder mehrer Veränderlichen ist stets echt (konvergent), wenn das Quader jeder Veränderlichen kleiner als Eins und zugleich keine der Vorzahlen unendlich ist.**

Beweis. Unmittelbar aus 24.

366. **Satz. Jede stetige Reinfolge (stetige reelle Funktion) zweier oder mehrer Veränderlichen kann, ſofern das Quader jeder der Veränderlichen kleiner als eins ist, einer steigenden Höhenreihe dieſer Veränderlichen gleichgeſetzt werden, und dieſe ist, ſofern in ihr nicht eine der Vorzahlen unendlich wird, eine echte Reihe.**

Beweis. Unmittelbar aus 29.

367. **Satz. Jede stetige Richtfolge (stetige komplexe Funktion) zweier oder mehrer Veränderlichen kann, ſofern das Quader jeder der Veränderlichen kleiner als eins ist, einer Richtgröse a + ib gleich geſetzt werden, in welcher jede der beiden Zahlen a und b eine echte steigende Höhenreihe der Veränderlichen darstellt.**

Beweis. Unmittelbar aus 30.

368. **Erklärung. Der Diff x, y, z,·· oder der Differentialquotient nach x, y, z,·· einer Folge heist die Summe aus dem Diff x dieſer Folge, aus dem Diff y dieſer Folge, aus dem Diff z dieſer Folge u. ſ. w. oder**

$$\frac{d}{x, y, z \cdot\cdot} f_0 \cdot = \frac{d}{x} f_0 + \frac{d}{y} f_0 \cdot + \frac{d}{z} f_0 \cdot + \cdots.$$

369. **Erklärung. In der Diffrechnung (Differentialrechnung) nennt man den m ten Diff nach x, y, z,··· einer Folge gewöhnlich den m ten Volldiff oder m ten vollständigen Differentialquotienten der Folge, dagegen den einzelnen Diff der Form** $\frac{d^a}{x}\frac{d^b}{y}\frac{d^c}{z} f_0(x, y, z, \cdot\cdot)$, **einen Teildiff oder partiellen Differentialquotienten.**

Obwohl nach unſerer Bezeichnung dieſe Benennung nicht nötig ist, nehme ich ſie doch auf, um mich an die gewöhnliche Bezeichnung möglichst anzuschliesen.

Unter den Teildiffen haben nun aber auch die einzelnen Diffe einen sehr verschiedenen Wert. Um die wichtigsten Verschiedenheiten zu betrachten, unterscheiden wir den Eindiff und die Mehrdiffe, ferner den Eckdiff mit seinem Ergänzungsdiffe und endlich den Mitteldiff. Für die Betrachtung dieser verschiedenen Diffe geben wir nach 366 der stetigen Folge die Form einer steigenden Höhenreihe $\mathfrak{S} a_{a, b, c, \ldots} x^a y^b z^c \ldots$.

Erklärung. Den mten Eindiff nach x nennen wir den mten Diff einer Folge von zwei oder mehren Veränderlichen, sofern in dieser Folge nur die Glieder genommen werden, in denen nur Höhen von x vorkommen, dagegen jedes Glied fortgelassen wird, in denen irgend eine andere Veränderliche vorkommt. 370.

Das Zeichen des mten Eindiffs von x ist $\overset{1}{\underset{x}{d}}{}^m \mathfrak{S} a_{a, b, c, \ldots} x^a y^b z^c \ldots$ **und es ist** $\overset{1}{\underset{x}{d}}{}^m a_{a, b, c, \ldots} x^a y^b z^c \ldots = \underset{x}{d}{}^m \mathfrak{S} a_{a, 0, 0, \ldots} x^a y^0 z^0 \ldots$.

Beispiele werden wir bei den Folgen zweier Veränderlichen kennen lernen.

Satz. Der mte Eindiff nach x einer Folge mehrer Veränderlichen ist gleich dem mten Diffe nach x einer Folge einer Veränderlichen, oder es ist 371.

$$\overset{1}{\underset{x}{d}}{}^m \mathfrak{S} a_{a, b, c, \ldots} x^a y^b z^c \ldots = \frac{(m+a)!}{a!} a_{m+a, 0, 0, \ldots} x^a.$$

Beweis. Es ist

$$\overset{1}{\underset{x}{d}}{}^m \mathfrak{S} a_{a, b, c, \ldots} x^a y^b z^c \ldots = \underset{x}{d}{}^m \mathfrak{S} a_{a, 0, 0, \ldots} x^a y^0 z^0 \ldots \quad \text{(nach 370)}$$

$$= \underset{x}{d}{}^m \mathfrak{S} a_{a, 0, 0, \ldots} x^a \quad \text{(nach Zahlenlehre 319)}$$

$$= \mathfrak{S} \frac{(m+a)!}{a!} a_{m+a, 0, 0, \ldots} x^a \quad \text{(nach 104).}$$

Erklärung. Den Eck-Mdiff nach x nennen wir den mten Diff einer Folge von zwei oder mehren Veränderlichen, in welchem zwar die Höhen aller Veränderlichen vorkommen, in welchem aber der mte Diff nur nach einer Veränderlichen x genommen ist. 372.

Den ersten Ergänzungs-Ndiff nach y zu dem Eck-Mdiffe nach x nennen wir den nten Diff derselben Folge, in welchem die Höhen der ersten Veränderlichen x sämmtlich kleiner sind als m, während die Höhen der andern Veränderlichen beliebig sind, in welchem aber der nte Diff nur nach einer zweiten Veränderlichen y genommen ist. Den ɒten Ergänzungs-Sdiff zum ɒ — 1ten Ergänzungsdiffe nennen wir den sten Diff derselben Folge, in welchem die Höhen für jede (ɒ — t)te vorhergehende Veränderliche sämmtlich kleiner sind als die Diffstufe dieser Veränderlichen, während die Höhen der weiteren

Veränderlichen beliebig sind, in welchem aber der $\mathfrak{s}$te Diff nur nach einer und zwar der $\mathfrak{o}+1$ten Veränderlichen genommen ist.

Das Zeichen des Eck-Mdiffs nach x ist ${}^{e}\underset{x}{d}{}^{m}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots$ **und es ist** ${}^{e}\underset{x}{d}{}^{m}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots = \underset{x}{d}{}^{m}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots$.

Das Zeichen des ersten Ergänzungs-Ndiffs nach y ist ${}^{1\cdot e}\underset{x}{d}{}^{n}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots$ **und es ist**

${}^{1\cdot e}\underset{y}{d}{}^{n}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots = \underset{y}{d}{}^{n}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots$ **wo** $\mathfrak{a} < m$ **ist.**

Das Zeichen des $\mathfrak{o}$ten Ergänzungs-Sdiffs nach u ist ${}^{\mathfrak{o}e}\underset{u}{d}{}^{s}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots$ **und es ist**

${}^{\mathfrak{o}e}\underset{u}{d}{}^{s}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots = \underset{u}{d}{}^{s}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots t^{\mathfrak{t}}u^{\mathfrak{u}}\ldots$

wo $\mathfrak{a} < m$, $\mathfrak{b} < n$, $\mathfrak{c} < p \ldots \mathfrak{t} < r$ **ist, d. h. als die beim $\mathfrak{o}-1$ Ergänzungsdiffe genommene Diffstufe nach t.**

Beispiele werden wir bei den Folgen zweier und bei den Folgen mehrer Veränderlichen kennen lernen.

373. **Satz. Der Eck-Mdiff nach x einer Folge mehrer Veränderlichen ist gleich dem m ten Diffe nach x einer Folge einer Veränderlichen, indem man alle andern Veränderlichen als Unveränderliche oder Konstante behandelt, oder es ist**

$${}^{e}\underset{x}{d}{}^{m}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots = \mathfrak{S}\frac{(m+\mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!}\,a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots.$$

Beweis. Es ist ${}^{e}\underset{x}{d}{}^{m}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots = \underset{x}{d}{}^{m}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots$ (nach 372)

$$= \mathfrak{S}\frac{(m+\mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!}\,a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots \quad \text{(nach 104).}$$

374. **Satz. Der erste Ergänzungs-Ndiff nach y zu dem Eck-Mdiffe nach x einer Folge mehrer Veränderlichen ist gleich dem Eck-Ndiffe nach y, sofern man bei den Höhen von x $\mathfrak{a} < m$ nimmt, oder es ist**

$${}^{1e}\underset{y}{d}{}^{n}\mathfrak{S}\,a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots = \mathfrak{S}\frac{(n+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!}\,a_{\mathfrak{a},n+\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots}\,x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}z^{\mathfrak{c}}\ldots,$$

wo $\mathfrak{a} < m$ ist.

Und ebenso ist der $\mathfrak{o}$te Ergänzungs-Sdiff nach u einer Folge mehrer Veränderlichen gleich dem Eck-Sdiffe nach u, sofern man bei allen vorhergehenden Veränderlichen die Höhe $\mathfrak{a} < m$, $\mathfrak{b} < n \ldots$, $\mathfrak{t} < r$ nimmt, oder es ist

$$^{oe}\underset{u}{d^s}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{t},\mathfrak{u},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots t^{\mathfrak{t}} u^{\mathfrak{u}} \ldots$$

$$= \int \frac{(s+\mathfrak{u})!}{\mathfrak{u}!} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{t},s+\mathfrak{u},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots t^{\mathfrak{t}} u^{\mathfrak{u}} \ldots$$

wo $\mathfrak{a} < m$, $\mathfrak{b} < n$, $\mathfrak{c} < p \cdots \mathfrak{t} < r$ ist.

Beweis. Es ist $^{1e}\underset{y}{d^n}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots = \underset{y}{d^n}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots$

wo $\mathfrak{a} < m$ (nach 372)

$$= \int \frac{(n+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!} a_{\mathfrak{a},n+\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots \quad \text{wo } \mathfrak{a} < m \qquad \text{(nach 104)}$$

2. Es ist $^{oe}\underset{u}{d^s}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{t},\mathfrak{u},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots t^{\mathfrak{t}} u^{\mathfrak{u}} \ldots$ (nach 372)

$$= \underset{u}{d^s}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{t},\mathfrak{u},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots t^{\mathfrak{t}} u^{\mathfrak{u}} \ldots, \quad \text{wo } \mathfrak{a} < m,\ \mathfrak{b} < n,\ \cdots \mathfrak{t} < r \text{ ist}$$

$$= \int \frac{(s+\mathfrak{u})!}{\mathfrak{u}!} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{t},s+\mathfrak{u},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots t^{\mathfrak{t}} u^{\mathfrak{u}} \ldots \qquad \text{(nach 104)}$$

wo $\mathfrak{a} < m$, $\mathfrak{b} < n, \cdots \mathfrak{t} < r$ ist.

Erklärung. Den Mitteldiff einer Folge von zwei oder mehren Veränderlichen nennen wir jeden Diff diefer Folge, wo wenigstens nach zwei Veränderlichen die Diffe genommen find. 375.

Das Zeichen des Mitteldiffs ist

$$\underset{x}{d^m}\,\underset{y}{d^n}\,\underset{z}{d^p}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots.$$

Satz. Der Mitteldiff nach x, y, z einer Folge mehrer Veränderlichen ist 376.

$$\underset{x}{d^m}\,\underset{y}{d^n}\,\underset{z}{d^p}\int a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots$$

$$= \int \frac{(m+\mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!}\,\frac{(n+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!}\,\frac{(p+\mathfrak{c})!}{\mathfrak{c}!} a_{m+\mathfrak{a},n+\mathfrak{b},p+\mathfrak{c},\ldots} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots.$$

Nach diefen allgemeinen Sätzen über die Folgen mehrer Veränderlichen wenden wir uns nun zunächst zu den Sätzen über die Folgen zweier Veränderlichen.

13. Die Diffe und die Integren von den Folgen zweier Veränderlichen.

Von den Folgen mehrer Veränderlichen haben bisher fast nur die Folgen zweier Veränderlichen eine Behandlung erfahren; aber auch bei diefen erscheinen die meisten Aufgaben bei der bisherigen Art der Bearbeitung unlöslich. Hier musste daher ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden, wenn wir zu einem weitern Fortschritte der Wissenschaft gelangen wollten.

Zunächst musste die steigende Höhenreihe, auf welche jede stetige Folge nach Nummer 366 zurückgeführt werden kann, behandelt und ihr eine leicht überfichtliche Form gegeben werden.

Dann muss die Ableitung der Diffe von gegebenen Folgen und zwar fowohl der Teildiffe, als auch der Volldiffe und der verschiedenen Arten der Teildiffe gegeben werden.

Erst, nachdem dies geschehen ist, können wir zur Behandlung der Integren und der Integrale von gegebenen Diffgleichungen übergehen.

377. **Satz. Jede stetige Reinfolge (stetige reelle Funktion) zweier Veränderlichen x und y kann man, fofern das Quader jeder der Veränderlichen kleiner als eins ist, einer steigenden Höhenreihe $\underset{x,y}{R}$ gleichsetzen von der Form**

$$\underset{x,y}{R} = S a_{a,b} x^a y^b$$

$$= a_{0,0}$$
$$+ a_{1,0} x + a_{0,1} y$$
$$+ a_{2,0} x^2 + a_{1,1} x\, y + a_{0,2} y^2$$
$$+ a_{3,0} x^3 + a_{2,1} x^2 y + a_{1,2} x\, y^2 + a_{0,3} y^3$$
$$+ a_{4,0} x^4 + a_{3,1} x^3 y + a_{2,2} x^2 y^2 + a_{1,3} x\, y^3 + a_{0,4} y^4$$
$$+ a_{5,0} x^5 + a_{4,1} x^4 y + a_{3,2} x^3 y^2 + a_{2,3} x^2 y^3 + a_{1,4} x\, y^4 + a_{0,5} y^5$$
$$+ a_{6,0} x^6 + a_{5,1} x^5 y + a_{4,2} x^4 y^2 + a_{3,3} x^3 y^3 + a_{2,4} x^2 y^4 + a_{1,5} x\, y^5 + a_{0,6} y^6$$
$$+ a_{7,0} x^7 + a_{6,1} x^6 y + a_{5,2} x^5 y^2 + a_{4,3} x^4 y^3 + a_{3,4} x^3 y^4 + a_{2,5} x^2 y^5 + a_{1,6} x y^6 + a_{0,7} y^7$$
$$+ \cdots$$

Beweis. Unmittelbar nach 366.

378. **Satz. Wenn in der $\underset{x,y}{R} = S a_{a,b} x^a y^b$ das Glied $a_{a,b} x^a y^b$ kurz mit a, b bezeichnet wird, so hat diese Reihe die folgenden Glieder.**

Schrägreihe																	
0te	0,0																
1te	1.0	0,1															
2te	2,0	1,1	0.2														
3te	3,0	2,1	1.2	0,3													
4te	4.0	3,1	2,2	1,3	0,4												
5te	5,0	4,1	3,2	2.3	1.4	0,5											
6te	6,0	5.1	4,2	3,3	2,4	1,5	0,6										
7te	7.0	6,1	5,2	4,3	3,4	2.5	1,6	0,7									
8te	8.0	7,1	6,2	5,3	4,4	3,5	2.6	1,7	0,8								
9te	9,0	8,1	7.2	6,3	5,4	4.5	3.6	2,7	1,8	0,9							
10te	10,0	9,1	8,2	7.3	6,4	5,5	4.6	3,7	2,8	1,9	0.10						
11te	11,0	10,1	9,2	8,3	7,4	6.5	5,6	4.7	3,8	2,9	1.10	0.11					
12te	12,0	11,1	10,2	9,3	8,4	7.5	6.6	5,7	4 8	3,9	2,10	1.11	0,12				
13te	13,0	12,1	11,2	10,3	9,4	8.5	7.6	6.7	5.8	4.9	3,10	2,11	1,12	0,13			
14te	14,0	13,1	12.2	11.3	10,4	9.5	8,6	7.7	6,8	5.9	4,10	3,11	2,12	1,13	0,14		
15te	15.0	14,1	13,2	12,3	11,4	10.5	9,6	8,7	7,8	6.9	5,10	4.11	3,12	2,13	1,14	0.15	
16te	16.0	15,1	14,2	13,3	12,4	11.5	10.6	9.7	8,8	7.9	6.10	5.11	4,12	3.13	2,14	1.15	0.16
Senkreihe.	0te	1te	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te	10te	11te	12te	13te	14te	15te	16te

wo das Zeichen a, b das Glied $a_{a,b} x^a y^b$ bezeichnet.

Beweis. Unmittelbar nach 373.

a. Die Ableitung der Diffe (der Differentialquotienten).

Satz. $\underset{x}{d}^m \underset{y}{d}^n f_0(x, y) = \underset{y}{d}^n \underset{x}{d}^m f_0(x, y)$. 379.

Es giebt dasselbe, ob man das mte Diff x vom nten Diff y, oder ob man das nte Diff y vom mten Diff x derselben Folge von zwei Veränderlichen nimmt.

Beweis. I. Man entwickle $f_0(x + h, y + k)$ und zwar zunächst in der Weise, dass man sich zunächst nur x in $x + h$ ändern lässt, während y zunächst unverändert bleibt, dann erhält man nach 100

$$f_0(x + h, y) = f_0(x, y) + h \underset{x}{d} f_0(x, y) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \underset{x}{d}^2 f_0(x, y) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \underset{x}{d}^3 f_0(x, y) + \cdots.$$

Hierin lasse man nun nach 100 sich y in $y + k$ verändern, so erhält man

$$\begin{aligned} f_0(x + h, y + k) &= f_0(x, y) + k \underset{y}{d} f_0(x, y) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \underset{y}{d}^2 f_0(x, y) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \underset{y}{d}^3 f_0(x, y) + \cdots \\ &\quad + h \underset{x}{d} f_0(x, y) + kh \underset{y}{d} \underset{x}{d} f_0(x, y) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} h \underset{y}{d}^2 \underset{x}{d} f_0(x, y) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \underset{x}{d}^2 f_0(x, y) + k \frac{h^2}{1 \cdot 2} \underset{y}{d} \underset{x}{d}^2 f_0(x, y) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \underset{x}{d}^3 f_0(x, y) + \cdots \\ &= \mathfrak{S} \frac{k^a}{a!} \frac{h^b}{b!} \underset{y}{d}^a \underset{x}{d}^b f_0(x, y). \end{aligned}$$

II. Man entwickle $f_0(x + h, y + k)$ demnächst in der Weise, dass man zuerst y sich in $y + k$ verwandeln lässt, während x zunächst unverändert bleibt, dann erhält man nach 100

$$f_0(x, y + k) = f_0(x, y) + k \underset{y}{d} f_0(x, y) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \underset{y}{d}^2 f_0(x, y) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \underset{y}{d}^3 f_0(x, y) + \cdots$$

Hierin lasse man nun nach 100 sich x in $x + h$ verändern, so erhält man

$$\begin{aligned} f_0(x + h, y + k) &= f_0(x, y) + h \underset{x}{d} f_0(x, y) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \underset{x}{d}^2 f_0(x, y) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \underset{x}{d}^3 f_0(x, y) + \cdots \\ &\quad + k \underset{y}{d} f_0(x, y) + hk \underset{x}{d} \underset{y}{d} f_0(x, y) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} k \underset{x}{d}^2 \underset{y}{d} f_0(x, y) + \cdots \\ &\quad + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \underset{y}{d}^2 f_0(x, y) + h \frac{k^2}{1 \cdot 2} \underset{x}{d} \underset{y}{d}^2 f_0(x, y) + \cdots \\ &\quad + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \underset{y}{d}^3 f_0(x, y) + \cdots \end{aligned}$$

$$= \mathfrak{S} \frac{h^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \frac{k^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y)$$

III. Alſo folgt

$$\mathfrak{S} \frac{k^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} \frac{h^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} f_0(x, y) = \mathfrak{S} \frac{h^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \frac{k^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y).$$

Und da dieſe Formel gelten muss für jeden Wert des h und des k, ſofern beide nur genügend klein bleiben, ſo folgt nach 28

$$\underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} f_0(x, y) = \underset{x}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y),$$ was zu beweiſen war.

380. **Satz.** $\underset{x}{\mathfrak{d}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^n \underset{x}{\mathfrak{d}}^m f_0(x, y) = \underset{y}{\mathfrak{d}}^n \underset{x}{\mathfrak{d}}^{m+1} f_0(x, y).$

Beweis. Es ist $\underset{x}{\mathfrak{d}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^n \underset{x}{\mathfrak{d}}^m f_0(x, y) = \underset{x}{\mathfrak{d}} \left(\underset{y}{\mathfrak{d}}^n \underset{x}{\mathfrak{d}}^m f_0(x, y) \right)$ (nach 82)

$$= \underset{x}{\mathfrak{d}} \left(\underset{x}{\mathfrak{d}}^m \underset{y}{\mathfrak{d}}^n f_0(x, y) \right) \quad \text{(nach 379)}$$

$$= \underset{x}{\mathfrak{d}}^{m+1} \underset{y}{\mathfrak{d}}^n f_0(x, y) \quad \text{(nach 84)}$$

$$= \underset{y}{\mathfrak{d}}^n \underset{x}{\mathfrak{d}}^{m+1} f_0(x, y) \quad \text{(nach 379).}$$

381. **Satz des Volldiffs.** $\underset{x, y}{\mathfrak{d}}^n f_0(x, y) = \mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y).$

Beweis. 1. Der Satz gilt für $n = 1$, denn es ist

$$\underset{x, y}{\mathfrak{d}} f_0(x, y) = \underset{x}{\mathfrak{d}} f_0(x, y) + \underset{y}{\mathfrak{d}} f_0(x, y) \text{ nach 368.}$$

2. Wenn der Satz für $\underset{x, y}{\mathfrak{d}}^n$ gilt, ſo gilt er auch für $\underset{x, y}{\mathfrak{d}}^{n+1}$; denn es ist

$$\underset{x, y}{\mathfrak{d}}^{n+1} f_0(x, y) = \underset{x, y}{\mathfrak{d}} \underset{x, y}{\mathfrak{d}}^n f_0(x, y) \quad \text{(nach 84)}$$

$$= \underset{x, y}{\mathfrak{d}} \left(\mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y) \right) \quad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \underset{x}{\mathfrak{d}} \left(\mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y) \right) + \underset{y}{\mathfrak{d}} \left(\mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y) \right)$$

(nach 368)

$$= \mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n+1-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y) + \mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}+1} f_0(x, y)$$

(nach 84, 371)

$$= \mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n+1-\mathfrak{a}} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} f_0(x, y) + \mathfrak{S}\, n^{\cdot \mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{n+1-(\mathfrak{a}+1)} \underset{y}{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}+1} f_0(x, y).$$

Und wenn wir hier die Glieder zuſammenfaſſen, welche gleiche Diffe haben, d. h. $\mathfrak{a}$ im erſten Stücke und $(\mathfrak{a} - 1) + 1$ im zweiten Stücke, d. h. wenn wir im zweiten Stücke $\mathfrak{a} - 1$ statt $\mathfrak{a}$ ſetzen, ſo erhalten wir

$$\mathfrak{d}^{n+1}_{x,y} f_0(x, y) = \mathfrak{S}(n^{\cdot a} + n^{\cdot a+1})\, \mathfrak{d}_x^{(n+1)-a}\, \mathfrak{d}_y^{a}\, f_0(x, y)$$

$$= \mathfrak{S}(n + 1)^{\cdot a}\, \mathfrak{d}_x^{(n+1)-a}\, \mathfrak{d}_y^{a}\, f_0(x, y) \text{ (nach Zahlenlehre 391).}$$

3. Nun gilt der Satz für $n = 1$, alfo gilt er ganz allgemein.

Die Formel entspricht ganz der Formel des binomischen Lehrfatzes 49. Es ist darnach $\mathfrak{d}^2_{x,y} f_0(x, y) = \mathfrak{d}_x^2 f_0(x, y) + 2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y f_0(x, y) + \mathfrak{d}_y^2 f_0(x, y)$

$$\mathfrak{d}^3_{x,y} f_0(x, y) = \mathfrak{d}_x^3 f_0(x, y) = 3\mathfrak{d}_x^2\mathfrak{d}_y f_0(x, y) + 3\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y^2 f_0(x, y) + \mathfrak{d}_y^3 f_0(x, y)$$

$$\mathfrak{d}^4_{x,y} f_0(x, y) = \mathfrak{d}_x^4 f_0(x, y) + 4\mathfrak{d}_x^3\mathfrak{d}_y f_0(x, y) + 6\mathfrak{d}_x^2\mathfrak{d}_y^2 f_0(x, y) + 4\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y^3 f_0(x, y) + \mathfrak{d}_y^4 f_0(x, y).$$

b. Die Aufstellung der Integren und Integrale zu gegebenen Diffen mit zwei Veränderlichen.

Die Lehre von den Integren und den Integralen gegebener Diffe mit zwei Veränderlichen ist bis jetzt fo wenig entwickelt, dass es eine Seltenheit ist, wenn man eine Integre oder ein Integral für einen gegebenen Diff aufstellen kann. Es kommt dies einerfeits daher, dass man nicht die Integren und die Integrale unterschieden hat, und andrerfeits daher, dass man nur die Integrale der Volldiffe (vollständigen Differentiale) behandelt hat. Da aber fast nie ein Volldiff mit allen feinen zu einander passenden Gliedern gegeben ist, fo kann man gegenwärtig auch die Diffe mit zwei Veränderlichen fast nie integriren. Ja die Diffe höherer Stufen erscheinen den Mathematikern noch ganz unlösbar; an diefe hat man fich überhaupt noch nicht gewagt.

Soll hier ein besseres Ergebniss erzielt werden, fo muss ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden. Ueberdies find in den weitaus meisten Fällen uns Teildiffe (partielle Differentialquotienten) gegeben, für welche die Integre bez. das Integral gefunden werden foll. Auch dies zwingt uns, einen ganz neuen Weg zu verfuchen.

Aber auch nicht jede zwei gegebenen Teildiffe lassen fich integriren. Es kommt nicht felten vor, dass zwei gegebene Teildiffe gar nicht auf ein und diefelbe ursprüngliche Folge zurückgeführt werden können. Das bekannteste Beispiel bieten die beiden Teildiffe

$$\mathfrak{d}_x \mathfrak{S} a_{a,b}\, x^a y^b = by \qquad \mathfrak{d}_y \mathfrak{S} a_{a,b}\, x^a y^b = cx,$$

denn leitet man aus ersterm den Diff nach y, aus letzterm den Diff nach x ab, fo ergiebt fich aus dem erstern

$$\mathfrak{d}_y\mathfrak{d}_x \mathfrak{S} a_{a,b}\, x^a y^b = b, \text{ aus dem letztern } \mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y \mathfrak{S} a_{a,b}\, x^a y^b = c,$$

während beide Diffe doch nach 379 einander gleich fein müssten, wenn fie aus derfelben ursprünglichen Folge abgeleitet wären. Sie können mithin nicht aus derfelben ursprünglichen Folge abgeleitet fein; fie können demnach auch nicht durch Integriren auf diefelbe ursprüngliche Folge zurückgeführt werden; fie find nicht integrabel. Es kommt nun darauf an, festzustellen, welche gegebenen Teildiffe zweier Veränderlichen integrabel find, welche nicht. Wir haben zu diefem

Zwecke bereits oben die Teildiffe in drei verschiedene Gruppen geteilt und betrachten nun diefe Gruppen befonders.

382. **Satz. Jede zwei gegebenen Teildiffe zweier Veränderlichen find integrabel, wenn das eine derfelben ein Eckdiff, das andere ein Ergänzungsdiff desfelben ist.**

Und zwar ist, wenn $\frac{d^m}{x} F_0(x, y) = \mathsf{S} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}}$ und $\frac{d^n}{y} F_0(x, y) \mathsf{S} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}}$ die beiden gegebenen Diffe find, die Integre

$$\varphi_0(x, y) = \mathsf{S} a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{m+\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} + \mathsf{S} a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{n+\mathfrak{b}}, \text{ wo } \mathfrak{c} < m.$$

$$a_{n+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}!}{(m+\mathfrak{a})!} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \text{ und } a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{b}!}{(n+\mathfrak{b})!} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \text{ ist.}$$

Das Integral aber hat die mn Willkürlichen $\mathsf{S} w_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wo $\mathfrak{a} < m$ und zugleich $\mathfrak{b} < n$ ist oder es ist das Integral $E_0(x, y) = \mathsf{S} w_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \varphi_0(x, y)$, wo $\mathfrak{a} < m$, und zugleich $\mathfrak{b} < n$ ist.

Beweis. 1. Da die gegebenen Teildiffe ein Eckdiff und ein Ergänzungsdiff desfelben fein follen, fo fetze

$$\frac{d^m}{x} F_0(x, y) = \mathsf{S} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} = \mathsf{S} \frac{(m+\mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!} a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}}, \text{ alfo}$$

$$a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}!}{(m+\mathfrak{a})!} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

$$\frac{d^n}{y} F_0(x, y) = \mathsf{S} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}} = \mathsf{S} \frac{(n+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!} a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}}, \text{ alfo}$$

$$a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{b}!}{(n+\mathfrak{b})!} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$$

und nehme nun für jeden derfelben die Integre, dann ist

$$\frac{d}{x}^{-m} \frac{d^m}{x} F_0(x, y) = \mathsf{S} \frac{\mathfrak{a}!}{(m+\mathfrak{a})!} \cdot \frac{(m+\mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!} a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{m+\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}}$$

$$= \mathsf{S} a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{m+\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} \qquad \text{(nach 197)}$$

$$\frac{d}{y}^{-n} \frac{d^n}{x} F_0(x, y) = \mathsf{S} \frac{\mathfrak{b}!}{(n+\mathfrak{b})!} \cdot \frac{(n+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!} a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{n+\mathfrak{b}}$$

$$= \mathsf{S} a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{n+\mathfrak{b}} \qquad \text{(nach 197)}$$

alfo die Integre $\varphi_0(x, y) = \mathsf{S} a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{m+\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} + \mathsf{S} a_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{n+\mathfrak{b}}$

wo $\mathfrak{c} < m$ nach 378, $a_{m+\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}!}{(m+\mathfrak{a})!} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ und $c_{\mathfrak{c},n+\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{b}!}{(n+\mathfrak{b})!} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$.

wenn man das m te Volldiff nimmt, ſämmtlich fort. Dagegen darf man nicht willkürliche Folgen dieſer Art ſetzen, wo $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' + \cdots \geqq m$ ist, denn dieſe würden als Diffe im m ten Volldiffe bleiben.

Dieſe getrennten Eckdiffe kommen häufig dort vor, wo man bei Verſuchen die eine Veränderliche unverändert lässt und nur die andere Veränderliche ſich ändern lässt. Man erhält dann den Eckdiff der einen Veränderlichen und entsprechend demnächst den Eckdiff der andern Veränderlichen; muss dann aber noch prüfen, ob nicht auch ſolche Glieder von Einfluss ſind, in denen beide Veränderliche zugleich ändern. Dies führt uns auf die letzte Art der Teildiffe.

Wenn die getrennten Eckdiffe 1 te Diffe ſind, ſo hat das Integral nur eine Willkürliche $w_{0,0,0,\cdots}$; wenn es 2 te Diffe ſind, ſo hat das Integral auser dieſer Willkürlichen für jede Veränderliche noch eine Willkürliche $w_{1,0,0,\cdots}x + w_{0,1,0,\cdots}y + w_{0,0,1,\cdots}z + \cdots$, wenn es dritte Eckdiffe ſind, ſo hat das Integral auser dieſen Willkürlichen für jede Veränderliche noch eine und $^1/_2$ Willkürliche, nämlich

$$w_{2,0,0,\cdots}x^2 + w_{0,2,0,\cdots}y^2 + w_{0,0,2,\cdots}z^2 + \cdots$$
$$+ w_{1,1,0,\cdots}xy + w_{1,0,1,\cdots}xz + w_{0,1,1,\cdots}yz + \cdots.$$

Satz. Wenn bei mehren Veränderlichen für jede Veränderliche ein getrennter höherer Eckdiff gegeben ist, ſo findet man die Integre, welche dieſen Eckdiffen genügt, indem man für jede der Veränderlichen ihren getrennten Eckdiff ganz ſo integert, wie bei den Folgen einer Veränderlichen und die gewonnenen Integren zufügt oder addirt. 385.

Oder

Wenn $\overset{t}{\underset{x}{\mathrm{d}}}{}^{m} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S} a_{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}}$, $\overset{t}{\underset{y}{\mathrm{d}}}{}^{n} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S} b_{\mathfrak{b}} y^{\mathfrak{b}}$, $\overset{t}{\underset{z}{\mathrm{d}}}{}^{p} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S} c_{\mathfrak{c}} z^{\mathfrak{c}}$ **ist, ſo ist die Integre, welche allen dieſen Gleichungen genügt**

$$f_0(x,y,z,\cdots) = \mathfrak{S}\frac{\mathfrak{a}!}{(m+\mathfrak{a})!} a_{\mathfrak{a}} x^{m+\mathfrak{a}} + \mathfrak{S}\frac{\mathfrak{b}!}{(n+\mathfrak{b})!} b_{\mathfrak{b}} y^{n+\mathfrak{b}} + \mathfrak{S}\frac{\mathfrak{c}!}{(p+\mathfrak{c})!} c_{\mathfrak{c}} z^{p+\mathfrak{c}} + \cdots.$$

Das Integral ist gleich dieſer Integren plus der Summe der willkürlichen Folgen $w_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\cdots} x^{\mathfrak{a}'} y^{\mathfrak{b}'} z^{\mathfrak{c}'} \cdots$, **wo** $\mathfrak{a}' < m$, $\mathfrak{b}' < n$, $\mathfrak{c}' < p$ **u. ſ. w. ist.**

Beweis: Wenn wir

$f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S} e_{\mathfrak{a}} x^{m+\mathfrak{a}} + \mathfrak{S} e_{\mathfrak{b}} y^{n+\mathfrak{b}} + \mathfrak{S} e_{\mathfrak{c}} z^{n+\mathfrak{c}} + \cdots$ ſetzen, wo $e_{\mathfrak{a}}, e_{\mathfrak{b}}, e_{\mathfrak{c}}, \cdots$ keine Veränderliche enthalten, ſo ist

$$\underset{x}{\mathrm{d}}{}^{m} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S}\frac{(m+\mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!} e_{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}} \qquad \underset{y}{\mathrm{d}}{}^{n} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S}\frac{(n+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!} e_{\mathfrak{b}} y^{\mathfrak{b}}$$

$$\underset{z}{\mathrm{d}}{}^{p} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S}\frac{(p+\mathfrak{c})!}{\mathfrak{c}!} e_{\mathfrak{c}} z^{\mathfrak{c}}, \cdots.$$

Die $f_0(x, y, z, \cdots)$ genügt alſo allen gegebenen Gleichungen, wenn wir

$$\frac{(m + \mathfrak{a})!}{\mathfrak{a}!} e_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{a}}, \quad \frac{(n + \mathfrak{b})!}{\mathfrak{b}!} e_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{b}}, \quad \frac{(p + \mathfrak{c})!}{\mathfrak{c}!} e_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{c}}, \cdots$$

oder $e_{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a}!}{(m + \mathfrak{a})!} \mathfrak{a}_{\mathfrak{a}}, \; e_{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{b}!}{(n + \mathfrak{b})!} \mathfrak{b}_{\mathfrak{b}}, \; e_{\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{c}!}{(p + \mathfrak{c})!} \mathfrak{c}_{\mathfrak{c}}, \cdots$ ſetzen.

Es ist alſo

$$f_0(x, y, z, \cdots) = \mathfrak{S} \frac{\mathfrak{a}!}{(m + \mathfrak{a})!} \mathfrak{a}_{\mathfrak{a}} x^{m+\mathfrak{a}} + \mathfrak{S} \frac{\mathfrak{b}!}{(n + \mathfrak{b})!} \mathfrak{b}_{\mathfrak{b}} y^{n+\mathfrak{b}} + \mathfrak{S} \frac{\mathfrak{c}!}{(p + \mathfrak{c})!} \mathfrak{c}_{\mathfrak{c}} z^{p+\mathfrak{c}} + \cdots$$

die Integre, welche den gegebenen Gleichungen genügt.

Für das Integral ergiebt ſich noch die Summe von Folgen mit willkürlichen Beständigen $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots} w \quad x^{\mathfrak{a}'} y^{\mathfrak{b}'} z^{\mathfrak{c}'} \cdots$, wo $\mathfrak{a}' < m$, $\mathfrak{b}' < n$, $\mathfrak{c}' < p, \cdots$ ist, da alle dieſe Glieder ſowohl im $\frac{d}{x}^m$, wie im $\frac{d}{y}^n$, u. ſ. w. fortfallen, und alſo ganz ohne Einfluss auf die gegebenen Diffgleichungen ſind.

386. **Erklärung. Der m te Eckdiff nach x heist ein trennbarer, wenn er ſich durch Rechnung in einen getrennten Eckdiff verwandeln lässt.**

Für zwei Veränderliche ergeben ſich die folgenden Sätze.

387. **Satz. Die Folge $\frac{d}{x}^{-m}(f_0 x)\varphi_0 y + \frac{d}{y}^{-n}(F_0 x)\Phi_0 y = 0$ ist eine Folge mit trennbaren Eckdiffen. Dieſelbe ergiebt**

$$\frac{d}{x}^{-m} \frac{f_0 x}{F_0 x} + \frac{d}{y}^{-n} \frac{\Phi_0 y}{\varphi_0 y} \overset{*}{=} 0, \qquad \text{* wenn } F_0 x \text{ und } \varphi_0 y \gtrless 0.$$

Beweis: Die getrennten Eckdiffe ergeben ſich, wenn man die Folge durch $(F_0 x)\varphi_0 y$ dividirt.

Wir werden im folgenden Paragraphen noch weitere trennbare Eckdiffe kennen lernen, welche durch Einführung neuer Veränderlicher getrennt werden können.

388. **Erklärung. Die Eckdiffe mehrer Veränderlichen $\frac{d}{x}^m, \frac{d}{y}^n, \frac{d}{z}^p, \cdots$ heisen einander ergänzende Eckdiffe oder Ergänzungsdiffe, wenn in jedem Eckdiffe nur ſolche Höhen der andern Veränderlichen vorkommen, in denen die Stufen (Exponenten) jeder dieſer Veränderlichen kleiner ſind, als die Stufe des Eckdiffs derſelben Veränderlichen, oder mit andern Worten, wo im m ten Eckdiffe der einen Veränderlichen x, nur ſolche Höhen von $y^{\mathfrak{a}} z^{\mathfrak{b}} \cdots$ vorkommen, in denen $\mathfrak{a}$ kleiner als n, $\mathfrak{b}$ kleiner als p, u. ſ. w. ist.**

Das Zeichen der Ergänzungsdiffe ist $\frac{{}^{e}d}{x}^m f_0(x, y, z, \cdots)$.

Die Eckdiffe $\frac{d^3}{x}\mathop{S} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}}$ und $\frac{d^4}{y}\mathop{S} b_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\, x^{\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}}$ z. B. ſind einander ergänzende Eckdiffe, wenn $\mathfrak{b} < 4$ und $\mathfrak{c} < 3$ ist.

Satz. Die einander ergänzenden Eckdiffe zweier oder mehrer Veränderlichen lassen ſich integern. Man erhält die Integre, indem man den Eckdiff jeder Veränderlichen nur nach ſeiner Veränderlichen integert, alle andern Veränderlichen in dieſem Eckdiffe als unveränderlich behandelt und die Integren zufügt. 389.

Das Integral hat, wenn $m, n, p, \cdots$ die Stufen der Eckdiffe von $x, y, z, \cdots$ ſind, die $mnp\cdots$ willkürlichen Folgen $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots$, wo zugleich $\mathfrak{a} < m$, $\mathfrak{b} < n$, $\mathfrak{c} < p, \cdots$ ist.

Beweis: Sei $F_0(x, y, z, \cdots) = \mathop{S} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots$ das Integral zu den gegebenen Ergänzungsdiffen, ſo fallen in dem $m$ten Eckdiffe nach x alle Glieder fort, in denen $\mathfrak{a} < m$ ist, ebenſo im $n$ten Eckdiffe nach y alle Glieder fort, in denen $\mathfrak{b} < n$, im $p$ten Eckdiffe nach z alle Glieder fort, in denen $\mathfrak{c} < p$ ist, u. ſ. w., alſo fallen ſämmtliche Glieder fort, in denen zugleich $\mathfrak{a} < m$, $\mathfrak{b} < n$, $\mathfrak{c} < p, \cdots$ ist. Alle dieſe Glieder des Integrals können alſo Folgen mit willkürlichen Beständigen ſein.

Für die Integre $f_0(x, y, z, \cdots)$ ſetzen wir dieſe ſämmtlichen willkürlichen Folgen gleich Null. Sei nun die Integre $f_0(x, y, z, \cdots)$, und ſeien die gegebenen Ergänzungsdiffe, d. h.

$$\frac{d^m}{x} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathop{S} a_{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\cdots}\, x^{\mathfrak{a}_1} y^{\mathfrak{b}_1} z^{\mathfrak{c}_1}\cdots, \text{ wo } \mathfrak{b}_1 < n,\ \mathfrak{c}_1 < p, \cdots \text{ ist,}$$

$$\frac{d^n}{y} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathop{S} a_{\mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}_2,\cdots}\, x^{\mathfrak{a}_2} y^{\mathfrak{b}_2} z^{\mathfrak{c}_2}\cdots, \text{ wo } \mathfrak{a}_2 < m,\ \mathfrak{c}_2 < p, \cdots \text{ ist,}$$

$$\frac{d^n}{z} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathop{S} a_{\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{c}_3,\cdots}\, x^{\mathfrak{a}_3} y^{\mathfrak{b}_3} z^{\mathfrak{c}_3}\cdots, \text{ wo } \mathfrak{a}_3 < m,\ \mathfrak{b}_3 < n,\ \mathfrak{c}_3 < q, \cdots \text{ ist,}$$

$$\vdots$$

ſo genügt dieſen Diffen die Integre

$$f_0(x, y, z, \cdots) = \mathop{S} c_{m+\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\cdots}\, x^{m+\mathfrak{a}_1} y^{\mathfrak{b}_1} z^{\mathfrak{c}_1}\cdots$$

$$+ \mathop{S} c_{\mathfrak{a}_2,n+\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}_2,\cdots}\, x^{\mathfrak{a}_2} y^{n+\mathfrak{b}_2} z^{\mathfrak{c}_2}\cdots + \mathop{S} c_{\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_3,p+\mathfrak{c}_3,\cdots}\, x^{\mathfrak{a}_3} y^{\mathfrak{b}_3} z^{p+\mathfrak{c}_3}\cdots,$$

$$+ \cdots$$

wo $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \cdots < m$, ferner $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_3, \cdots < n$, auch $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \cdots < p, \cdots$ ist. Denn es ist dann

$$\frac{d^m}{x} f_0(x, y, z, \cdots) = \mathop{S} \frac{(m + \mathfrak{a}_1)!}{\mathfrak{a}_1!}\, c_{m+\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1\cdots}\, x^{\mathfrak{a}_1} y^{\mathfrak{b}_1} z^{\mathfrak{c}_1}\cdots,$$

wo $\mathfrak{b}_1 < n$, $\mathfrak{c}_1 < p, \cdots$

$$\underset{y}{\mathrm{d}}^{n} f_0(x, y, z, \cdot\cdot) = \mathfrak{S}\frac{(n+\mathfrak{b}_2)!}{\mathfrak{b}_2!}\, c_{\mathfrak{a}_2, n+\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \cdot\cdot}\; x^{\mathfrak{a}_2} y^{\mathfrak{b}_2} z^{\mathfrak{c}_2} \cdots,$$

wo $\mathfrak{a}_2 < m$, $\mathfrak{c}_2 < p, \cdots$

$$\underset{z}{\mathrm{d}}^{p} f_0(x, y, z, \cdot\cdot) = \mathfrak{S}\frac{(p+\mathfrak{c}_3)!}{\mathfrak{c}_3!}\, c_{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, p+\mathfrak{c}_3, \cdot\cdot}\; x^{\mathfrak{a}_3} y^{\mathfrak{b}_3} z^{\mathfrak{c}_3} \cdots,$$

wo $\mathfrak{a}_3 < m$, $\mathfrak{b}_3 < n, \cdots$

$\vdots$

Und zwar ist dann $a_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \cdot\cdot} = \frac{(m+\mathfrak{a}_1)!}{\mathfrak{a}_1!}\, c_{m+\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \cdot\cdot}$,

alſo $c_{m+\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \cdot\cdot} = \frac{\mathfrak{a}_1!}{(m+\mathfrak{a}_1)!}\, a_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \cdot\cdot}$

und ebenſo folgt $c_{\mathfrak{a}_2, n+\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \cdot\cdot} = \frac{\mathfrak{b}_2!}{(n+\mathfrak{b}_2)!}\, a_{\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \cdot\cdot}$

$c_{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, p+\mathfrak{c}_3, \cdot\cdot} = \frac{\mathfrak{c}_3!}{(p+\mathfrak{c}_3)!}\, a_{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \cdot\cdot}$,

alſo ist die Integre

$$\begin{aligned} f_0(x, y, z, \cdot\cdot) = {} & \mathfrak{S}\frac{\mathfrak{a}_1!}{(m+\mathfrak{a}_1)!}\, a_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \cdot\cdot}\; x^{m+\mathfrak{a}_1} y^{\mathfrak{b}_1} z^{\mathfrak{c}_1} \cdot\cdot \\ & + \mathfrak{S}\frac{\mathfrak{b}_2!}{(n+\mathfrak{b}_2)!}\, a_{\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \cdot\cdot}\; x^{\mathfrak{a}_2} y^{n+\mathfrak{b}_2} z^{\mathfrak{c}_2} \cdot\cdot \\ & + \mathfrak{S}\frac{\mathfrak{c}_3!}{(p+\mathfrak{c}_3)!}\, a_{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \cdot\cdot}\; x^{\mathfrak{a}_3} y^{\mathfrak{b}_3} z^{p+\mathfrak{c}_3} \cdots + \cdots, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{b}_1 < n$, $\mathfrak{c}_1 < p, \cdot\cdot$, $\mathfrak{a}_2 < m$, $\mathfrak{c}_2 < p, \cdot\cdot$, $\mathfrak{a}_3 < m$, $\mathfrak{b}_3 < n, \cdot\cdot, \cdots$.

Die Bestimmung der willkürlichen Vorzahlen für ein bestimmtes Integral geschieht hier ganz entsprechend wie bei der Integration von Diffen mit einer Veränderlichen.

390. **Erklärung. Die Eckdiffe zweier oder mehrer Veränderlichen heisen ergänzbare Eckdiffe, wenn ſie ſich durch Umformung bez. durch Einführung neuer Veränderlicher in Ergänzungsdiffe umwandeln lassen.**

Wir werden dieſe Art der Eckdiffe in den folgenden Paragraphen kennen lernen und besprechen.

391. **Satz. Wenn die r gegebenen Teildiffe Mitteldiffe ſind, ſo kann man von denſelben fast nie zu einer ursprünglichen Folge zurückkehren, ſie ſind dann nicht integrabel. In jedem Falle giebt es keine bestimmte Integre, ſondern man kann noch höchst willkürliche Folgen der Form $\mathfrak{S}w_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \cdot\cdot}\, x^{\mathfrak{a}_1} y^{\mathfrak{b}_1} z^{\mathfrak{c}_1} \cdots + \mathfrak{S}w_{\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \cdot\cdot}\, x^{\mathfrak{a}_2} y^{\mathfrak{b}_2} z^{\mathfrak{c}_2} \cdots$ $+ \mathfrak{S}w_{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \cdot\cdot}\, x^{\mathfrak{a}_3} y^{\mathfrak{b}_3} z^{\mathfrak{c}_3} \cdots + \cdots$ hinzufügen, ſofern nur, wenn m, n, p, ··**

die kleinsten Stufen der Teildiffe nach x, nach y, nach z,··· ſind, entweder $\mathfrak{a}_1 < m$, $\mathfrak{b}_2 < n$, oder $\mathfrak{c}_3 < p$,··· ist.

Beweis: a. Für die Mitteldiffe zweier Veränderlichen.

Sei der eine Teildiff $\underset{x}{d}^m \underset{y}{d}^n f_0(x, y) = \varphi_0(x, y)$ der andre Teildiff $\underset{x}{d}^p \underset{y}{d}^q f_0(x, y) = \psi_0(x, y)$ und ſei $m > p$, und zwar $m = p + r$, ſo kann man durch weitere Ableitung von Diffen aus $\underset{x}{d}^p \underset{y}{d}^q f_0(x, y)$ zu $\underset{x}{d}^m \underset{y}{d}^q f_0(x, y) = \underset{x}{d}^r \psi_0(x, y)$ übergehen. Sei nun ferner $q > n$ und ſei $q = n + s$, ſo kann man durch weitere Ableitung von $\underset{x}{d}^m \underset{y}{d}^n f_0(x, y)$ zu $\underset{x}{d}^m \underset{y}{d}^q f_0(x, y) = \underset{y}{d}^s \varphi_0(x, y)$ übergehen. Sollten nun beide Teildiffe derſelben ursprünglichen Folge entsprechen, ſo müsste $\underset{x}{d}^r \psi_0(x, y) = \underset{x}{d}^m \underset{y}{d}^q f_0(x, y)$ $= \underset{y}{d}^s \varphi_0(x, y)$ ſein. Da dies im Allgemeinen nicht der Fall ſein kann, ſo giebt es dann alſo auch nicht eine ursprüngliche Folge, welcher jene beiden Teildiffe entsprechen, dieſelben ſind alſo dann nicht integrabel.

In jedem Falle giebt es keine bestimmte Integre, vielmehr kann man einer jeden ſolchen Integren die höchst willkürlichen Folgen $\mathbf{S} w_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} + \mathbf{S} w_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}}$ zufügen, ſofern nur $\mathfrak{a} < p$ und $\mathfrak{b} < n$ bleibt.

b. Für die Mitteldiffe mehrer Veränderlichen.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem ersten Teile des Beweiſes, wenn man ſchrittweiſe von 2 zu mehr Veränderlichen vorgeht.

15. Die Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen.

a. Die allgemeinen Sätze.

Bei den Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen laſsen die bisherigen Lehrbücher es noch an Strenge der Form fehlen. Die Herren Mathematiker benutzen ohne Bedenken die Formeln $\frac{dy}{dx} f_0(x, y) = \varphi_0(x, y)$ und $dy\, f_0(x, y) = dx\, \varphi_0(x, y)$, obwohl dieſelben weder gelten, wenn $dx = 0$, noch wenn $dx \gtrless 0$ ist, und halten es gar nicht der Mühe wert, ihr Verfahren zu rechtfertigen und zu beweiſen. Ihnen genügt es, wenn

fie damit nur rechnen und neue Sätze bez. Formeln ableiten können. Will man hier zu wissenschaftlicher Strenge der Form kommen, fo muss ein neuer Weg eingeschlagen werden.

Es wird zweckmässig fein, den Gang, der hierfür einzuschlagen ist, wenn man der Strenge der Form nichts vergeben will, einleitend anzugeben, und dadurch die Sätze vorzubereiten. Nach Satz 95 ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}y = \underset{u}{\mathfrak{d}}y \cdot \underset{x}{\mathfrak{d}}u$ und nach Satz 96 ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}u = \frac{1}{\underset{u}{\mathfrak{d}}x}$, mithin ist $\underset{x}{\mathfrak{d}}y = \underset{u}{\mathfrak{d}}y : \underset{u}{\mathfrak{d}}x$. Führt man nun, fofern alle Diffe nach einer und derfelben Veränderlichen u genommen werden, für die Diffe nach u die einfachen Zeichen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z, \cdots$ ein, fo dass alfo $\mathfrak{d}x$ (gelefen Diff von x) das einfachere Zeichen für $\underset{u}{\mathfrak{d}}x$ ist, oder mit andern Worten $\mathfrak{d}x = \underset{u}{\mathfrak{d}}x$ gefetzt ist, und dass ebenfo $\mathfrak{d}y = \underset{u}{\mathfrak{d}}y$, $\mathfrak{d}z = \underset{u}{\mathfrak{d}}z, \cdots$ gefetzt ist, fo haben wir

$\underset{x}{\mathfrak{d}}y = \underset{u}{\mathfrak{d}}y : \underset{u}{\mathfrak{d}}x = \frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x}$, alfo einen einfachen Bruch zweier Diffe (Differentialquotienten), für welchen alle Gefetze der Zahlenlehre gelten.

Dann kann man alfo auch statt $\underset{x}{\mathfrak{d}}y f_0(x, y) + \varphi_0(x, y) = 0$, auch

(*) $\frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x} f_0(x, y) + \varphi_0(x, y) = 0$ und alfo auch $\mathfrak{d}y\, f_0(x, y) + \mathfrak{d}x\, \varphi_0(x, y) = 0$

schreiben.

Für das Integern hat man ferner nach Satz 211

$\left(\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1} f_0 y\right) \underset{x}{\mathfrak{d}}y = \underset{y}{\mathfrak{d}}^{-1} f_0 y$. Hieraus folgt, wenn man in der obigen Gleichung (*) $\underset{u}{\mathfrak{d}}y = \mathfrak{d}y$ und $\underset{u}{\mathfrak{d}}x = x$ einführt, und die Integre nimmt, alfo

$\left(\underset{u}{\mathfrak{d}}^{-1} f_0(x, y)\right) \underset{u}{\mathfrak{d}}y + \left(\underset{u}{\mathfrak{d}}^{-1} \varphi_0(x, y)\right) \underset{u}{\mathfrak{d}}x = 0$, fo wird hieraus

$\underset{y}{\mathfrak{d}}^{-1} f_0(x, y) + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1} \varphi_0(x, y) = 0.$

Nach diefen Vorbemerkungen gehen wir zur Entwicklung der Sätze über.

392. **Erklärung. Bei den Diffen (Differentialquotienten) von zwei oder mehren Veränderlichen nennen wir, fofern alle diefe Diffe nach einer und derfelben Veränderlichen genommen find, die Diffe nach diefer Veränderlichen einfache Diffe und bezeichnen diefe durch das einfache Diffzeichen, $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z, \cdots$ gelefen Diff von x, Diff von y u. f. w.**

Bemerkt fei nochmals, dass diefes einfache Diffzeichen immer nur das Zeichen eines Differentialquotienten $\underset{u}{\mathfrak{d}}x$ ist und bleibt.

393. **Satz. Die einfachen Diffe $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z, \cdots$ find gleich den Diffen (Differentialquotienten) $\underset{u}{\mathfrak{d}}x$, $\underset{u}{\mathfrak{d}}y$, $\underset{u}{\mathfrak{d}}z, \cdots$, fofern alle Diffe nach u genommen find.**

Beweis. Unmittelbar nach 392.

Satz. Der Diff von einer Veränderlichen nach einer zweiten 394.
Veränderlichen ist gleich dem einfachen Diff von der ersten geteilt durch den einfachen Diff von der zweiten Veränderlichen; für diesen Bruch gelten alle Gesetze der Zahlenlehre oder

$$\underset{x}{d}y = (\underline{d}y) : \underline{d}x = \frac{\underline{d}y}{\underline{d}x}.$$

Beweis. $\underset{x}{d}y = \left(\underset{u}{d}y\right) \cdot \underset{x}{d}u$ (nach 95)

$= \left(\underset{u}{d}y\right) : \underset{u}{d}x$ (nach 96)

$= \underline{d}y : \underline{d}x = \frac{\underline{d}y}{\underline{d}x}$ (nach 392).

Für diesen Bruch gelten, wie für jeden Bruch, alle Gesetze der Zahlenlehre nach Zahlenlehre 180—187.

Bemerkt möge hier werden, dass dieser Satz nur für den ersten Diff, nicht aber für höhere Diffe gilt. Bereits $\underset{x}{d}^2 y = \underset{x}{d}\left(\underset{x}{d}y\right) = \underset{x}{d}(\underline{d}y : \underline{d}x) = \underset{x}{d}\left(\underset{u}{d}y : \underset{u}{d}x\right)$ giebt nach 94 gedifft, durchaus nicht $\underset{x}{d}^2 y = \underline{d}^2 y : \underline{d}^2 x$.

Erklärung. Eine Diffgleichung (Differentialgleichung) 395.
erster Ordnung von zwei oder mehren Veränderlichen heist eine Summe von Gliedern, deren jedes das Zeug oder Produkt ist einer Folge (Funktion) dieser Veränderlichen und des ersten Diffs von einer Veränderlichen nach einer Veränderlichen oder
Die Form derselben ist

$$\underset{x}{d}x f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}y f_{02}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}z f_{03}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = 0.$$

Satz. Jeder Diffgleichung erster Ordnung mehrer Veränder- 396.
lichen kann man die Form einer Summe geben, in der jedes Glied das Zeug oder Produkt ist einer Folge (Funktion) der Veränderlichen und des einfachen Diffs einer der Veränderlichen oder
Man kann ihr die Form geben

$$\underline{d}x f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underline{d}y f_{02}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underline{d}z f_{03}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = 0.$$

Beweis. Nach 395 ist die Form dieser Gleichung

$$\underset{x}{d}x f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}y f_{02}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}z f_{03}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = 0.$$

Nach 86 ist aber $\underset{x}{d}x = 1$, und nach 394 ist $\underset{x}{d}y = \frac{\underline{d}y}{\underline{d}x}$, $\underset{x}{d}z = \frac{\underline{d}z}{\underline{d}x}, \cdots$. Führt man diese Werte in die Gleichung ein und ver-

vielfacht oder multiplizirt man die Gleichung dann mit $\underline{d}x$, ſo ergiebt ſich unmittelbar der Satz.

397. **Satz. Die erste Integre nach x einer Diffgleichung (Differentialgleichung) erster Ordnung von zwei oder mehren Veränderlichen erhält man, indem man in jedem Gliede der Diffgleichung statt des ersten Diffs nach x die erste Integre nach x ſetzt oder**

$$\frac{d}{x}^{-1}\left[\frac{d}{x}x\,f_{01}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{x}y\,f_{02}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{x}z\,f_{03}(x,y,z,\cdots)+\cdots\right]$$

$$=\frac{d}{x}^{-1}f_{01}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{y}^{-1}f_{02}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{z}^{-1}f_{03}(x,y,z,\cdots)+\cdots.$$

Beweis. Nach 192 ist

$$\frac{d}{x}^{-1}\left[\frac{d}{x}x\,f_{01}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{x}y\,f_{02}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{x}z\,f_{03}(x,y,z,\cdots)+\cdots\right]$$

$$=\frac{d}{x}^{-1}\frac{d}{x}x\,f_{01}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{x}^{-1}\frac{d}{x}y\,f_{02}(x,y,z,\cdots)$$

$$+\frac{d}{x}^{-1}\frac{d}{x}z\,f_{03}(x,y,z,\cdots)+\cdots$$

$$=\frac{d}{x}^{-1}f_{01}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{y}^{-1}f_{02}(x,y,z,\cdots)+\frac{d}{z}^{-1}f_{03}(x,y,z,\cdots)+\cdots,$$

da $\frac{d}{x}x=1$ nach 86, und da $\frac{d}{x}^{-1}(f_0y)\frac{d}{x}y=\frac{d}{y}^{-1}f_0y$ nach 211 ist.

Für die weitern Betrachtungen der Diffgleichungen wird es erforderlich ſein, die Bedingungen zu unterscheiden, unter welchen die Veränderlichen unabhängig von einander ſind, und die, unter welchen ſie abhängig von einander ſind.

398. **Erklärung. Unabhängig von den Veränderlichen t, u, v, ·· heisen die Veränderlichen x, y, z, ··, wenn ſich die letztern nicht als Folgen oder Funktionen der erstern darstellen lassen.**

Abhängig von den Veränderlichen t, u, v, ·· heisen die Veränderlichen x, y, z, ··, wenn ſich letztere als Folgen oder Funktionen der erstern darstellen lassen.

Unabhängig von einander oder frei heisen die Veränderlichen, wenn ſich nicht eine derſelben als Folge oder Funktion der andern darstellen lässt.

399. **Satz. Wenn eine Veränderliche abhängig ist von einer andern Veränderlichen, ſo ist auch die zweite abhängig von der ersten, und wenn eine Veränderliche unabhängig ist von einer zweiten, ſo ist auch die zweite unabhängig von der ersten.**

Beweis. Unmittelbar aus der Erklärung 398. Denn wenn $y=f_0x$, ſo kann auch daraus $x=\varphi_0 y$ abgeleitet werden; dagegen

wenn y nicht einer Folge (Funktion) von x gleichgeſetzt werden kann, ſo darf auch nicht $x = \varphi_0 y$ geſetzt werden, da hieraus $y = f_0 x$ abgeleitet werden könnte.

b. Die Diffgleichungen abhängiger Veränderlicher und die Einführung neuer Veränderlicher.

Die Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen bieten, wie wir geſehen haben, vielfach Schwierigkeiten, welche ſich nur beſeitigen lassen, indem man neue Veränderliche einführt. Es kommt dies grosenteils daher, dass man Veränderliche zu Grunde gelegt hat, welche ſelbst Folgen (Funktionen) anderer Veränderlichen ſind, und welche daher die Geſetze nicht in ihrer einfachen Gestalt erkennen lassen. Durch Einführung neuer Veränderlicher kann dieſem Uebel vielfach abgeholfen werden und gelingt die Löſung von Aufgaben, welche nach den frühern Sätzen unlösbar erschienen.

In den früheren §§ haben die Formeln die Form gehabt $\mathfrak{d}^m_x f_0 x = \varphi_0 x$, wo der Diff x die eine Seite, eine Folge von x die andere Seite der Gleichung bildete. Bei den Diffgleichungen aber erscheinen ein oder mehre Diffe als Glieder oder auch als Fache (Factoren) eines Gliedes in einer Gleichung; die Gleichung kann dann erst gelöſt werden, wenn es gelingt, die Gleichung ſo umzugestalten, dass man ſie auf eine der früheren Formen zurückführt.

Für dieſe Umgestaltung ist die Einführung neuer Veränderlicher oft ſehr nützlich; man kann den Diffen (Differentialquotienten) eine einfachere Gestalt geben, ohne dass der Strenge der Form dadurch etwas vergeben wird.

Erklärung. Gleichstufig oder homogen heisen die Folgen (Funktionen) zweier oder mehrer Veränderlichen, wenn in der auf Null gebrachten Summe derſelben in allen Gliedern die Summe der Stufen (Exponenten) aller Veränderlichen gleich ist, oder wenn 400.
$\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\dots}{S} a\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \cdots \overset{*}{=} 0,$ *wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots = m.$

Satz. Jede Diffgleichung (Differentialgleichung) zweier Veränderlichen mit gleichstufigen Folgen ist durch Einführung einer neuen Veränderlichen trennbar und lässt ſich integern und zwar ist, wenn $y = xz$ geſetzt wird und $\mathfrak{d}x S(a_{\mathfrak{a}} x^{m-\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{a}}) + \mathfrak{d}y(S b_{\mathfrak{b}} x^{m-\mathfrak{b}} y^{\mathfrak{b}}) = 0$ gegeben ist, die Integre $\mathfrak{d}^{-1}_x \frac{1}{x} + \mathfrak{d}^{-1}_z \frac{S b_{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{b}}}{S a_{\mathfrak{a}} z^{\mathfrak{a}} + S b_{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{b}+1}} = 0.$ 401.

Beweis. Gegeben ist $\mathfrak{d}x(S a_{\mathfrak{a}} x^{m-\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{a}}) + \mathfrak{d}y(S b_{\mathfrak{b}} x^{m-\mathfrak{b}} y^{\mathfrak{b}}) = 0.$

Setzen wir $y = xz$, alſo $\mathfrak{d}y = z\mathfrak{d}x + x\mathfrak{d}z$, ſo ist

$\mathfrak{d}x(S a_{\mathfrak{a}} x^m z^{\mathfrak{a}}) + (S b_{\mathfrak{b}} x^m z^{\mathfrak{b}})(z\mathfrak{d}x + x\mathfrak{d}z) = 0,$

und dieſe durch x^m geteilt, da $x \gtrless 0$ ist

$(S a_{\mathfrak{a}} z^{\mathfrak{a}} + S b_{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{b}+1})\mathfrak{d}x + x(S b_{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{b}})\mathfrak{d}z = 0$

dies durch $(S a_{\mathfrak{a}} z^{\mathfrak{a}} + S b_{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{b}+1})\, x$ geteilt, ergiebt

$\frac{1}{x}\mathfrak{d}x + \frac{Sb_\mathfrak{b} z^\mathfrak{b}}{Sa_\mathfrak{a} z^\mathfrak{a} + Sb_\mathfrak{b} z^{\mathfrak{b}+1}}\mathfrak{d}z = 0$, mithin nach 397, die Diffe nach x genommen, $\underset{x}{\mathfrak{d}^{-1}} \frac{1}{x} + \underset{z}{\mathfrak{d}^{-1}} \frac{Sb_\mathfrak{b} z^\mathfrak{b}}{Sa_\mathfrak{a} z^\mathfrak{a} + Sb_\mathfrak{b} z^{\mathfrak{b}+1}} = 0.$

402. **Erklärung. Folgen, welche fich gleichstufig machen lassen, nennen wir gleichstufbare Folgen.**

Da die Folgen für jeden Wert der Veränderlichen gelten müssen, so kann man fie in manchen Fällen dadurch gleichstufig machen, dass man statt der gegebenen neue Veränderliche einführt.

403. **Satz. Die Gleichung $(a + bx + cy)\,\mathfrak{d}x + (e + fx + gy)\,\mathfrak{d}y = 0$ lässt fich, fofern $bg \gtrless cf$ ist, gleichstufig machen, indem man $x = t + \alpha$ und $y = u + \beta$ fetzt, wo α und β Beständige find. — Sie lässt fich getrennt machen, wenn $bg = cf$ ist.**

Im erstern Falle fetze $\alpha = \frac{ec - ag}{bg - cf}$, $\beta = \frac{af - eb}{bg - cf}$; dann ist

$(bt + cu)\,\mathfrak{d}t + (ft + gu)\,\mathfrak{d}u = 0.$

Im zweiten Falle fetze $bx + cy = z$, dann wird

$$\mathfrak{d}x + \frac{(eb + fz)\,\mathfrak{d}z}{abc - eb^2 + (bc - fb)\,z} = 0.$$

Beweis. 1. Setze $x = t + \alpha$, $y = u + \beta$, dann wird die Gleichung $(a + b\alpha + c\beta + bt + cu)\,\mathfrak{d}t + (e + f\alpha + g\beta + ft + gu)\,\mathfrak{d}u = 0.$ Setze

$a + b\alpha + c\beta = 0$, $e + f\alpha + g\beta = 0$, so wird $\alpha = \frac{ec - ag}{bg - cf}$, $\beta = \frac{af - eb}{bg - cf}$.

Dann ist die Gleichung gleichstufig. Aber wenn $bg - cf = 0$ ist, fo ist diefe Einführung unbrauchbar.

2. In diefem Falle wird die obige Gleichung, da $bg = cf$ oder $\frac{f}{b} = \frac{g}{c}$ ist, $a\mathfrak{d}x + e\mathfrak{d}y + (bx + cy)(\mathfrak{d}x + \frac{f}{b}\mathfrak{d}y) = 0.$ Setze hier $bx + cy = z$, oder $y = \frac{z}{c} - \frac{b}{c}x$, also $\mathfrak{d}y = \frac{\mathfrak{d}z}{c} - \frac{b}{c}\mathfrak{d}x$ so erhalten wir

$a\mathfrak{d}x + \frac{e}{c}\mathfrak{d}z - \frac{eb}{c}\mathfrak{d}x + z(\mathfrak{d}x + \frac{f}{bc}\mathfrak{d}z - \frac{f}{c}\mathfrak{d}x) = 0$ oder mit bc multiplizirt $(abc - eb^2 + z(bc - fb)\,\mathfrak{d}x + (eb + fz)\,\mathfrak{d}z = 0$

$$\mathfrak{d}x + \frac{(eb + fz)\,\mathfrak{d}z}{abc - eb^2 + (bc - fb)\,z} = 0,$$

3. Wird in diefem Falle bc — fb = 0, d. h. f = c, fo folgt

$$\underset{}{d}x + \frac{(eb + cz)\,\underset{}{d}z}{abc - eb^2} = 0, \text{ alfo } x + \frac{2ebz + cz^2}{2(abc - eb^2)} = 0.$$

Ganz in gleicher Weise lassen sich Gleichungen der Form

$$(a + bx + cy)\,\underset{x}{d^m} + (e + fx + gy)\,\underset{y}{d^m} = 0$$

gleichstufig machen.

Die Diffgleichungen von einander abhängiger Veränderlicher haben für die strengen Wissenschaften einen nur geringen Wert und find vielfach bearbeitet; hier übergehe ich diefelben.

Viel wichtiger find die Diffgleichungen von einander unabhängiger Veränderlicher, zu denen wir uns jetzt wenden.

c. Die Diffgleichungen von einander unabhängiger Veränderlicher.

Satz. Wenn zwei Veränderliche unabhängig von einander find, fo find auch alle Diffe der einen nach der andern entweder Null oder Eins geteilt durch Null, und umgekehrt, wenn alle Diffe der einen Veränderlichen nach der andern Null oder Eins geteilt durch Null find, fo find die beiden Veränderlichen unabhängig von einander. 404.

Beweis. Wenn $\underset{x}{d^a}\,y = c$ wäre, wo $c \gtrless 0$ und auch $\gtrless \frac{1}{0}$, fo folgte $y = \underset{x}{d^{-a}}\,c = \frac{c}{a!}x^a$ (nach 195), d. h. es wäre y gleich einer Folge von x, alfo nicht unabhängig von x. Wenn alfo y unabhängig von x fein foll, fo muss $\underset{x}{d}\,y$ entweder Null oder Eins geteilt durch Null fein. Sei $\underset{x}{d}\,y = 0$, so ist $\underset{y}{d}\,x = \frac{1}{0}$ nach 96, fei $\underset{x}{d}\,y = \frac{1}{0}$, fo ist $\underset{y}{d}\,x = 0$.

Satz. In jeder Diffgleichung erster Ordnung = 0, in welcher die Veränderlichen unabhängig von einander sind, ist jedes Glied gleich Null oder wenn x, y, z · · · unabhängig von einander find und wenn 405.

$$\underset{x}{d}x\, f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}y\, f_{02}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}z\, f_{03}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = 0 \text{ ist, fo ist}$$

$$f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0,\quad f_{02}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0,\quad f_{03}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Beweis. Wenn

$$\underset{x}{d}x\, f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}y\, f_{02}(x, y, z, \cdot\cdot) + \underset{x}{d}z\, f_{03}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = 0$$

ist, fo ist, da y, z, · · unabhängig von x find, nach 400 $\underset{x}{d}\,y = 0$, $\underset{x}{d}\,z = 0, \cdot\cdot$, mithin ist, da nach 86 $\underset{x}{d}\,x = 1$ ist, $f_{01}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0$.

Ebenſo folgt, da auch x, z, ·· unabhängig von y ſind, $f_{o2}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0$, ebenso, da auch x, y, u, ·· unabhängig von z ſind, $f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0$ u. s. w.

406. **Satz. Für jede Diffgleichung erster Ordnung = 0, in welcher die Veränderlichen unabhängig von einander ſind, $\varphi_o(x, y, z, \cdot\cdot) = \frac{d}{x}x\, f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) + \frac{d}{x}y\, f_{o2}(x, y, z, \cdot\cdot) + \frac{d}{x}z\, f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = 0$, erhält man die Integren**

$$\frac{d}{x}^{-1} f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0,\ \frac{d}{y}^{-1} f_{o2}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0,\ \frac{d}{z}^{-1} f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0.$$

Beweis. Nach 401 folgt aus der gegebenen Gleichung die Formel $\varphi x = \frac{d}{x}x\, f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) = 0$, mithin ist

$$\frac{d}{x}^{-1}\varphi_o(x, y, z, \cdot\cdot) = \frac{d}{x}^{-1}\left[\frac{d}{x}x\, f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot)\right] = \frac{d}{x}^{-1} f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) \text{ u. s. w.}$$

407. **Satz. Für die Gleichungen aller von einander unabhängigen Grösen gelten die Geſetze des ersten Abschnittes der Ausdehnungslehre.**

Beweis. Die Erklärungen ſind in beiden Wissenschaften ganz dieſelben und folgen daher auch dieſelben Geſetze, da auch für beide Wissenschaften alle Geſetze der Zahlenlehre gelten.

Wegen der weiteren Sätze über die Gleichungen mit mehren von einander unabhängigen Grösen kann ich mich auf die Ausdehnungslehre beziehen, wo die Sätze über Einführung neuer Veränderlicher und über das Gebiet von n freien Grösen vollständig erörtert ist. Ebenſo findet man die weiteren Sätze über die Diffe (Differentialquotienten) und über die Integren und Integrale in der Erweiterungslehre und kann hier darauf verwieſen werden.

Vierter Abschnitt der Folgelehre: Die erweiternde Folgelehre oder die Lehre von den erweiterten Folgen oder Funktionen.

Erklärung. Erweiterte Folgen oder Funktionen werden die Folgen oder Funktionen genannt, für welche ganz neue, eigentümliche Gesetze gelten. 408.

Solche erweiterten Folgen oder Funktionen sind die Fourierschen, die Bernouillischen, die Gamma, die elliptischen Funktionen u. s. w. Es sind die Gesetze derselben von groser Wichtigkeit.

Bei meinem vorgerückten Alter aber und bei den vielen mir noch anderweitig vorliegenden Arbeiten muss ich es mir versagen, auf dieselben einzugehen und dies um so mehr, da ich hier noch nicht neue Wege eingeschlagen habe.

Die

Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grösen

der

niedere Zweig der Synthese.

Dritter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

Vorwort.

Die Geschichte der Ausdehnungslehre oder der Wissenschaft von den extenſiven Grösen ist eine ſehr kurze.

Die Idee derſelben ist zuerst um 1700 n. Chr. von Leibniz angeregt. Er nennt dieſelbe eine geometrische Charakteristik und rühmt von ihr, dass ſie für jede Aufgabe der Raumlehre zugleich Löſung, Zeichnung und Beweis auf einfache Weiſe gebe, dass ſie ebenſo die Bewegungslehre oder Mechanik neu begründe und für die Erforschung des innern Baues der Körper Groses leisten müsse, ja dass ſie auch auf andere Dinge der Ausenwelt die reichsten Anwendungen zulasse.

Nach Leibniz hat dieſe Idee lange geruht.

Zwar hat mein Vater, der Professor Justus Grassmann „Raumlehre Teil II“ Berlin 1824 Seite 194 und ferner „Trigonometrie“ Berlin 1835 Seite 10 das Rechteck bezüglich das Parallelogramm als das wahre geometrische Produkt und die Konstruktion desſelben als die eigentliche geometrische Multiplikation aufgefasst. Zwar hat „Möbius barycentrischer Kalkül“ Leipzig 1827 die Addition der Punkte und Bellavitis in „Annali delle scienze de regno Lombardo-Veneto“ 1835 und 1837 die geometrische Addition der Strecken, ſowie unabhängig von ihm auch „Möbius Mechanik des Himmels, Leipzig 1843“ gleichfalls die geometrische Addition der Strecken gelehrt. Aber alle dieſe Verſuche blieben doch nur vereinzelt und kamen nicht zu einer allgemeinen Auffassung der Sache, ſondern blieben nur in einzelnen geometrischen Betrachtungen befangen.

Der erste, der die Idee der Ausdehnungslehre als eines neuen Zweiges der reinen Mathematik aufgefasst und ausgebildet hat, ist mein Bruder

Hermann Grassmann gewesen. Derselbe machte im Winter 1839 bis 1840 eine grose Arbeit über die Ebbe und Flut, studirte dazu Lagrange mécanique analytique und Laplace mécanique céleste, versuchte bei diesen Arbeiten die Sache durch Addition bez. Multiplikation der Bewegungen zu vereinfachen, und kam so zunächst zu einer Reihe von Gesetzen über Addition und Multiplikation von Strecken bez. Bewegungen. Er verfolgte die Sache in den folgenden Jahren weiter und gab „Die lineale Ausdehnungslehre“ Leipzig 1844 heraus. In diesem Werke geht er noch vorwiegend von geometrischen Grösen, bez. statischen Momenten aus und sucht daraus die Gesetze der neuen Wissenschaft zu gewinnen. Auch die Preisschrift „Geometrische Analyse“, geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik“ Leipzig 1847 steht noch ganz auf diesem Standpunkte. Am 15. September 1845 lehrte nun auch Saint-Venant in Paris, ohne das Werk des Bruders zu kennen, die geometrische Multiplikation der Strecken in „Comptes rendus“ Paris 1845, Tom. 21, S. 620 ff. Der Bruder sandte daher zwei Exemplare seines Werkes an Cauchy in Paris, eins für Cauchy, eins für Saint-Venant; der Empfang der Bücher ist bestätigt. Cauchy hat dadurch angeregt, ähnliche Betrachtungen angestellt und demnächst „Comptes rendus“ Paris 1853 eine Methode veröffentlicht, um vermittels gewisser symbolischer Grösen, welche er clefs algébriques nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in H. Grassmann Ausdehnungslehre von 1844 (§ 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Er ist dabei offenbar in dem Glauben gewesen, dass diese Methode von ihm herrühre, indem er vergessen hatte, woher er die Anregung zu dieser Methode erhalten hatte. Der Bruder glaubte es der Sache schuldig zu sein, dass er eine Prioritäts-Reklamation an die Pariser Akademie sende; dieselbe ist, wie die „Comptes rendus Tom. 38, S. 741“ berichten, im April 1854 einer Kommission zur Prüfung und Berichterstattung übergeben; allein weder Cauchy, noch diese Kommission haben ein Wort darüber verlauten lassen. Es ist die Priorität des Bruders also unzweifelhaft.

Im Jahre 1847 verbanden sich nun die Brüder Hermann und Robert Grassmann, um die Ausdehnungslehre, unabhängig von der Geometrie, als eignen Zweig der reinen Mathematik in strenger Form durch Formentwicklung abzuleiten und bis zu den Grenzen ihres Geltungsgebiets zu entwickeln. Das damals ausgearbeitete Heft von 132 Seiten ist noch heute im Besitze des Verfassers. In dieser gemein-

ſamen Arbeit behandelten ſie zunächst die Gebietslehre bis zu den Gebieten n ter Stufe und der Unabhängigkeit derſelben von den ursprünglichen Einheiten und gewannen hier bereits den Satz, dass die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Stufenzahl des beide umfassenden oder des verbindenden Gebietes plus der Stufenzahl des beiden gemeinschaftlichen Gebietes ſei.

Sie leiteten demnächst die verschiedenen Arten der Multiplikation ab und kamen bereits damals zu den drei Arten derſelben: der Flachung, welche ſie äusere Multiplikation nannten, der Schattung oder der innern Multiplikation und der additiven (algebraischen) Multiplikation.

Bei der Flachung oder äusern Multiplikation leiteten ſie zunächst die Geſetze der Flachung, namentlich die Geſetze über den Zeichenwechſel bei Vertauschung der Fache oder Faktoren, ſowie die Geſetze der linealen Aenderung ab, behandelten dann das Produkt zweier Grösen höherer Stufen oder die Flache der Flache und die Summen dieſer Flache und entwickelten die Geſetze der bezüglichen Flachung, wie die der Ergänzungen zum Hauptgebiete und die der Zurückleitung auf ein Gebiet.

Bei der innern Multiplikation (der Schattung) leiteten ſie die Beziehung der innern Multiplikation zu der Multiplikation der Ergänzungen ab, ebenſo die Sätze, wann das innere Produkt Null wird, ſowie den Satz über die Gleichheit der innern Quadrate, oder mit andern Worten den Satz für die Einführung der Winkel.

Bei der additiven Multiplikation (der Flechtung) endlich entwickelten ſie die Geſetze derſelben, führten demnächst den Quotienten ein, leiteten die Geſetze für die Diviſion ab, wie für die Affinität und die Multiplikation der Quotienten, und gelangten zu den Potenzen der Quotienten wie zu den Produkten mit einer und mehren Lüken und zu dem polynomischen Lehrſatze für dieſe Art der Produkte. Fassen wir demnach Alles zuſammen, ſo waren in dieſem Jahre bereits alle Zweige der Ausdehnungslehre in strenger Form entwickelt, wenn gleich die Form noch vielfach zu wünschen übrig lies und die Details dieſer Zweige teilweiſe noch nicht entwickelt waren. Welchen Anteil jeder der beiden Brüder an den Reſultaten dieſer gemeinſamen Arbeit hatte, lässt ſich nicht mehr genau feststellen, indem bald dieſer bald jener entscheidend eingriff und Schwierigkeiten überwand. Jeder von beiden Brüdern fühlte, dass er allein erlahmen würde, wenn er die Ideen mit eiſerner Konſequenz bis in die letzten möglichen Operationen verfolgen wollte, und dass ſie nur mit vereinten Kräften die Sache

zwingen könnten. Es haben eben beide zusammengewirkt und jeder seinen Teil beigetragen. Es will aber der Verfasser, Robert Grassmann, indem er dies Verhältniss darlegt, keineswegs für sich einen Anteil an der Erfindung der Ausdehnungslehre vindiciren: diese Erfindung ist und bleibt das alleinige geistige Eigentum von Hermann Grassmann. Dem Robert Grassmann kommt nur das Verdienst zu, auf die Allgemeinheit der Auffassung und auf die Strenge der Form hingewirkt und dadurch an der Lösung der Schwierigkeiten mitgewirkt zu haben.

Wie viel Wert beide Brüder auf diese Art des Zusammenarbeitens legten, das zeigt sich darin, dass sie, sobald es wieder möglich war, nochmals in den Jahren 1855 und 1856 diese Art des Zusammenwirkens versuchten. Aber sie waren inzwischen zu verschiedene Wege gegangen, die bisherige Form des Zusammenarbeitens wollte nicht mehr gelingen. Sie führten daher die neue Form ein, dass der eine Bruder die eine Woche die Ausarbeitung selbständig vornahm, diese Arbeit vortrug, der andere Bruder dann die Kritik übte und seinerseits eine Woche die selbständige Arbeit machte und so umschichtig. Die Arbeit ward dadurch sehr wesentlich gefördert. Als diese Arbeit beendet war, erkannten die beiden Brüder, dass die Arbeit soweit vollendet sei, als sie durch gemeinsames Arbeiten gefördert werden könne. Sie teilten sich daher die weiteren Arbeiten, wobei nur bemerkt werden möge, dass sie auch die Zahlenlehre, die Logik und die Kombinationslehre in ganz gleicher Weise gemeinsam bearbeitet hatten. Hermann übernahm die Herausgabe der beiden mathematischen Zweige: der Arithmetik und der Ausdehnungslehre, Robert übernahm die Herausgabe der beiden philosophischen Zweige: der Logik und der Kombinationslehre.

Hermann Grassmann hat zuerst seine Aufgabe gelöst. Er gab 1860 „Die Arithmetik“ und 1862 „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form“ Berlin bei A. Enslin heraus. In diesem Werke sind alle Zweige der Ausdehnungslehre und auch die Anfänge der Funktionenlehre der ausgedehnten Grösen oder der Erweiterungslehre dargestellt.

Viel später als der Bruder Hermann ist Robert Grassmann dazu gekommen, seine Aufgabe zu lösen. Erst im Jahre 1872 gab derselbe die Logik und die Kombinationslehre und auserdem die Formenlehre oder Mathematik, eine gedrängte kurze Uebersicht der fünf Zweige: der Grösenlehre, der Logik, der Kombinationslehre, der Zahlenlehre und der Ausdehnungslehre heraus, in welcher letztern er die mannig-

fachen Beziehungen darstellt, welche diefe Zweige unter einander bieten.

Die Ausdehnungslehre hat durch die Ausgabe des Werkes H. Grassmann „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form“ Berlin 1862 ihre Ausbildung als eigener Zweig der Mathematik erfahren. Leider ist der Bruder Hermann Grassmann bereits 1877 gestorben, das Werk gegenwärtig vergriffen. Eine neue Ausgabe desfelben durch den Sohn des Verstorbenen ist in Vorbereitung begriffen; fonst hat es Niemand unternommen, diefen wichtigen Zweig der Mathematik auszuarbeiten und neu darzustellen.

In der Mathematik durfte diefer wichtige Hauptzweig der Mathematik mit feinem höhern Zweige, der Erweiterungslehre, jedenfalls nicht fehleu. Ueberdies war der Verfasser durch die gemeinfamen Arbeiten mit feinem Bruder Hermann Grassmann, wie wohl nur wenige andere eingeweiht in die Gedanken und in die Entwicklung diefes Buches, hatte wiederholt an dem Zweige gearbeitet und konnte diefem Hauptzweige der Mathematik durch die Vergleiche und durch die Heranziehung der andern Hauptzweige der Denklehre eine erneute und in einzelnen Begriffen wohl noch verbesserte und klarere Gestaltung geben. Der Verfasser hat daher diefen Hauptzweig neu ausgearbeitet.

Einleitung in die Ausdehnungslehre.

Die Idee der Ausdehnungslehre. Zum leichten Verständnisse der Ausdehnungslehre ist es wichtig, dass man fich mit der Idee der Ausdehnungslehre vertraut mache.

In der Zahlenlehre hatten wir nur eine Einheit, die Eins, und erzeugten durch fortschreitendes Zufügen der Eins die Zahlen, welche wir fämmtlich unter einander ungleich fetzten und dann weiter verknüpften.

In der Ausdehnungslehre fetzen wir nun verschiedene Einheiten, und nennen eine Gröse eine neue Einheit, wenn fie fich nicht als Vielfachenfumme der andern Einheiten darstellen lässt. Wie bei allen mathematischen Zweigen gilt auch bei ihr das Gefetz der mathematischen Zufügung, dass alle durch fortschreitendes Zufügen diefer Einheiten enstandenen Grösen fämmtlich einander wie den Einheiten ungleich fein follen, mit andern Worten, auch hieraus folgt, dass fich nicht eine Einheit als Vielfachenfumme der andern Einheiten darstellen lässt, dass fich alfo nicht

$e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n$ fetzen lässt, wo $\alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ reine oder reelle Zahlen find.

Für die Ausdehnungslehre gilt, wie für alle Zweige der Denklehre, die Einigung beim Fügen. Es gilt hier aber auch die Vertauschung; denn will man $(e_1 + e_2) + (e_1 + e_2)$ zufügen können, fo muss man e_1 und e_2 vertauschen dürfen und erhält dann $2(e_1 + e_2) = e_1 + e_1 + e_2 + e_2 = 2e_1 + 2e_2$. Es gelten dann auch für die Ausdehnungslehre alle Gefetze des Zufügens und Abziehens, des Vervielfachens und des Teilens mit Zahlen, wie bei der Zahlenlehre.

Es gelten dann aber auserdem zunächst die folgenden Gefetze. Wenn $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$ ist, fo müssen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ fämmtlich gleich Null fein; denn follte auch nur eine z. B. α_1 ungleich Null fein, fo könnte man alle Glieder durch α_1 teilen und erhielte dann $e_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} e_n = 0$, d. h. e_1 als eine Vielfachenfumme der andern, was gegen die Erklärung der neuen Einheit ist.

Ferner find in der Ausdehnungslehre zwei Grösen

$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ und $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$ dann und

nur dann gleich, wenn $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \cdots \alpha_n = \beta_n$ ist; denn zieht man die zweite von der ersten ab, fo erhält man

$$a - b = 0 = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 = \cdots + (\alpha_n - \beta_n) e_n$$

und hier muss, wie bewiefen $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \cdots \alpha_n - \beta_n = 0$ fein, woraus unmittelbar $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \cdots \alpha_n = \beta_n$ folgt.

In der Ausdehnungslehre kann man nun auch die Einfachen oder Einheiten miteinander weben oder multipliziren. Auch hier muss für das Weben Einigung gelten, wenn man überhaupt Formveränderungen zulassen will. Dagegen darf man nicht $ee = e$ fetzen, denn beachtet man, dass nach der Grösenlehre $e \cdot 1 = e$ und auch $1 = \frac{e}{e}$ ist, fo erhält man dann

$$e = e \cdot 1 = e \cdot \frac{e}{e} = \frac{ee}{e} = \frac{e}{e} = 1$$

d. h es werden dann alle Einfachen gleich 1 und wir find dann wieder in der Zahlenlehre, nicht in der Ausdehnungslehre.

Wir müssen alfo ee ungleich e fetzen, das Einfachste ist ee gleich Null zu fetzen. Soll dann auch eine andere Gröse als Einfaches oder Einheit gefetzt werden können, z. B. $e_1 + e_2$, fo ergiebt fich

$0 = (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2 e_2$ d. h. da $e_1 e_1 = 0$ und $e_2 \cdot e_2 = 0$, fo bleibt $0 = e_1 e_2 + e_2 e_1$ oder $e_2 e_1 = - e_1 e_2$.

Diefe Art der Webung nennt man eine Flachung (kombinatorische Multiplikation), das Ergebniss ein Flach. Für die Flachung find alfo nur die Flache verschiedener Einheiten ungleich Null und gilt keine Vertauschung. Zur Unterscheidung von andern Zeugen oder Produkten fetzt man das Flach in scharfe Klammer, alfo $[e_1 e_2]$.

Wir können aber auch $e_a e_a$ ungleich Null fetzen. Setzen wir hier das Zeug oder Produkt verschiedener Einheiten gleich Null, fo erhalten wir die innere Webung, welche fich jedoch leicht auf die Flachung zurückführen lässt. Die Flachung ist daher die eigentliche Webung der Ausdehnungslehre.

Man kann endlich fowohl das Zeug oder Produkt gleicher Einheiten, als auch das verschiedener Einheiten ungleich Null fetzen und dann Vertauschung gelten lassen, dann erhält man

$(e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_1 + e_2 e_2 = (e_1 e_1 + e_2 e_2) + 2 e_1 e_2$

Die Webung heist dann eine Flechtung, das Ergebniss ein Flecht, (dies Flecht entspricht ganz der Richtgröse oder komplexen Gröse $a + ib$ in der Zahlenlehre, wo $i = (-1)^{1/2}$ ist). Diefe letzte Art der Webung gehört aber nicht mehr der Ausdehnungslehre, fondern dem höhern Zweige der Ausenlehre oder der Synthefis, nämlich der Erweiterungslehre, an.

1. Die Grundgefetze der Grösenlehre.

1. **Erklärung. Die Ausdehnungslehre oder die niedere Synthefis ist der Zweig der Mathematik, für welchen auch Grösen mit verschiedenen Einheiten zugefügt und gewebt werden und für welchen das Zeug oder Produkt mehrer Einheiten wieder eine neue Einheit giebt.**

Erklärung. Die Grösen der Ausdehnungslehre sind entweder Einheiten, oder Vielfache der Einheiten oder Vielfachensummen. Die Vielfachensumme der Grösen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_n$ heist eine Gröse von der Form $\alpha_1 \mathfrak{a}_1 + \alpha_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \alpha_n \mathfrak{a}_n = \underset{1,n}{S} \alpha_a \mathfrak{a}_a$, die reinen oder reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ heisen die Vorzahlen oder die Koeffizienten, die Grösen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_n$ heisen die Grösen der Vielfachensummen. 2.

Satz. Für die Ausdehnungslehre gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet folgende Gesetze der Grösenlehre. Man kann ohne Aenderung des Wertes 3.

1) **jede Plus- und Malklammer beliebig setzen oder weglassen, und die Ordnung der Stücke beliebig ändern,**
2) **beim Weben oder Multipliziren jede Beziehungsklammer auflösen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem des andern webt oder multiplizirt.**
3) **Das Ergebniss jeder dieser Knüpfungen ist wieder eine Einheitsgröse, das Zeug oder Produkt der Einheiten ist wieder eine Einheit.**

Beweis: Unmittelbar, da alle Zweige der Mathematik nur Zweige der Grösenlehre sind, wie sie oben in der Grösenlehre entwickelt und bewiesen ist.

Es ist zweckmässig hier darauf aufmerksam zu machen, dass man zwar die Ordnung der Stücke beliebig ändern kann, nicht aber die Ordnung der Fache oder Faktoren, für welche keine Vertauschung gilt. Es ist zwar $\alpha \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \alpha$, wo α eine Zahl ist; aber nicht ist $e_1 e_2 = e_2 e_1$.

Satz. Für die Grösen der Ausdehnungslehre gelten alle Gesetze der Zahlenlehre über das Zufügen und Abziehen und über das Vervielfachen und Teilen mit Zahlen. 4.

Beweis: Die Grösen der Ausdehnungslehre sind entweder Einheiten oder Vielfachensummen von Einheiten. Für die Einheiten der Ausdehnungslehre gelten nun genau dieselben Erklärungen, wie für die Einheitender Zahlenlehre, mithin gelten auch für die Einheiten der Ausdehnungslehre und für die aus ihnen abgeleiteten Vielfachensummen alle Gesetze, welche in der Zahlenlehre aus diesen Erklärungen abgeleitet sind, d. h. alle Gesetze des Zufügens und Abziehens, alle Gesetze des Vervielfachens und Teilens mit Zahlen.

Erklärung. Einander ersetzend heisen zwei Vereine von Gleichungen, wenn sich jeder von den beiden Vereinen aus dem andern ableiten lässt. 5.

6. **Satz. Wenn eine Gröse b das Vielfache αa ist einer andern Gröse a $\gtrless 0$, so kann man statt $\frac{b}{a}$ die Zahl α setzen, oder es ist**

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha, \text{ wenn } a \gtrless 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 4 und Zahlenlehre 167.

7. **Satz. Wenn zwei Grösen a und b, deren zweite nicht Null ist, Vielfache sind derselben dritten Gröse c, so kann man statt die erste durch die zweite zu teilen, die Vorzahlen entsprechend teilen oder es ist**

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ wenn } \beta c \gtrless 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 4 und Zahlenlehre 182.

8. **Satz. Eine Gleichung, deren Glieder alle Vielfache sind derselben Gröse a ungleich Null, wird durch eine Zahlgleichung ersetzt, welche man erhält, indem man in allen Gliedern die Gröse a fortlässt oder**

die Gleichung $\alpha a + \beta a + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \cdots$

wird ersetzt durch die Zahlgleichung

$$\alpha + \beta + \cdots = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 6, wenn man beide Seiten durch a $\gtrless 0$ teilt.

Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

2. Die freien und die hörigen Grösen.

Erklärung. Hörig zu den Grösen $a_1, a_2, \cdots a_n$ heist eine 9.
Gröse b, wenn ſie ſich als Vielfachenſumme dieſer Grösen darstellen lässt, oder wenn

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha a = \underset{1,n}{S} \alpha_a a_a \text{ ist.}$$

Frei von den Grösen $a_1, a_2, \cdots a_n$ heist eine Gröse, wenn ſie ſich nicht als Vielfachenſumme dieſer Grösen darstellen lässt.

Eine Reihe von Grösen ist eine freie Grösenreihe, oder die Grösen ſind gegenſeitig frei, wenn jede frei von allen andern ist.

Eine Hörigkeit oder Abhängigkeit herrscht in einer Grösenreihe, wenn ſich irgend eine derſelben als Vielfachenſumme der andern darstellen lässt.

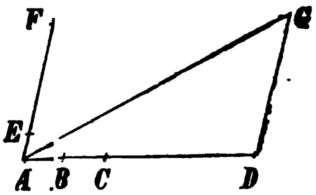
Deckend oder kongruent heisen zwei Grösen ungleich Null, wenn die eine das Vielfache der andern ist. Das Zeichen des Deckens ist $\equiv$ z. B. $a \equiv b$.

Satz. Jede Einheit ist von allen andern Einheiten frei. Jede 10.
Vielfachenſumme von Einheiten ist zu ihren Einheiten hörig.

Beweis: Wir haben für die Mathematik festgestellt, dass die durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten entstandenen Grösen ſämmtlich einander und den Einheiten ungleich ſein ſollen, dass alſo auch nicht eine Einheit einer Vielfachenſumme der andern Einheiten gleich ſein kann; daraus folgt der erste Teil des Satzes, der zweite folgt unmittelbar aus 9.

Es ist dringend zu wünschen, dass ſich jeder ein anschauliches Bild von den Verhältnissen mache, damit er die Verhältnisse ſinnlich anschaue und Sicherheit in den Betrachtungen gewinne. Ein ausgezeichnetes Hülfsmittel zu dieſem Zwecke bieten die räumlichen Verhältnisse.

Sei alſo AB die Einheit e_1 und ſei AC auf derſelben oder auf einer gleichlaufenden Linie doppelt ſo lang, ſo ist $AC = 2e_1$, ſei AD αmal ſo lang, ſo ist $AD = \alpha e_1$ und ſind alle dieſe Strecken gegenſeitig deckend. Sei dagegen AE auf einer Linie, welche die obige schneidet, ſo kann AE nie einem Vielfachen von e_1 gleichgeſetzt werden, es ist alſo von e_1 frei und kann als eine neue Einheit e_2 geſetzt werden, dann ſind alle Strecken auf der Linie AE Vielfache von e_2, alſo $AF = \beta e_2$.



Setzen wir nun AD und AF an einander, in der Weiſe, dass DG gleichlaufend und gleichlang mit AF ist, ſo ist die Strecke $AG = AD + AF = \alpha e_1 + \beta e_2$ alſo eine Vielfachenſumme von e_1 und e_2, und zu dieſen beiden Einheiten hörig, während e_1 und e_2 gegenſeitig frei ſind.

Es wird nun unſere Aufgabe ſein, auch für andere Grösen zu unterſuchen, wann ſie gegenſeitig frei ſind, wann nicht.

11. **Satz. Null ist zu jeder Grösenreihe hörig.**

Beweis: Was auch $a_1\ a_2 \cdots$ für Grösen ſein mögen, ſo ist

$$0 = S\,\overline{\alpha_a\ a_a} \quad \text{wo } \alpha_a = 0 \qquad \text{(nach Zahlenlehre 134 und 174)}$$

12. **Satz. Eine Gröse, welche zu den Grösen $a_1 \cdots\cdots a_n$ hörig ist, vervielfacht oder teilt man mit einer Zahl, indem man die Vorzahlen mit dieſer Zahl vervielfacht oder teilt.**

Beweis: Es ſei die Gröse $b = \alpha_1\ a_1 + \alpha_2\ a_2 + \cdots + \alpha_n\ a_n$ und ſei β eine Zahl, ſo ist

1. $$\beta b = \beta(\alpha_1\ a_1 + \alpha_2\ a_2 + \cdots + \alpha_n\ a_n)$$
$$= \beta\alpha_1\ a_1 + \beta\alpha_2\ a_2 + \cdots + \beta\alpha_n\ \alpha_n$$
(nach Satz 4 und Zahlenlehre 169)

2. Ebenſo ist $$\frac{b}{\beta} = \frac{1}{\beta}\, b = \frac{1}{\beta}\ \alpha_1\ a_1 + \frac{1}{\beta}\ \alpha_2\ a_2 + \cdots + \frac{1}{\beta}\ \alpha_n\ a_n$$
(nach $12_{,1}$)

$$= \frac{\alpha_1}{\beta}\ a_1 + \frac{\alpha_2}{\beta}\ a_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta}\ a_n$$
(nach Satz 4 und Zahlenlehre 180)

13. **Satz. Eine Gröse, welche mit einer zweiten zu denſelben Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig ist, fügt man zu oder zieht man ab, indem man die entsprechenden Vorzahlen der Grösen $a_1 \cdots a_n$ zufügt oder abzieht.**

Beweis: Es ſei $b = \beta_1\ a_1 + \beta_2\ a_2 + \cdots + \beta_n\ a_n$ und $c = \gamma_1\ a_1 + \gamma_2\ a_2 + \cdots + \gamma_n\ a_n$, ſo ist

$1.\ b + c = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n + (\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n)$

$= (\beta_1 + \gamma_1) a_1 + (\beta_2 + \gamma_2) a_2 + \cdots + (\beta_n + \gamma_n) a_n$

(nach 3 und Zahlenlehre 183)

2, b — c. Um den Satz für b — c zu beweisen und Satz $13_{,1}$ anwenden zu können, müssen wir statt b — c die Grösen $b + (-c) = b + (-1) c$ nehmen, welche nach Satz 4 und Zahlenlehre 133 gleich b — c sind. Dann ist

$$b - c = b + (-1) c = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n + (-1)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n)$$

$$= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n + ((-1)\gamma_1 a_1 + (-1)\gamma_2 a_2 + \cdots + (-1)\gamma_n a_n) \quad \text{(nach 12)}$$

$$= (\beta_1 + (-1)\gamma_1) a_1 + (\beta_2 + (-1)\gamma_2) a_2 + \cdots + (\beta_n + (-1)\gamma_n) a_n \quad \text{(nach } 13_{,1})$$

$$= (\beta_1 - \gamma_1) a_1 + (\beta_2 - \gamma_2) a_2 + \cdots + (\beta_n - \gamma_n) a_n$$

(nach 4 und Zahlenlehre 133)

Satz. Zwischen n Grösen $a_1 \cdots a_n$ herrscht dann und nur dann eine Hörigkeit, wenn sich eine Gleichung 14.

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher wenigstens eine der Zahlen α_a ungleich Null ist.

Beweis: 1. Wenn in der Gleichung $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$ auch nur eine der Zahlen z. B. α_1 ungleich Null ist, so lässt sich die Gleichung durch α_1 teilen und ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n \quad \text{(nach Satz 12 und 13)},$$

2. Wenn eine der Grösen $a_1 \cdots a_n$, z. B. a_1 zu den andern hörig ist, so sei

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

so ist $-a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = 0$ (nach Zahlenlehre 135) und ist also mindestens die Vorzahl von a_1 d. h. α_1 ungleich Null.

Satz. Eine Gröse, welche zu der freien Grösenreihe $a_1 \cdots a_n$ hörig ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre n Vorzahlen Null sind oder die Gleichung (a) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$, wo $a_1 \cdots a_n$ eine freie Grösenreihe, wird ersetzt durch die n Zahlengleichungen 15.

(b) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0.$

Beweis: 1. Angenommen, es wäre eine der Vorzahlen ungleich Null, so würde nach Satz 14 zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_n$ ein Hörigkeit herrschen, was wider die Voraussetzung ist. Gilt also die Gleichung (a), so gelten auch die n Gleichungen (b).

2. Umgekehrt, wenn die n Gleichungen (b) gelten, fo folgt daraus auch nach Zahlenlehre 134 und 174 die Gleichung (a); alfo find beide Vereine von Gleichungen einander erfetzend.

16. **Satz. Zwei Grösen, welche zu derfelben freien Grösenreihe $a_1 \cdots a_n$ hörig find, find dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denfelben freien Grösen gehörigen Vorzahlen einander gleich find oder**

die Gleichung (a) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$, **wo $a_1 \cdots a_n$ eine freie Grösenreihe, wird erfetzt durch die n Zahlengleichungen**

(b) $$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n = \beta_n.$$

Beweis: Aus der Gleichung (a) folgt nach Zahlenlehre 135 und Ausdehnungslehre 13

$$(\alpha_1 - \beta_1) a_1 + (\alpha_2 - \beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) a_n = 0.$$

Diefe Gleichung aber wird nach Satz 15 erfetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0,\ \cdots,\ \alpha_n - \beta_n = 0,$$

d. h. nach Zahlenlehre 135 durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n = \beta_n.$$

17. **Satz. Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache find von Grösen, welche fämmtlich zu der freien Grösenreihe $g_1 \cdots g_n$ gehörig find, wird erfetzt durch n Zahlengleichungen, welche man erhält, indem man statt jeder Gröse ihre zu derfelben freien Gröse g_a gehörige Vorzahl fetzt, oder**

die Gleichung (a) $\alpha a + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots$

in welcher $a = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n \quad k = \varkappa_1 g_1 + \varkappa_2 g_2 + \cdots + \varkappa_n g_n$

$b + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \cdots + \beta_n g_n \quad l = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

wo $g_1 \cdots g_n$ eine freie Grösenreihe ist, wird erfetzt durch die n Zahlengleichungen

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{array} \right.$$

Beweis: Setzt man in der Gleichung (a) für die Grösen $a\,b \cdots k\,l \cdots$ ihre Werte, fo erhält man nach Satz 12 und 13

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots) g^1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots) g_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots) g_n$$
$$= (\varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots) g_1 + (\varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots) g_2 + \cdots + (\varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots) g_n$$

und dieſe Gleichung wird nach Satz 16 erſetzt durch die n Zahlengleichungen

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots &= \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots &= \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ &\vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots &= \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{aligned}$$

Satz. Wenn in einer Reihe von Grösen, deren erste ungleich Null ist, jede folgende von allen vorhergehenden frei ist, ſo ist die Reihe eine freie Grösenreihe. 18.

Beweis: Angenommen, die Grösenreihe ſei nicht frei, ſo herrscht nach Satz 9 zwischen den Grösen eine Hörigkeit, und ist alſo nach Satz 14 in der Gleichung $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$, wenigstens eine der Vorzahlen α_a ungleich Null. Sei nun α_r die letzte Vorzahl ungleich Null, ſo kann r entweder gleich 1 oder gröser als 1 ſein. Wäre nun $r = 1$, ſo wäre $\alpha_1 a_1 = 0$, mithin da $\alpha_1 \gtrless 0$, ſo wäre $a_1 = 0$ (nach 4 und Zahlenlehre 175) was gegen die Vorausſetzung ist. Wäre aber $r > 1$, ſo wäre

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1} \quad \text{(nach Satz 12 und 13)}$$

mithin a_r zu den vorhergehenden Grösen hörig, was wieder gegen die Vorausſetzung ist. Es kann alſo zwischen den Grösen $a_1 a_2 \cdots a_n$ keine Hörigkeit herrschen.

Satz. Wenn zwischen n Grösen, welche nicht alle Null ſind, eine Hörigkeit herrscht, ſo lässt ſich stets aus ihnen eine freie Grösenreihe ausſondern, zu der die andern Grösen hörig ſind. 19.

Beweis: Es ſeien $a_1 \cdots a_n$ die n Grösen, ſo muss ſich nach Satz 9 eine als Vielfachenſumme der andern darstellen lassen, es ſei dies a_n und ſei

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_{n-1}$ abermals eine Hörigkeit, ſo muss ſich nach Satz 9 abermals eine als Vielfachenſumme der andern darstellen lassen. Es ſei dies a_{n-1} und ſei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{n-2} a_{n-2}$$

Führt man dieſen Ausdruck in die erste Gleichung ein, ſo erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1}\beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n-1}\beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}\beta_{n-2}) a_{n-2}$$

(nach Satz 12 und 13).

Es ist dann also auch a_n eine Vielfachensumme der Grösen $a_1 \cdot\cdot a_{n-2}$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass, wenn zwischen den Grösen $a_1 \cdot\cdot a_{n-r}$ noch eine Hörigkeit herrscht, man eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellen kann, etwa a_{n-r}, und dass, indem man für diese Gröse ihre Vielfachensumme einschiebt, alle bisher als Vielfachensummen der Grösen $a_1 \cdot\cdot a_{n-r}$ dargestellten Grösen demnächst Vielfachensummen der Grösen $a_1 \cdot\cdot a_{n-r-1}$ werden, bis man zuletzt entweder zu einer freien Grösenreihe, oder zu einer einzigen Gröse a_1 gelangt, von welcher alle andern Grösen Vielfachensummen sind. Im letzten Falle darf wenigstens diese Gröse nicht Null sein, da sonst (nach Satz 4 und Zahlenlehre 174) alle andern Grösen als Vielfache derselben Null wären, was der Voraussetzung widerstreitet. In jedem Falle gelangt man also zu einer freien Grösenreihe, zu der die andern Grösen hörig sind.

20. **Satz. Jede Gröse der Ausenlehre lässt sich darstellen in der Form**

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdot\cdot + \alpha_n a_n$$

wo $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_n$ Zahlen sind und die Grösen $a_1 \cdot\cdot a_n$ eine freie Grösenreihe bilden.

Beweis: In dem Ausdrucke, der b gleich ist, lassen sich nach Satz 4, Zahlenlehre 180 und 183 alle Klammern lösen und erscheint mithin die Gröse a als eine Vielfachensumme, in der jedes Glied ein Zeug oder Produkt ist einer Zahl mit einer Gröse der Ausdehnungslehre. Zwischen diesen Grösen kann nun noch eine Hörigkeit herrschen; entfernt man aber die zu den andern Grösen hörigen in der Weise des Satzes 19, so bleibt zuletzt a als eine Vielfachensumme übrig, in der auser den Zahlen nur gegenseitig freie Grösen vorkommen.

Es ist wünschenswert, dass sich jeder eine Anschauung von diesen neuen Grösen verschaffe. Die dehnende Raumlehre des Verfassers bietet hiezu eine treffliche Gelegenheit und erlaube ich mir hier auf dieselbe zu verweisen.

3. Die Gebiete und deren Zurückleitung.

21. **Erklärung. Das Gebiet der Grösen $a_1 \cdot\cdot a_n$ heist die Gesammtheit der zu den Grösen $a_1 \cdot\cdot\cdot a_n$ hörigen Grösen. Gebiet nter Stufe heist ein Gebiet, wenn die Grösen desselben sich als Vielfachensummen von nicht weniger als n gegenseitig freien Grösen erster Stufe darstellen lassen.**

Die reinen Zahlen bilden ein Gebiet nullter Stufe.

Zwei Gebiete heisen einander deckende Gebiete, wenn das eine dem andern gleich oder ein Vielfaches des andern ist.

Das Zeichen ∘ vor einem Buchstaben z. B. ∘A gelesen „Gebiet A" bezeichnet das Gebiet jener Gröse. Das Zeichen ∘ $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ bezeichnet das Gebiet der Grösen $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Die ursprünglichen Einheiten und die Vielfachen und Vielfachensummen derselben heisen Grösen erster Klasse.

In dem Beispiele in der Anmerkung zu Satz 10 ist $AG = \alpha e_1 + \beta e_2$ eine Gröse erster Klasse, die Ebene durch die Punkte ABE d. h. die Ebene, welche die Gesammtheit der zu den Einheiten e_1 und e_2 hörigen Grösen $\alpha e_1 + \beta e_2$ umfasst, das Gebiet der Grösen e_1 und e_2 und zwar ein Gebiet zweiter Stufe.

Ganz ebenso ist der Raum ein Gebiet dritter Stufe gebildet aus drei gegenseitig freien Grösen e_1, e_2 und e_3, welche, da sie gegenseitig frei sein sollen, nicht derselben Ebene angehören dürfen.

Satz. Wenn eine Gröse erster Klasse a_1 zu n Grösen erster Klasse $b_1 \cdots b_n$ hörig und die zu b_1 gehörige Vorzahl in dem Ausdrucke für a_1 ungleich Null ist, so ist das Gebiet der n Grösen $a_1\, b_2 \cdots b_n$ gleich oder deckend dem Gebiete der n Grösen $b_1\, b_2 \cdots b_n$. 22.

Beweis: Es sei $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$, wo $\alpha_1 \gtrless 0$, dann ist

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} b_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} b_n.$$

Dann aber ist auch jede Gröse c des Gebietes $b_1\, b_2 \cdots b_n$ z. B.

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_n b_n.$$

$$= \frac{\gamma_1}{\alpha_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) b_2 + \cdots + \left(\gamma_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) b_n.$$

d. h. auch eine Gröse des Gebietes $a_1\, b_2 \cdots b_n$.

Ebenso ist jede Gröse d des Gebietes $a_1\, b_2 \cdots b_n$ z. B.

$$d = \delta_1 a_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_n b_n$$

$$= \delta_1 \alpha_1 b_1 + (\delta_2 + \delta_1 \alpha_2) b_2 + \cdots + (\delta_n + \delta_1 \alpha_n) b_n$$

d. h. auch eine Gröse des Gebietes $b_1\, b_2 \cdots b_n$.

Satz. Wenn m gegenseitig freie Grösen erster Klasse $a_1 \cdots a_m$ zu n Grösen erster Klasse $b_1 \cdots b_n$ hörig sind, so kann man zu den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ stets noch n — m Grösen erster Klasse $a_{m+1} \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass die Grösen $b_1 \cdots b_n$ auch zu $a_1 \cdots a_n$ hörig sind und also das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_n$ dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$ gleich ist, auch kann man jene n — m Grösen aus den Grösen $b_1 \cdots b_n$ selbst entnehmen. 23.

Beweis: 1. Nach der Voraussetzung ist a_1 zu den Grösen $b_1 \cdots b_n$ hörig; es sei also $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$, so muss, da $a_1 \gtrless 0$ ist, mindestens eine der Zahlen $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ ungleich Null sein, es sei dies, da die Zeiger vertauschbar sind, α_1, so ist nach Satz 22 das Gebiet der Grösen $a_1\, b_2 \cdots b_n$ gleich dem Gebiete der Grösen $b_1 \cdots b_n$.

2. Angenommen, es sei das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_r\ b_{r+1} \cdots b_n$, wo $r < m$, gleich oder deckend dem Gebiete der Grösen $b_1 \cdots b_n$, so muss a_{r+1}, da es nach der Voraussetzung eine Gröse des Gebietes $b_1 \cdots b_n$ ist, auch eine Gröse des Gebietes $a_1 \cdots a_r\ b_{r+1} \cdots b_n$ sein. Es sei demnach $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \beta_n b_n$, so muss, da nach der Voraussetzung a_{r+1} frei ist von den Grösen $a_1 \cdots a_r$, mindestens eine der Vorzahlen $\beta_{r+1} \cdots \beta_n$ ungleich Null sein. Es sei also $\beta_{r+1} \gtrless 0$, so ist nach 22 das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_{r+1}\ b_{r+2} \cdots b_n$ gleich oder deckend dem Gebiete der Grösen $b_1 \cdots b_n$. Mithin ist, da das Gebiet der Grösen $a_1\ b_2 \cdots b_n$ gleich oder deckend dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$ ist, fortleitend auch das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_m\ b_{m+1} \cdots b_n$ gleich oder deckend dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$.

24. **Satz. Wenn n gegenseitig freie Grösen erster Klasse $a_1 \cdots a_n$ zu n andern Grösen erster Klasse $b_1 \cdots b_n$ hörig sind, so ist das Gebiet der ersten Grösenreihe dem der letztern gleich oder deckend.**

Beweis: Unmittelbar aus Satz 23, wenn man n statt m setzt.

25. **Satz. Jedes Gebiet nter Stufe kann aus n beliebigen gegenseitig freien Grösen erster Klasse, welche dem Gebiete angehören, abgeleitet werden.**

Beweis: Es sei das Gebiet nter Stufe ursprünglich aus den n gegenseitig freien Grösen erster Klasse $a_1 \cdots a_n$ abgeleitet und seien $b_1 \cdots b_n$ beliebige n gegenseitig freie Grösen erster Klasse, welche nach der Voraussetzung zu dem Gebiete der Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig sind, so ist nach Satz 24 das Gebiet der ersten Grösenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

26. **Satz. Wenn n Grösen erster Klasse $a_1 \cdots a_n$ einem Gebiete von kleinerer als nter Stufe angehören, so herrscht zwischen ihnen eine Hörigkeit.**

Beweis: Es sei das Gebiet, dem die Grösen $a_1 \cdots a_n$ angehören, mter Stufe, wo $m < n$, und sei dies Gebiet zu m Grösen $b_1 \cdots b_m$ hörig. Entweder herrscht nun zwischen den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ eine Hörigkeit und gilt also der Satz, oder sie sind gegenseitig frei. Im letztern Falle ist das Gebiet der Grösen $a_1 \cdots a_m$ nach Satz 24 dem der Grösen $b_1 \cdots b_m$ gleich, dann sind aber auch die Grösen $a_{m+1} \cdots a_n$ nach Satz 25 zu den Grösen $a_1 \cdots a_m$ hörig und herrscht also auch in diesem Falle zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_n$ eine Hörigkeit.

27. **Satz. Wenn ein Gebiet nter Stufe zu n Grösen erster Klasse hörig ist, so sind diese gegenseitig frei und umgekehrt, wenn n Grösen erster Klasse gegenseitig frei sind, so ist ihr Gebiet nter Stufe.**

Beweis: 1. Herrschte zwischen den n Grösen erster Klasse eine Hörigkeit, fo liesen fich einzelne derfelben als Vielfachenfummen der andern, d. h. von weniger als n Grösen erster Klasse darstellen und wäre alfo auch das Gebiet von niederer als nter Stufe (nach Satz 21),

2. Wenn die n Grösen erster Klasse gegenfeitig frei find, fo find fie nach Satz 26 nicht aus weniger als n Grösen erster Klasse ableitbar, d. h. ihr Gebiet ist nach Satz 21 nter Stufe.

Erklärung. Zurückleitung der Gröse b auf das Gebiet $a_1 \cdots a_m$ unter Ausschliesung des Gebietes $a_{m+1} \cdots a_n$ heist die Gröse $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$, wenn die Gröse $b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ ist, wo $a_1 \cdots a_n$ gegenfeitig freie Grösen erster Klasse und $m < n$ ist. Die Zurückleitungen heisen in demfelben Sinne genommen, wenn die Grösen auf dasfelbe Gebiet unter Ausschliesung desfelben Gebietes zurückgeleitet find. 28.

Satz. Jede Gleichung, deren Glieder Zeuge oder Produkte einer Zahl mit einer Gröse erster Klasse find, bleibt bestehen, wenn man statt aller Grösen der Ausdehnungslehre ihre in demfelben Sinne genommenen Zurückleitungen fetzt. 29.

Beweis: Die gegebene Gleichung fei $\alpha a + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots$ in welcher $a\ b \cdots k\ l \cdots$ denfelben Wert haben, wie in Satz 17. Dann wird nach Satz 17 die obige Gleichung erfetzt durch die n Gleichungen.

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots &= \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ &\vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots &= \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{aligned}$$

Verwebt oder multiplizirt man nun die ersten m diefer Gleichungen beziehlich mit $g_1 \cdots g_m$ und fügt die Gleichungen zu, fo erhält man

$$\alpha a' + \beta b' + \cdots = \varkappa k' + \lambda l' + \cdots$$

wo $a' = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$ $\qquad k' = \varkappa_1 g_1 + \cdots + \varkappa_m g_m$

$b' = \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_m g_m$ $\qquad l' = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

was zu beweifen war.

Es ist auch hier wieder wünschenswert, dass fich jeder eine Anschauung von diefen neuen Grösen verschaffe. Die dehnende Raumlehre des Verfassers bietet hiezu wieder eine treffliche Gelegenheit und erlaube ich mir hier auf diefelbe zu verweifen.

4. Die Gefetze der Grösengebiete.

Erklärung. Das verbindende Gebiet oder die Summe zweier Gebiete heist die Gefammtheit der Grösen, welche zu dem einen oder dem andern der beiden Gebiete hörig find. 30.

Das gemeinſame Gebiet oder das Zeug (Produkt) zweier Gebiete heist die Geſammtheit der Grösen, welche den beiden Gebieten gemeinſam, d. h. ſowohl zu dem einen Gebiete, als auch zugleich zu dem andern Gebiete hörig ſind.

Das Zeug (Produkt) zweier Gebiete, welche keine Gröse erster Klasse gemeinſam haben, ſetzen wir gleich Null.

Schneiden ſich zwei Ebenen o (e_1, e_2) und o (e_1, e_3) in der geraden Linie αe_1, ſo ist die Linie αe_1 das gemeinſame Gebiet oder das Zeug (Produkt) der beiden Gebiete o (e_1, e_2) und o (e_1, e_3), dagegen ſind alle Punkte und Linien, welche in den beiden Ebenen o (e_1, e_2) und o (e_1, e_3) enthalten ſind, das verbindende Gebiet oder die Summe der beiden Ebenen.

31. **Satz. Die Summe der Stufenzahlen m und n zweier Gebiete ist gleich der Summe der Stufenzahl g ihres gemeinſamen Gebietes und der Stufenzahl v ihres verbindenden Gebietes, oder es ist**

$$\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{g} + \mathbf{v}.$$

Beweis. Es ſei das Gebiet mter Stufe nach Satz 27 das der m gegenſeitig freien Grösen $a_1 \cdots a_m$, das nter das der gegenſeitig freien Grösen $b_1 \cdots b_n$, das gemeinſame gter Stufe das der gegenſeitig freien Grösen $c_1 \cdots c_g$, ſo ist nach Satz 23 das Gebiet der Grösen $c_1 \cdots c_g$ $a_{g+1} \cdots a_m$ dem der Grösen $a_1 \cdots a_n$ und das Gebiet der Grösen $c_1 \cdots c_g$ $b_{g+1} \cdots b_n$ dem der Grösen $b_1 \cdots b_n$ gleich oder deckend und ſind die Grösen $c_1 \cdots c_g$ $a_{g+1} \cdots a_m$ gegenſeitig frei und ebenſo die Grösen $c_1 \cdots c_g$ $b_{g+1} \cdots b_n$.

Das verbindende Gebiet vter Stufe aber ist das Gebiet der Grösen $c_1 \cdots c_g$ $a_{g+1} \cdots a_m$ $b_{g+1} \cdots b_n$. Angenommen nun, es herrschte hier eine Hörigkeit zwischen den Grösen, ſo müsste dieſe die Form haben $a + b + c = 0$, wo a zu $a_{g+1} \cdots a_m$, b zu $b_{g+1} \cdots b_n$, c zu $c_1 \cdots c_g$ hörig wäre. In dieſer Gleichung kann nicht $a = 0$ ſein, da ſonst $b + c = 0$ wäre, d. h. eine Hörigkeit zwischen den Grösen $c_1 \cdots c_g$ $b_{g+1} \cdots b_n$ herrschte, ebenſo kann nicht $b = 0$ ſein. Es wäre alſo $a = -b - c$, wo $a \gtrless 0$, d. h. es gehörte a einerſeits dem Gebiete $a_1 \cdots a_m$ und zugleich andrerſeits dem Gebiete $c_1 \cdots c_g$ $b_{g+1} \cdots b_n$ an. Zu den Grösen $c_1 \cdots c_g$ ist es aber nicht hörig, da $c_1 \cdots c_g$ $a_{g+1} \cdots a_m$ gegenſeitig frei, alſo hätten die beiden Gebiete $a_1 \cdots a_m$ und $b_1 \cdots b_n$ auser $c_1 \cdots c_g$ noch eine von dieſen freie Gröse gemein, was wider die Vorausſetzung ist. Die Annahme ist mithin falsch, und ſind die Grösen $c_1 \cdots c_g$ $a_{g+1} \cdots a_m$ $b_{g+1} \cdots b_n$ alle gegenſeitig frei, d. h. die Stufenzahl des verbindenden Gebietes v ist nach Satz 27

$$v = m + n - g \text{ oder } m + n = g + v.$$

Satz. Zwei Gebiete mter und nter Stufe, welche in einem Gebiete hter Stufe liegen, haben, wenn $m + n > h$ ist, mindestens ein Gebiet $(m + n - h)$ter Stufe gemein. 32.

Beweis: Sei das verbindende Gebiet vter, das gemeinfame gter Stufe, fo ist nach Satz 31 $g = m + n - v$, aber $v \leqq h$, da es in dem Gebiete h liegen muss, mithin ist

$$g \geqq m + n - h.$$

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier Gebiete, welche keine Gröse erster Klasse gemeinsam haben, ist Null oder 33.

$$[\circ(e_{a_1}, e_{a_2}, \cdots, e_{a_n})] \cdot [\circ(e_{b_1}, e_{b_2}, \cdots, e_{b_m})] = 0 \text{ wenn } a_1 \cdots a_n \gtrless b_1 \cdots b_m.$$

Unmittelbar aus Satz 30.

Satz. Für die Gebiete der Ausdehnungslehre gelten alle Sätze der Bestimmungslehre oder der Logik, fofern man in jedem Satze das Wort Begriff bez. Gröse durch das Wort Gebiet erfetzt. 34.

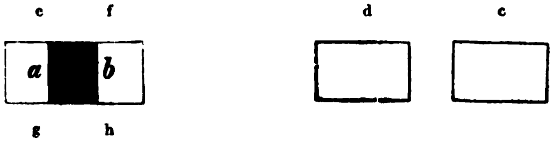
Beweis: Bei den Gebieten der Grösenlehre ist das Gebiet von $e + e$ und ebenfo das Gebiet von $e \cdot e$ gleich dem Gebiete von e, oder es ist $\circ(e + e) = \circ e$ und $\circ(e \cdot e) = \circ e$, kurz es gelten für die Gebiete der Ausdehnungslehre auch die beiden Grundformeln der Logik $e + e = e$ und $e \cdot e = e$.

Ferner ist für die Gebiete auch $\circ e_a + \circ e_b \gtrless 0$ nach Satz 30 und ist $(\circ e_a) \cdot [\circ e_b] = 0$, wenn $a \gtrless b$ nach Satz 33, alfo gelten für die Gebiete der Ausdehnungslehre auch die beiden Hauptformeln der Logik $e_a + e_b \gtrless 0$ und $e_a \cdot e_b = 0$, wenn $a \gtrless b$ ist. Aus diefen vier Sätzen find aber alle Sätze der Logik abgeleitet, alfo gelten auch alle Sätze der Logik für die Gebiete der Ausdehnungslehre, wenn man in jedem Satze das Wort Begriff bez. Gröse durch das Wort Gebiet erfetzt.

Da die Mathematiker meist keine Logik treiben, fo scheint ein folches Bezugnehmen auf die Logik bedenklich. Aber will man die Sache streng wissenschaftlich nehmen und alle Sätze beifammen haben, welche man für die Gebiete ableiten kann, fo ist es das Kürzeste und Wissenschaftlichste, auf die Logik zurück zu gehen; denn hier find alle Beweife in kürzester Form gegeben. Ueberdies bieten die in der Logik zur Veranschaulichung aufgeführten Zeichnungen gleichzeitig auch das beste Mittel zur Veranschaulichung der Sätze über die Gebiete in der Ausdehnungslehre. Ich kann daher den geehrten Mathematikern nur empfehlen, an diefer Stelle die Logik zu studiren und die reichsten Anwendungen auf die Gebiete der Ausdehnungslehre zu machen.

Da ich aber nicht hoffen darf, dass die Herren Mathematiker fämmtlich hier die Logik einschieben werden, fo fehe ich mich hier genötigt, wenigstens die wichtigsten Sätze für die Gebiete abzuleiten.

Für das Anschaulichmachen der Gebiete durch Zeichnung bemerke ich ein für alle Mal, dass die Sache stets so dargestellt werden wird, dass zwei Gebiete nur dann und nur soweit gleiche Einfache enthalten, als sie in denselben Raum fallen oder einander decken, so haben z. B. die Gebiete a und b nur das Stück efgh gemeinsam, sonst lauter verschiedene Einfache, so haben d und c gar kein Einfaches gemeinsam.



In der Raumlehre sagt man d sei gleich c oder gleich gros mit c. In der reinen Denk und Gebietslehre dagegen sind d und c ganz ungleich, haben auch nicht einen Punkt, nicht ein Einfaches, nicht ein Element gleich. Es ist wichtig, diesen Unterschied zu beachten, da sonst leicht Verwirrungen entstehen könnten.

Es ist nun aus der Zeichnung einleuchtend, dass $a + a = a$ ist, denn wenn ich auf a noch einmal das gleiche a lege, so ändert dies das a nicht, ebenso bleibt $a \cdot a = a$.

35. **Satz. Für die Gebiete gelten alle Gesetze der Zufügung und der Verwebung, welche wir in der Grösenlehre kennen gelernt haben.**

Beweis. Unmittelbar nach 30. Denn die Summe, d. h. das verbindende Gebiet bleibt dasselbe, ob ich e_1 e_2 mit e_3, oder ob ich e_1 mit e_2 und e_3 verbinde, und ebenso bleibt es dasselbe für e_1 und e_2 wie für e_2 und e_1. Es gelten also für die Fügung die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung und daraus abgeleitet das ganze Gesetz der Zufügung. Ebenso für das Zeug, d. h. für das gemeinsame Gebiet ist das Gebiet, welches dem a mit dem b und auserdem mit dem c gemeinsam ist, dasselbe, als welches dem a gemeinsam ist mit dem dem b und c gemeinsamen Gebiete und ebenso ist das dem a und b gemeinsame Gebiet dasselbe, wie das dem b und a gemeinsame Gebiet, da in beiden Fällen stets dieselben Einheiten gemeinsam bleiben. Es ist also für die Gebiete $abc = a(bc)$ und $ab = ba$, d. h. es gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet das Gesetz der Verwebung.

36. **Satz.** $\cdot A + \cdot A = \cdot A$ | $\cdot A \cdot \cdot A = \cdot A$

Die Summe und das Zeug (Produkt) zweier gleichen Gebiete ist wieder dasselbe Gebiet.

Beweis. Unmittelbar aus Satz 30.

Man muss hier von vorne herein wohl darauf achten, dass für die Gebiete und für die Grösen der Ausdehnungslehre ganz verschiedene Gesetze der Zufügung, wie der Webung oder Multiplikation gelten, und dass man daher, wenn

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung in die Ausdehnungslehre.

		Nummer.	Seite.
1.	Die Grundgefetze der Grösenlehre	1	2

Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

2.	Die freien und die hörigen Grösen	9	5
3.	Die Gebiete und deren Zurückleitung	21	10
4.	Die Gefetze der Grösengebiete	30	13
5.	Die Zeuge oder Produkte von Ausdehnungsgrösen	68	25

Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

6.	Die Gefetze der Flachungslehre	81	34
7.	Die linige Aenderung der Grösen erster Klasse	110	44
8.	Die Flache der Grösen höherer Klassen	115	46

Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modlungslehre.

9.	Die grundlegenden Gefetze der Modlungslehre	126	50
10.	Die allgemeinen Sätze für Enflache	145	57
11.	Die reinen und die gemischten Enflache	164	72
12.	Die Zurückleitung auf ein niederes Gebiet	179	85

Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

13.	Die Grundgefetze der Innungslehre	186	93
14.	Normverein und Kreifeländerung	201	99
15.	Die normige Zurückleitung	213	105
16.	Die Winkelfolgen der Innenzeuge	246	121

Anhang: Anwendung der Ausdehnungslehre zur Löfung der Gleichungen mit mehren Unbekannten.

1.	Die Löfung der Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten	268	128
2.	Die Entfernung aller Unbekannten aus m + 1 Gleichungen ersten Grades	269	130
3.	Die Entfernung der Unbekannten aus 2 Gleichungen höhern Grades	270	131

man nicht in Verwirrung geraten will, Gebiete und Grösen genau unterscheiden muss. So ist für Gebiete $^\circ A + ^\circ A = ^\circ A$, dagegen für die Grösen $A + A = 2A \gtrless A$, fofern $A \gtrless 0$ ist, fo ist für Gebiete $^\circ A\, ^\circ A = ^\circ A$, dagegen für Grösen $A \cdot A \gtrless A$, fofern $A \gtrless 0$ ist.

Satz. $n ^\circ A = ^\circ A$ | $(^\circ A)^n = ^\circ A$ 37.

Jede Summe und jedes Zeug oder Produkt gleicher Gebiete ist wieder dasfelbe Gebiet.

Beweis. Unmittelbar aus 36.

Satz. $^\circ A = ^\circ A + ^\circ A ^\circ B$ | $^\circ A = ^\circ A \cdot (^\circ A + ^\circ B)$ 38.

Man kann zu jedem Gebiete ohne Aenderung feines Wertes ein Zeug (Produkt) fügen, in welchem jenes Gebiet ein Fach oder Faktor ist.

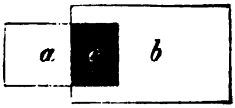
Man kann jedes Gebiet ohne Aenderung feines Wertes mit einer Summe weben (multipliziren), in welcher jenes Gebiet ein Stück ist.

Beweis. Unmittelbar aus 36 und 30.

Veranschaulichung. $d = a + b$

d

$c = a \cdot b$



Satz. **Annahme:** $^\circ A + ^\circ B = ^\circ B$ 39.

Folgerung: $^\circ A \cdot ^\circ B = ^\circ A$

Wenn die Summe zweier Gebiete dem einen Gebiete gleich ist, fo ist das Zeug oder Produkt der beiden Gebiete dem andern Gebiete gleich.

Beweis. Nach der Annahme ist

$$^\circ A \cdot ^\circ B = ^\circ A \cdot (^\circ A + ^\circ B)$$
$$= ^\circ A \cdot ^\circ A + ^\circ A \cdot ^\circ B \quad \text{(nach 35)}$$
$$= ^\circ A + ^\circ A \cdot ^\circ B \quad \text{(nach 36)}$$
$$= ^\circ A \quad \text{(nach 38)}$$

Annahme: $^\circ A \cdot ^\circ B = ^\circ B$

Folgerung: $^\circ A + ^\circ B = ^\circ A$

Wenn das Zeug oder Produkt zweier Gebiete dem einen Gebiete gleich ist, fo ist die Summe der beiden Gebiete dem andern Gebiete gleich.

Beweis. Nach der Annahme ist

$$^\circ A + ^\circ B = ^\circ A + ^\circ A \cdot ^\circ B$$
$$= ^\circ A \cdot ^\circ A + ^\circ A \cdot ^\circ B \quad \text{(nach 36)}$$
$$= ^\circ A \cdot (^\circ A + ^\circ B) \quad \text{(nach 35)}$$
$$= ^\circ A \quad \text{(nach 38)}$$

Satz. $^\circ A + 1 = 1$ | $^\circ A \cdot 0 = 0$ 40.

$^\circ A + 0 = ^\circ A$ | $^\circ A \times 1 = ^\circ A$

Eins giebt zu jedem Gebiete gefügt eins, mit jedem Gebiete gewebt oder multiplizirt dasfelbe Gebiet.

Null giebt mit jedem Gebiete gewebt Null, zu jedem Gebiete gefügt, dasfelbe Gebiet.

Beweis. Die Sätze $^\circ A + 0 = {^\circ A}$, $^\circ A \times 1 = {^\circ A}$ und $^\circ A \times 0 = 0$ gelten schon aus der Grösenlehre für jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, alfo auch für Gebiete. Für die Gebiete ist aber ferner

$$1 = 1\,(1 + 1 \times {^\circ A}) \qquad \text{(nach 38)}$$
$$= 1 + {^\circ A} \qquad \text{da } 1 \times {^\circ A} = {^\circ A} \text{ ist.}$$

41. **Satz. Annahme:** $^\circ A + {^\circ C} = {^\circ B} + {^\circ C}$ **und auch** $^\circ A \cdot {^\circ C} = {^\circ B} \cdot {^\circ C}$

Folgerung: $^\circ A = {^\circ B}$

Zwei Gebiete, welche zu einem dritten Gebiete gefügt, gleiche Summen, und mit einem dritten Gebiete gewebt, gleiche Zeuge oder Produkte geben, find einander gleich.

Beweis.
$$^\circ A = {^\circ A}\,({^\circ A} + {^\circ C}) \qquad \text{(nach 38)}$$
$$= {^\circ A}\,({^\circ B} + {^\circ C}) \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= {^\circ A} \cdot {^\circ B} + {^\circ A}{^\circ C} \qquad \text{(nach 35)}$$
$$= {^\circ A} \cdot {^\circ B} + {^\circ B}{^\circ C} \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= {^\circ B}\,({^\circ A} + {^\circ C}) \qquad \text{(nach 35)}$$
$$= {^\circ B}\,({^\circ B} + {^\circ C}) \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= {^\circ B} \qquad \text{(nach 38)}$$

42. **Satz. Annahme:** $^\circ A + {^\circ B} = 0 \cdot$

Folgerung: $^\circ A = 0, {^\circ B} = 0 \cdot$

Wenn die Summe zweier Gebiete Null ist, fo ist jedes der beiden Gebiete Null.

Beweis.
$$^\circ A = {^\circ A} + 0 \qquad \text{(nach 40)}$$
$$= {^\circ A} + ({^\circ A} + {^\circ B}) \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= ({^\circ A} + {^\circ A}) + {^\circ B} \qquad \text{(nach 35)}$$
$$= {^\circ A} + {^\circ B} \qquad \text{(nach 36)}$$
$$= 0 \qquad \text{(nach Annahme)}$$

Annahme: $^\circ A \cdot {^\circ B} = 1 \cdot$

Folgerung: $^\circ A = 1, {^\circ B} = 1 \cdot$

Wenn das Zeug (Produkt) zweier Gebiete Eins ist, fo ist jedes der beiden Gebiete Eins.

Beweis.
$$^\circ A = {^\circ A} \cdot 1 \qquad \text{(nach 40)}$$
$$= {^\circ A}\,({^\circ A}{^\circ B}) \qquad \text{(nach Annahme)}$$
$$= ({^\circ A}{^\circ A}) \cdot {^\circ B} \qquad \text{(nach 35)}$$
$$= {^\circ A} \cdot {^\circ B} \qquad \text{(nach 36)}$$
$$= 1 \qquad \text{(nach Annahme)}$$

Für die Gebiete der Ausdehnungslehre giebt es demnach kein Abziehen oder Subtrahiren und kein Teilen oder Dividiren, und giebt es kein negatives Gebiet und keinen Teiler oder Divifor. Denn wollte man $^\circ A - {^\circ A} = 0$ fetzen,

fo wäre $^\circ A + (-{}^\circ A) = 0$. alfo nach 42 auch $^\circ A = 0$, und wollte man $\frac{^\circ A}{^\circ A} = 1$ fetzen, fo wäre $^\circ A \cdot \frac{1}{^\circ A} = 1$, alfo nach 42 auch $^\circ A = 1$.

Erklärung. Das Nichtgebiet eines Gebietes $^\circ A$ wird das Gebiet $^\circ\bar{A}$ (gelefen Gebiet Nicht A) genannt, welches alle Einheiten enthält, welche in $^\circ A$ nicht enthalten find, dagegen keine der Einheiten enthält, welche in $^\circ A$ enthalten find. Das Gebiet $^\circ A$ heist dem Nichtgebiete gegenüber das Selbstgebiet. Das Nicht von $^\circ A + {}^\circ B$ wird durch $\overline{[^\circ A + {}^\circ B]}$, das Nicht von $^\circ A \times {}^\circ B$ wird durch $\overline{[^\circ A \times {}^\circ B]}$ bezeichnet. 43.

Um das Nicht anschaulich zu machen, muss man die Betrachtung auf ein gewisses Gebiet efgh einschränken, dann ist dies die 1 und $a + \bar{a} = 1$

Satz. $^\circ A + {}^\circ\bar{A} = 1$ | $^\circ A \cdot {}^\circ\bar{A} = 0$ 44.

Die Summe oder das verbindende Gebiet jedes Gebietes und feines Nichtes ist Eins.

Das Zeug (Produkt) oder das gemeinfame Gebiet jedes Gebietes und feines Nichtes ist Null.

Beweis. 1. Es ist $^\circ A \cdot {}^\circ\bar{A} = 0$ unmittelbar aus 33, da $^\circ A$ und $^\circ\bar{A}$ gar keine Einheit gemeinfam haben.

2. Es ist $^\circ A + {}^\circ\bar{A} = ({}^\circ A + {}^\circ\bar{A})\,1$ (nach 40). Das Zeug oder Produkt zweier Gebiete ist aber nach 30 das beiden Gebieten gemeinfame Gebiet, mithin find fämmtliche Einheiten, welche in $^\circ A + {}^\circ\bar{A}$ enthalten find, auch in 1 enthalten. Andrerfeits find alle Einheiten, welche in 1 enthalten find, auch in $^\circ A + {}^\circ\bar{A}$ enthalten, denn nach 43 find alle Einheiten, welche nicht in $^\circ A$ enthalten find, in $^\circ\bar{A}$ enthalten, mithin find in $^\circ A + {}^\circ\bar{A}$ alle Einheiten, welche es überhaupt giebt, alfo auch jede Einheit, welche in 1 enthalten ist.

Satz. Alle Nichtgebiete desfelben Gebietes find einander gleich, oder für jedes Gebiet giebt es nur ein Nichtgebiet desfelben. 45.

Beweis. Es feien $^\circ\bar{A}$ und $^\circ\bar{A}_1$ zwei Nichte desfelben Gebietes, fo ist

$^\circ A + {}^\circ\bar{A} = 1 = {}^\circ A + {}^\circ\bar{A}_1$ und $^\circ A \cdot {}^\circ\bar{A} = 0 = {}^\circ A \cdot {}^\circ\bar{A}_1$ (nach 44)

mithin $^\circ\bar{A} = {}^\circ\bar{A}_1$ (nach 41)

Satz. $^\circ\bar{\bar{A}} = {}^\circ A$ 46.

Das Nicht des Nichtes eines Gebietes ist wieder das erste Gebiet felbst.

Beweis. Es ist $^\circ\bar{A} + {}^\circ\bar{\bar{A}} = 1 = {}^\circ\bar{A} + {}^\circ A$ und $^\circ\bar{A} \cdot {}^\circ\bar{\bar{A}} = 0 = {}^\circ A \cdot {}^\circ\bar{A}$ (nach 43)

alfo ist $^\circ\bar{\bar{A}} = {}^\circ A$ (nach 41).

47. **Satz.** $\bar{1} = 0$

Das Nicht der Eins ist die Null.

Beweis. $1 + \bar{1} = 1 = 1 + 0$ (nach 44, 40)

$1 \cdot \bar{1} = 0 = 1 \cdot 0$ (nach 44, 40)

mithin $\bar{1} = 0$ (nach 41

$\bar{0} = 1$

Das Nicht der Null ist die Eins.

Beweis. $0 + \bar{0} = 1 = 0 + 1$ (nach 44, 40)

$0 \cdot \bar{0} = 0 = 0 \cdot 1$ (nach 44, 40)

mithin $\bar{0} = 1$ (nach 41)

48. **Satz.**

Annahme: ${}^\circ A \cdot {}^\circ\bar{B} = 0$, ${}^\circ\bar{A} \cdot {}^\circ B = 0$

Folgerung: ${}^\bullet A = {}^\bullet B$

Wenn bei zwei Gebieten das Zeug je des einen mit dem Nichte des andern Null ist, so sind beide Gebiete gleich.

Beweis. Nach 40 ist

$${}^\bullet A = {}^\bullet A \times 1$$
$$= {}^\bullet A\,({}^\circ B + {}^\circ\bar{B}) \quad \text{(nach 44)}$$
$$= {}^\bullet A{}^\circ B + {}^\circ A{}^\circ\bar{B} \quad \text{(nach 35)}$$
$$= {}^\circ A{}^\circ B \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= {}^\circ A{}^\bullet B + {}^\bullet\bar{A}{}^\circ B \quad \text{(nach Annahme)}$$
$$= ({}^\circ A + {}^\bullet\bar{A})\,{}^\circ B \quad \text{(nach 35)}$$
$$= {}^\bullet B \quad \text{(nach 44)}$$

Annahme: $({}^\circ A + {}^\circ\bar{B}) = 1$, $({}^\bullet A + {}^\circ\bar{B}) = 1$

Folgerung: ${}^\bullet A = {}^\bullet B$

Wenn bei zwei Gebieten die Summe je des einen mit dem Nichte des andern Eins ist, so sind beide Gebiete gleich.

Beweis. Nach 40 ist

$${}^\circ A = {}^\circ A \times 1$$
$$= {}^\circ A\,({}^\circ\bar{A} + {}^\bullet B) \quad \text{(Annahme)}$$
$$= {}^\bullet A{}^\circ\bar{A} + {}^\circ A{}^\bullet B \quad \text{(nach 35)}$$
$$= {}^\bullet A{}^\circ B \quad \text{(nach 44)}$$
$$= {}^\bullet A{}^\circ B + {}^\bullet\bar{B}{}^\bullet B \quad \text{(nach 44)}$$
$$= ({}^\circ A + {}^\bullet\bar{B})\,{}^\circ B \quad \text{(nach 35)}$$
$$= 1 \times {}^\bullet B = {}^\bullet B \quad \text{(nach Annahme)}$$

49. **Satz.** ${}^\circ A + {}^\circ B = {}^\bullet A{}^\bullet B + {}^\circ A{}^\circ\bar{B} + {}^\bullet\bar{A}{}^\circ B$

Die Summe zweier Gebiete ist gleich der Summe aus dem Zeuge der beiden Gebiete und den beiden Zeugen des einen Gebietes mit dem Nichte des andern.

Beweis.
$${}^\circ A + {}^\circ B = {}^\bullet A \cdot 1 + 1 \cdot {}^\circ B \quad \text{(nach 40)}$$
$$= {}^\bullet A\,({}^\bullet B + {}^\circ\bar{B}) + ({}^\bullet A + {}^\bullet\bar{A})\,{}^\circ B \quad \text{(nach 44)}$$
$$= {}^\bullet A{}^\circ B + {}^\bullet A{}^\circ\bar{B} + {}^\circ A{}^\circ B + {}^\bullet\bar{A}{}^\bullet B \quad \text{(nach 35)}$$
$$= {}^\circ A{}^\circ B + {}^\bullet A{}^\circ\bar{B} + {}^\circ\bar{A}{}^\bullet B \quad \text{(nach 36)}$$

50. **Satz.** ${}^\circ A + {}^\circ B + {}^\bullet\bar{A} \cdot {}^\circ\bar{B} = 1.$

Bei je zwei Gebieten ist die Summe aus den beiden Gebieten und dem Zeuge (Produkte) ihrer Nichte gleich Eins.

Beweis. $1 = 1 \cdot 1$ (nach 40)

$= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}\overline{A})({}^{\circ}B + {}^{\circ}\overline{B})$ (nach 44)

$= {}^{\circ}A{}^{\circ}B + {}^{\circ}A{}^{\circ}\overline{B} + {}^{\circ}\overline{A}{}^{\circ}B + {}^{\circ}\overline{A}{}^{\circ}\overline{B}$ (nach 35)

$= {}^{\circ}A + {}^{\circ}B + {}^{\circ}\overline{A}{}^{\circ}\overline{B}$ (nach 49)

Satz. $\overline{[}{}^{\circ}A + {}^{\circ}B) = {}^{\circ}\overline{A} \cdot {}^{\circ}\overline{B}$ | $\overline{[}{}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B) = {}^{\circ}\overline{A} + {}^{\circ}\overline{B}$ 51.

Das Nicht einer Summe oder des verbindenden Gebietes ist gleich dem Zeuge oder dem gemeinfamen Gebiete von den Nichten der Stücke.

Beweis.

${}^{\circ}A + {}^{\circ}B + {}^{\circ}\overline{A} \cdot {}^{\circ}\overline{B} = 1$ (nach 50)

$= {}^{\circ}A + {}^{\circ}B + \overline{[}{}^{\circ}A + {}^{\circ}B)$ (nach 44) und

$({}^{\circ}A + {}^{\circ}B) \cdot {}^{\circ}\overline{A} \cdot {}^{\circ}\overline{B}$

$= {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}\overline{A}{}^{\circ}\overline{B} + {}^{\circ}B{}^{\circ}\overline{A}{}^{\circ}\overline{B}$ (nach 35)

$= 0$ (nach 44)

$= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}B)\overline{[}{}^{\circ}A + {}^{\circ}B)$ (nach 44)

mithin ${}^{\circ}\overline{A}{}^{\circ}\overline{B} = \overline{[}{}^{\circ}A + {}^{\circ}B)$ (nach 41)

Das Nicht des Zeuges oder des gemeinfamen Gebietes ist gleich der Summe oder dem verbindenden Gebiete von den Nichten der Fache oder Faktoren.

Beweis.

${}^{\circ}A{}^{\circ}B + \overline{A} + {}^{\circ}\overline{B} = 1$ (nach 50)

$= {}^{\circ}A{}^{\circ}B + \overline{[}{}^{\circ}A{}^{\circ}B)$ (nach 44) und

${}^{\circ}A{}^{\circ}B({}^{\circ}\overline{A} + {}^{\circ}\overline{B})$

$= {}^{\circ}A{}^{\circ}B{}^{\circ}\overline{A} + {}^{\circ}A{}^{\circ}B{}^{\circ}\overline{B}$ (nach 35)

$= 0$ (nach 44)

$= {}^{\circ}A{}^{\circ}B \cdot \overline{[}{}^{\circ}A{}^{\circ}B)$ (nach 44)

mithin ${}^{\circ}\overline{A} + {}^{\circ}\overline{B} = \overline{[}{}^{\circ}A{}^{\circ}B)$ (nach 41)

Erklärung. Zwei Gebiete der Ausdehnungslehre heisen 52.

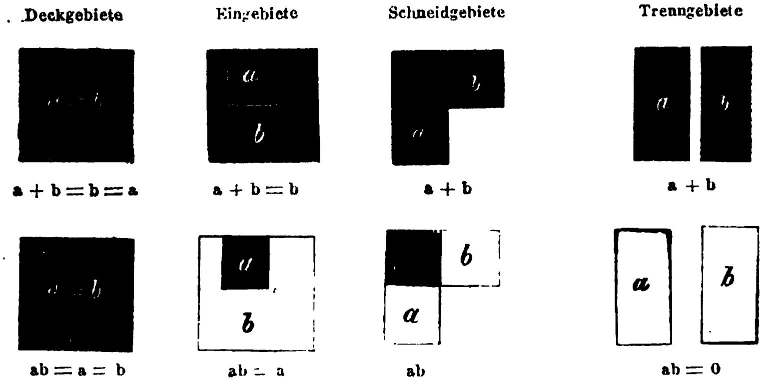
a. **Deckgebiete oder identische Gebiete, wenn beide einander gleich find oder wenn jede Gröse des einen Gebietes auch eine Gröse des andern ist,**

b. **Eingebiete oder inzidente Gebiete, wenn das eine ein Stück des andern ist, oder wenn jede Gröse des Stückes auch eine Gröse der Summe ist. Die Summe heist dann auch das übergeordnete oder weitere Gebiet, das Stück das untergeordnete oder engere Gebiet,**

c. **Schneidgebiete oder fekante Gebiete, wenn beide teils gemeinfame Grösen, teils jede eigentümliche Grösen hat Die Gefammtheit der gemeinfamen Grösen heist das gemeinfame Gebiet, die Gefammtheit aller Grösen, welche zu den Grösen beider Gebiete hörig find, das verbindende Gebiet,**

d. **Trenngebiete oder disjunkte Gebiete, wenn beide Gebiete keine Gröse gemeinfam haben.**

Die Anschauung ergiebt ſich aus der folgenden Zeichnung:



53. **Satz. Die Summe oder das verbindende Gebiet zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasſelbe Gebiet, die zweier Eingebiete ist das höhere Gebiet, die zweier Schneidgebiete ist das verbindende Gebiet, die zweier Trenngebiete (disjunkter Gebiete) ist die Summe aller den beiden Gebieten angehörigen Grösen.**

Beweis. Unmittelbar aus 36 und 30.

Das Zeug (Produkt) oder das gemeinſame Gebiet zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasſelbe Gebiet, das zweier Eingebiete ist das niedere Gebiet, das zweier Schneidgebiete ist das gemeinſame Gebiet, das zweier Trenngebiete (disjunkter Gebiete) ist Null.

Beweis. Unmittelbar aus 33, 36 und 30.

Veranschaulichung ſiehe bei Satz 52.

54. **Satz.** $°A + °B \geqq °B$

Die Summe der Gebiete ist jedem Stücke gleich oder übergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 53.

$°A°B \leqq °B$

Das Zeug (das Produkt) der Gebiete ist jedem Fache oder Faktor gleich oder untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 53.

Zur Veranschaulichung des Satzes kann die Zeichnung zu 52 für Deckgebiete und Untergebiete dienen.

55. **Satz.** $1 \geqq °A$

Die Eins ist das höchste Gebiet, welchem alle Gebiete untergeordnet ſind.

Beweis. Nach 40 ist $°A + 1 = 1$ und $°A \cdot 1 = °A$, alſo ist nach 53 die 1 höher als °A, was immer auch °A ſein möge.

$0 \leqq °A$

Die Null ist das niedrigste Gebiet, welches allen Gebieten untergeordnet ist.

Beweis. Nach 40 ist $°A + 0 = °A$ und $°A \times 0 = 0$, alſo ist nach 53 die 0 niedriger als °A, was immer auch °A ſein möge.

Satz. $({}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ B) = ({}^\circ A \leqq {}^\circ B)$

Ein Gebiet, welches zu einem andern zugefügt, den Wert desfelben nicht ändert, ist diefem deckend oder untergeordnet und

Man kann zu jedem Gebiete ohne Aenderung feines Wertes das Deckgebiet oder das untergeordnete Gebiet zufügen (addiren).

Beweis. Unmittelbar aus 54.

$({}^\circ A \cdot {}^\circ B = {}^\circ A) = ({}^\circ A \leqq {}^\circ B)$ 56.

Ein Gebiet, welches mit einem andern gewebt (multiplizirt) den Wert desfelben nicht ändert, ist diefem deckend oder übergeordnet und

Man kann jedes Gebiet ohne Aenderung feines Wertes mit einem deckenden oder ihm übergeordneten Gebiete verweben (multipliziren).

Beweis. Unmittelbar aus 54.

Satz. $({}^\circ A {}^\circ B = 0) = ({}^\circ B \leqq {}^\circ \overline{A})$

und $({}^\circ A {}^\circ B = 0) = ({}^\circ A \leqq {}^\circ \overline{B})$

Jedes Gebiet ist dem Nichte feines Trenngebietes gleich oder untergeordnet und

Wenn ein Gebiet dem Nichte eines andern gleich oder untergeordnet ist, fo ist es von demfelben getrennt oder disjunkt.

Beweis. 1. Wenn ${}^\circ A {}^\circ B = 0$ (Annahme), fo ist

$$\begin{aligned}
{}^\circ B &= {}^\circ B \cdot 1 && \text{(nach 40)} \\
&= {}^\circ B({}^\circ A + {}^\circ \overline{A}) && \text{(nach 44)} \\
&= {}^\circ B {}^\circ A + {}^\circ B {}^\circ \overline{A} && \text{(nach 35)} \\
&= {}^\circ B {}^\circ \overline{A} && \text{(nach Annahme)}
\end{aligned}$$

d. h. ${}^\circ B \leqq {}^\circ \overline{A}$ (nach 56)

2. Wenn ${}^\circ A \leqq {}^\circ \overline{B}$, fo ist nach 54 ${}^\circ \overline{B} = {}^\circ A + {}^\circ \overline{B}$, alfo

$$\begin{aligned}
0 &= {}^\circ \overline{B} {}^\circ B && \text{(nach 44)} \\
&= ({}^\circ A + {}^\circ \overline{B}) {}^\circ B \\
&= {}^\circ A {}^\circ B + {}^\circ \overline{B} {}^\circ B && \text{(nach 35)} \\
&= {}^\circ A {}^\circ B && \text{(nach 44)}
\end{aligned}$$

$({}^\circ \overline{A} {}^\circ B = 0) = ({}^\circ B \leqq {}^\circ A)$ 57.

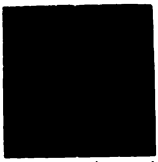
$({}^\circ \overline{A} {}^\circ B = 0) = ({}^\circ \overline{A} \leqq {}^\circ \overline{B})$

Jedes Gebiet ist dem Nichte feines gleich oder übergeordneten Gebietes getrennt oder disjunkt und

Wenn ein Gebiet einem andern gleich oder untergeordnet ist, fo ist es dem Nichte desfelben getrennt oder disjunkt.

Beweis. Unmittelbar aus 57 erste Seite.

Zur Veranschaulichung des Satzes dient folgende Zeichnung:



Satz. $({}^\circ A < {}^\circ B) = ({}^\circ \overline{B} < {}^\circ \overline{A})$ 58.

Das Nicht des höhern Begriffes ist dem Nichte des niedern Begriffes untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 57, denn $[{}^\circ A < {}^\circ B] = ({}^\circ A {}^\circ \overline{B} = 0) = ({}^\circ \overline{B} < {}^\circ \overline{A})$

59. **Satz.** $({}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ B)\,({}^\circ A{}^\circ B = {}^\circ B) = ({}^\circ A = {}^\circ B)$

Ein Gebiet, welches zu einem andern Gebiete zugefügt und auch mit ihm verwebt (multiplizirt) dies Gebiet nicht ändert, ist dieſem Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Da ${}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ B$ ist, ſo ist ${}^\circ A = {}^\circ A{}^\circ B$ nach 39, alſo ist ${}^\circ A = {}^\circ A{}^\circ B = {}^\circ B$ nach der Annahme.

60. **Satz.** $({}^\circ A < {}^\circ B)\,({}^\circ B < {}^\circ A) = ({}^\circ A = {}^\circ B)$

Wenn von zwei Gebieten das erste dem zweiten und zugleich das zweite dem ersten untergeordnet ist, ſo ſind beide Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Wenn ${}^\circ A < {}^\circ B$, ſo ist nach 56 auch ${}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ B$ und wenn ${}^\circ B < {}^\circ A$, ſo ist nach 56 auch ${}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ A$, mithin ist ${}^\circ A = {}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ B$

61. **Satz.** $({}^\circ A < {}^\circ B)\cdot({}^\circ\bar{A} < {}^\circ\bar{B}) = ({}^\circ A = {}^\circ B)$

Wenn das Nicht des niedern Gebietes dem des höhern Gebietes untergeordnet ist, ſo ſind beide Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Nach 58 ist da ${}^\circ A < {}^\circ B$ auch ${}^\circ\bar{B} < {}^\circ\bar{A}$, und da auch ${}^\circ\bar{A} < {}^\circ\bar{B}$, ſo ist nach 60 auch ${}^\circ A = {}^\circ B$

62. **Satz. Für deckende Gebiete und für Eingebiete finden die folgenden acht Gleichungen statt, und wenn eine dieſer Gleichungen stattfindet, ſind die Gebiete deckende oder Eingebiete.**

1. ${}^\circ A \leqq {}^\circ B$	3. ${}^\circ A + {}^\circ B = {}^\circ B$	5. ${}^\circ A{}^\circ B = {}^\circ A$	7. ${}^\circ A{}^\circ\bar{B} = 0$
2. ${}^\circ\bar{B} \leqq {}^\circ\bar{A}$	4. ${}^\circ\bar{A} + {}^\circ\bar{B} = {}^\circ\bar{A}$	6. ${}^\circ\bar{A}{}^\circ\bar{B} = {}^\circ\bar{B}$	8. ${}^\circ\bar{A} + {}^\circ B = 1$

Beweis. Unmittelbar 1 nach 53; 2 nach 58; 3, 4. 5 und 6 nach 56; 7 nach 57. Es bleibt alſo nur für 8 der Beweis zu führen; es ist aber

$$1 = 1 + {}^\circ B \qquad \text{(nach 40)}$$
$$= {}^\circ\bar{A} + {}^\circ A + {}^\circ B \qquad \text{(nach 44)}$$
$$= {}^\circ\bar{A} + {}^\circ B \qquad \text{(nach 56)}$$

63. **Satz. Für Trenngebiete (disjunkte Gebiete) finden die folgenden acht Gleichungen statt und wenn eine dieſer Gleichungen stattfindet, ſo ſind die Gebiete getrennt oder disjunkt.**

1. ${}^\circ A \leqq {}^\circ\bar{B}$	3. ${}^\circ A + {}^\circ\bar{B} = {}^\circ\bar{B}$	5. ${}^\circ A\cdot{}^\circ\bar{B} = {}^\circ A$	7. ${}^\circ A{}^\circ B = 0$
2. ${}^\circ B \leqq {}^\circ\bar{A}$	4. ${}^\circ\bar{A} + {}^\circ B = {}^\circ\bar{A}$	6. ${}^\circ\bar{A}\cdot{}^\circ B = {}^\circ B$	8. ${}^\circ\bar{A} + {}^\circ\bar{B} = 1$

Beweis. Unmittelbar aus 62, indem man ${}^\circ B$ in ${}^\circ\bar{B}$ und ${}^\circ\bar{B}$ in ${}^\circ B$ umwandelt, da wenn ${}^\circ A$ und ${}^\circ B$ disjunkt, d. h. nach 53 ${}^\circ A{}^\circ B = 0$ auch nach 57 ${}^\circ A$ dem ${}^\circ\bar{B}$ untergeordnet ist.

64. **Erklärung. Das Hauptgebiet ${}^\circ H$ heist das Gebiet, zu welchem alle der Betrachtung unterworfenen Grösen hörig ſind. Alle Grösen**

welche auserhalb des Gebietes liegen, werden für die Betrachtung gleich Null gesetzt. Alle Gebiete, welche das Hauptgebiet schneiden, werden nur soweit betrachtet, als sie in das Hauptgebiet fallen.

Erklärung, Die Ergänzung eines Gebietes heist das Nichtgebiet jenes Gebietes, soweit die Einheiten des Nichtgebietes im Hauptgebiete enthalten sind, oder sie ist das Zeug des Nichtgebietes mit dem Hauptgebiete. 65.

Satz. Die Betrachtung wird auf das Hauptgebiet H beschränkt, indem jedes Glied der Formel mit dem Hauptgebiete H verwebt oder multiplizirt wird. 66.

Beweis. Da für die Gebiete nur Zufügung und Verwebung vorkommt, und für diese Rechnungen alle Klammern gelöst werden können, so erhält, wenn man alle Klammern löst, jedes Glied die Form $\alpha\,{}^\circ A$ und die ganze Formel die Form

$\underset{1,n}{S}\,\alpha_a{}^\circ A_a = \underset{1,m}{S}\,\beta_b{}^\circ B_b$. Wenn man hier beide Seiten mit H verwebt, so erhält die Formel die Gestalt

$\left(\underset{1,n}{S}\,\alpha_a{}^\circ A_a\right){}^\circ H = \left(\underset{1,m}{S}\,\beta_b{}^\circ B_b\right){}^\circ H$, oder nach 35 und Grösenlehre 90

$\underset{1,n}{S}\,\alpha_a{}^\circ A_a{}^\circ H = \underset{1,m}{S}\,\beta_b{}^\circ B_b{}^\circ H$

Sei nun ${}^\circ B_c$ ein Gebiet auserhalb des Hauptgebietes, so ist ${}^\circ B_c{}^\circ H = 0$ nach 33. Sei ${}^\circ B_d$ ein Gebiet, welches ${}^\circ H$ schneidet, so ist ${}^\circ B_d{}^\circ H$ nach 30 das beiden Gebieten gemeinsame Gebiet, d. h. es wird nur soweit betrachtet, als es in das Hauptgebiet fällt. Sei endlich ${}^\circ B_e$ ein Gebiet innerhalb des Hauptgebietes, so ist nach 62 auch ${}^\circ B_e{}^\circ H = {}^\circ B_e$. Aus 1 wird $1\cdot{}^\circ H = {}^\circ H$.

Satz. Alle Sätze 34 bis 63 über die Gebiete bleiben bestehen, sofern man für jedes Gebiet das Zeug des Gebietes mit dem Hauptgebiet, für 1 das Hauptgebiet und für jedes Nichtgebiet die Ergänzung zum Hauptgebiete setzt. 67.

Beweis. Unmittelbar aus 66.

5. Die Zeuge oder Produkte von Ausdehnungsgrösen.

Erklärung. Das Zeug oder Produkt von n Einheiten erster Klasse heist eine Einheit nter Klasse, sofern es ungleich Null ist. Jede Einheit nter Klasse, welche wenigstens eine andere Einheit erster Klasse enthält, als jede andere Einheit nter Klasse, ist eine von diesen freie Gröse. 68.

Ich habe das Gebiet von n gegenseitig freien Grösen erster Klasse oder von n ursprünglichen Einheiten ein Gebiet n ter Stufe genannt. Dagegen nenne ich das Zeug oder Produkt von n ursprünglichen Einheiten eine Einheit n ter Klasse, ebenso das Zeug oder Produkt von n gegenseitig freien Grösen erster Klasse eine Gröse n ter Klasse. Ich unterscheide also Stufe und Klasse und gebrauche die Stufe nur für die Gebiete, die Klasse nur für die Zeuge oder Produkte. Es ist diese Benennung der Zeuge oder Produkte aber auch geschichtlich berechtigt. In der Bindelehre oder Kombinationslehre heist ein Gebinde von n Einfachen oder Elementen abc···n längst ein Gebinde n ter Klasse. Es liegt kein Grund vor, von diesem geschichtlichen Gebrauche abzugehen. Die Sätze aber werden dadurch klarer Betrachtet man z. B. die Zeuge oder Produkte von m einfachen gegenseitig freien Grösen in einem Gebiete n ter Stufe, so ist es klarer von den Grösen m ter Klasse in einem Gebiete n ter Stufe zu reden, als von den Grösen m ter Stufe in einem Gebiete n ter Stufe.

Die gegebene Erklärung besagt, dass zwischen den verschiedenen Einheiten höherer Klasse nicht noch Bedingungsgleichungen herrschen dürfen, wodurch die eine als Vielfachensumme der andern gesetzt wird. Denn sei

$\alpha\,E + \beta\,F + \gamma\,G + \cdots = 0$, wo E, F, G··· verschiedene Einheiten höherer Klasse sind, und sei wenigstens eine der Vorzahlen z. B. α ungleich Null, so ist die dieser Vorzahl zugehörige Einheit E nach 14 zu den Einheiten F, G·· hörig, also nicht frei von den Einheiten F, G····

69. **Satz. Wenn $\alpha\,E + \beta\,F + \gamma\,G + \cdots = 0$ wo E, F, G··· verschiedene Einheiten höherer Klasse sind, so ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$,·· oder eine Gröse, welche zu den verschiedenen Einheiten höherer Klasse hörig oder welche eine Vielfachensumme dieser höheren Einheiten ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre sämmtlichen Vorzahlen Null sind.**

Beweis: Unmittelbar aus Satz 15.

70. **Satz. In jedem Zeuge oder Produkte zweier Grösen der Ausdehnungslehre kann man, statt die einzelnen Grösen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist**

$$(\alpha a)\,(\beta b) = (\alpha\beta)\,(ab)$$

Beweis: Es ist $(\alpha a)(\beta b) = \alpha\,(a\beta)\,b$ (nach $3_{,1}$).

$= \alpha\,(\beta a)\,b$ (nach 4).

$= (\alpha\beta)\,(ab)$ (nach $3_{,1}$).

71. **Satz. In jedem Zeuge oder Produkte mehrer Grösen der Ausdehnungslehre kann man, statt die einzelnen Grösen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist**

$$P(\alpha a, \beta b \cdots) = (\alpha\beta\cdots)\,P(a, b\cdots)$$

Satz. In jedem Zeuge oder Produkte mehrer Grösen der Ausdehnungslehre kann man die Fache oder Faktoren, welche Vielfache derſelben Gröse ſind, ohne Aenderung des Wertes vertauschen, oder es ist 72.

$$P(\alpha a, \beta a \cdot \cdot) = P(\beta a, \alpha a \cdot \cdot)$$

Beweis: $P(\alpha a, \beta a \cdot \cdot) = (\alpha\beta \cdot \cdot)\, P(a, a \cdot \cdot)$ (nach 71)

$= (\beta\alpha \cdot \cdot)\, P(a, a \cdot \cdot)$ (nach Zahlenlehre 160)

$= P(\beta a, \alpha a \cdot \cdot)$ (nach 71)

Satz. Ein Zeug, dessen einer Fach (Faktor) eine Vielfachenſumme ist, ist gleich einer Vielfachenſumme von entsprechenden Zeugen, welche man erhält, wenn man statt der gegebenen Vielfachenſumme die Stücke ſetzt oder 73.

$$P(\alpha a + \beta b + \cdot \cdot)\, c = \alpha\, P_{ac} + \beta\, P_{bc} + \cdot \cdot$$

Beweis. Unmittelbar aus Grösenlehre 71 und Ausdehnungslehre 71.

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier Vielfachenſummen aus beliebigen Grösen erhält man, indem man jede Gröse der ersten mit jeder der zweiten zu einem Teilzeuge einwebt (multiplizirt), jedes dieſer Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Grösen gehörigen Vorzahlen vervielfacht, und dann ſämmtliche Zeuge, welche ſich auf dieſe Weiſe bilden lassen, zufügt oder addirt, oder 74.

$$(S\, \alpha_a\, a_a) \cdot (S\, \beta_b\, b_b) = S\, \alpha_a\, \beta_b\, (a_a\, b_b)$$

wo a_a b_b beliebige Grösen, α_a β_b beliebige Zahlen.

Beweis: $(S\, \alpha_a\, a_a) \cdot (S\, \beta_b\, b_b) = S\, \alpha_a\, [a_a \cdot (S\, \beta_b\, b_b)]$ (nach 73)

$= S\, \alpha_a\, [\beta_b\, (a_a\, b_b)]$ (nach 73)

$= S\, \alpha_a\, \beta_b\, (a_a\, b_b)$ (nach 12)

Satz. Der Satz 74 gilt auch für beliebig viele Fache oder Faktoren, d. h. 75.

$$(S\alpha_a\, a_a) \cdot (S\beta_b\, b_b) \cdot (S\, \gamma_c\, c_c) \cdots = S\, (\alpha_a\, \beta_b\, \gamma_c \cdots)\, (a_a\, b_b\, c_c \cdots)$$

wo a_a, b_b, $c_c \cdots$ beliebige Grösen und α_a, β_b, $\gamma_c \cdots$ beliebige Zahlen.

Beweis: Wenn der Satz für irgend eine Anzahl m von Fachen oder Faktoren gilt (Annahme), ſo gilt er auch für m + 1 Fache. Es ſei nach der Annahme

$(S\, \alpha_a\, a_a) \cdot (S\, \beta_b\, b_b) \cdots (S\, \mu_m\, m_m) = S\, (\alpha_a\, \beta_b \cdots \mu_m)\, (a_a\, b_b \cdots m_m)$ ſo ist

$(S\, \alpha_a\, a_a) \cdot (S\, \beta_b\, b_b) \cdots (S\mu_m\, m_m) \cdot (S\, \nu_n\, n_n)$

$= [S\, (\alpha_a\, \beta_b \cdots \mu_m)\, (a_a \cdot b_b \cdots m_m)]\, (S\, \nu_n\, n_n)$ (nach Annahme)

$= S\, (\alpha_a\, \beta_b \cdots \mu_m\, \nu_n)\, (a_a \cdot b_b \cdots m_m \cdot n_n)$ (nach 74)

Nun gilt der Satz 75 nach Satz 74 für zwei Fache oder Faktoren mithin gilt er fortschreitend auch für beliebig viele.

76. **Satz. Das Zeug oder Produkt von n Vielfachenſummen von Einheiten erster Klasse ist eine Vielfachenſumme von Einheiten n ter Klasse, ſoweit die Zeuge der n Einheiten erster Klasse ungleich Null bleiben.**

Beweis: Unmittelbar aus 75.

Die in Satz 68 bis 75 entwickelten Geſetze ſind die allgemeinen Geſetze, welche in der Ausdehnungslehre für alle Arten von Zeugen oder Produkten gelten. Die eigentümlichen Geſetze für die einzelnen Arten der Zeuge oder Produkte von Grösen gehen aus den Bedingungsgleichungen hervor, welche für die Zeuge (Produkte) der Grösen aufgestellt werden. Die Zahlgrösen der Ausdehnungslehre unterliegen den gewöhnlichen Geſetzen der Zahlenlehre; es kommt demnach nur noch darauf an, die Bedingungsgleichungen für die Zeuge der Einheiten aufzustellen.

Wir haben bereits in der Einleitung zur Ausdehnungslehre bei der Idee der Ausdehnungslehre die Arten der Webung oder Multiplikation besprochen, welche bei der Ausdehnungslehre in Betracht kommen. Wir ſahen dort, dass für die Ausdehnungslehre, als niederer Zweig der Ausenlehre oder Syntheſis, nur die Flachung, für welche $e_a e_a = 0$ und $e_a e_b = - e_b e_a$ ist, und die innere Webung, für welche $e_a e_b = 0$ und $e_a e_a \gtrless 0$ ist, in Betracht kommen, dass aber die letztere ſich leicht auf die Flachung zurückführen lässt. Dass demnach für die Ausdehnungslehre nur die Flachung als eigentümliche Art der Webung verbleibt.

Für die Erweiterungslehre oder für den höhern Zweig der Ausenlehre oder der Syntheſis, lernten wir dort noch die Flechtung kennen, für welche ſowohl $e_a e_a \gtrless 0$, als auch $e_a e_b \gtrless 0$ ist. Wir könnten hienach ſofort zur Flachung übergehen; indessen ziehe ich es doch vor, im Texte noch einen beſondern Weg einzuschlagen und die Zeuge oder Produkte der Ausdehnungslehre den Zeugen oder Produkten der Bindelehre, wie der Logik gegenüber zu stellen, und hoffe ich dadurch noch mehr Klarheit in die Sache zu bringen.

In der Ausdehnungslehre kann man, wie in dem innern Denken zwei Ordnungen der Webung oder Multiplikation unterscheiden, nämlich

1. Die innere Webung, den Begriffen der Bestimmungslehre oder Logik entsprechend, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten gleich Null geſetzt wird. $e_a \cdot e_b = 0$.
2. Die äusere Webung, den Gebinden der Bindelehre oder Kombinationslehre entsprechend, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten ungleich Null geſetzt wird. $e_a e_b \gtrless 0$.

77. **Erklärung. Die innere Webung oder die innere Multiplikation heist in der Ausdehnungslehre diejenige Art der Webung, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten Null, das Zeug oder Produkt zweier gleicher Einheiten eins ist.**

$$e_a \cdot e_b = 0 \qquad e_a \cdot e_a = 1.$$

Von der innern Webung giebt es nur eine Art. Da $e_a \cdot e_b = 0$, fo muss $e_a \cdot e_a \gtrless 0$ fein, denn fetzen wir hier auch $e_a \cdot e_a = 0$, fo werden fämmtliche Grösen Null, d. h. es verschwindet die ganze Webung. Das Zeug $e_a \cdot e_a$ muss alfo ungleich Null fein. Soll nun aber diefe Bedingung eine allgemeine fein, fo dass $e_a \cdot e_a \cdots e_a \gtrless 0$ ist und will man nicht für jedes diefer Zeuge einen andern Wert einführen, fo ist es das Einfachste, wir fetzen $e_a \cdot e_a \cdots e_a = e_a \cdot e_a$. Soll nun auch gleichzeitig $e_a \cdot \frac{1}{e_a} = 1$ gelten, fo folgt allgemein für jedes beliebige a

$$e_a \cdot e_a = e_a \cdot e_a \cdot 1 = e_a \cdot e_a \left(e_a \cdot \frac{1}{e_a}\right) = e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot 1 \cdot \frac{1}{e_a} \qquad \text{(nach 4)}$$

$$= e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot \left(e_a \cdot \frac{1}{e_a}\right) \cdot \frac{1}{e_a} = e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot \frac{1}{e_a} \cdot \frac{1}{e_a} \qquad \text{(nach 4)}$$

$$= e_a \cdot e_a \cdot \frac{1}{e_a} \cdot \frac{1}{e_a} \qquad \text{da } e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot e_a = e_a \cdot e_a$$

$$= e_a \cdot \left(e_a \cdot \frac{1}{e_a}\right) \cdot \frac{1}{e_a} = e_a \cdot 1 \cdot \frac{1}{e_a}$$

$$= e_a \cdot \frac{1}{e_a} = 1.$$

d. h. es werden dann alle Zeuge $e_a \cdot e_a = 1$ für beliebiges a. Man kann alfo alle Zeuge oder Produkte zweier gleicher Einheiten gleich eins fetzen und ist für innere Webung allgemein:

$$e_a \cdot e_a = e_b \cdot e_b = 1 \qquad e_a \cdot e_b = 0.$$

Wir könnten nun zunächst die Gefetze für die innere Webung entwickeln; aber, wie fich im Folgenden zeigen wird, gewinnen wir diefe Gefetze bequemer durch Anwendung der äusern Webung und können demnach fofort zur äusern Webung übergehen.

Erklärung. Die äusere Webung oder Multiplikation heist in der Ausdehnungslehre jede Art der Webung, für welche das Zeug oder Produkt zweier oder mehrer verschiedener Einheiten ungleich Null ist oder $e_a \cdot e_b \gtrless 0 \qquad e_a \cdot e_b \cdot e_c \cdots \gtrless 0$. 78.

In der Bindelehre oder Kombinationslehre werden wir vier Arten von Zeugen oder Produkten kennen lernen, für welche fämmtlich die Bedingungsgleichung $e_a \cdot e_b \gtrless 0$ gilt, nämlich

1. die Geschiede (Komplexionen) oder die Zeuge, für welche Vertauschung zweier Einheiten gilt,
2. die Geänder (Variationen) oder die Zeuge, für welche diefe Vertauschung nicht gilt,

und in jeder diefer Gattungen zwei Arten, nämlich

a) die Vollgebinde (Kombinationen mit Wiederholung) oder die Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist und
b) die Ausgebinde (Kombinationen ohne Wiederholung) oder die Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist.

Wir erhalten alfo in der Bindelehre folgende vier Arten von Zeugen oder Produkten:

Die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung): $e_a \cdot e_a \gtrless 0$; $e_a \cdot e_b = e_b \cdot e_a$
Die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung): $e_a \cdot e_a = 0$; $e_a \cdot e_b = e_b \cdot e_a$

Die Vollgeänder (Variationen mit Wiederholung): $e_a \cdot e_a \gtrless 0$; $e_a \cdot e_b \gtrless e_b \cdot e_a$
Die Ausgeänder (Variationen ohne Wiederholung): $e_a \cdot e_a = 0$; $e_a \cdot e_b \gtrless e_b \cdot e_a$

Verſuchen wir nun dieſe vier Arten der Zeuge oder Produkte in die Ausdehnungslehre einzuführen, ſo ergeben ſich die folgenden Betrachtungen:

Für die erste Art der Webung, welche den Vollgeschieden (Komplexionen mit Wiederholung) entspricht, für welche alſo Vertauschung zweier Einheiten gilt, und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt die Grundformel der Verwebung $e_r\, e_s = e_s\, e_r$ (Grösenlehre 61) und geht daraus das ganze Geſetz der Verwebung (Grösenlehre 62) hervor, d. h. man kann in jeder Grösenknüpfung ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und Malklammern beliebig ſetzen oder weglassen, die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflöſen, indem man jedes Stück des einen Faches mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt (die Produkte addirt). Es ist dies das Geſetz, welches in der Zahlenlehre ſeine Geltung hat, der Begründer der Ausdehnungslehre H. Grassmann hat dieſe Art der Multiplikation daher die algebraische genannt. Es versteht ſich von ſelbst, dass ihr auch eine algebraische Teilung oder Diviſion, eine Höhung oder Potenzirung u. ſ. w. zur Seite geht, und dass man für alle dieſe Verknüpfungen ausgedehnter Grösen unmittelbar die Geſetze der Zahlenlehre als geltend annehmen darf. Ich nenne dieſe Art der Webung in der Ausdehnungslehre eine Flechtung, das Zeug oder Produkt ein Flecht*. Der Name algebraische Multiplikation kann leicht zu Irrungen und Missverständnissen führen. Es ist ja unzweifelhaft, dass jedes Vielfache αa ein algebraisches Produkt ist, dasſelbe wird in allen Arten der Multiplikation, bei innerer Webung, wie bei Flachung und Flechtung angewandt. Das Flecht der Ausdehnungslehre muss von dieſem algebraischen Produkte unterschieden werden, ich wende daher lieber den Namen Flechtung und Flecht an. Der Bruder hat den Namen algebraische Multiplikation nur gewählt, um den Mathematikern die Sache mehr mundgerecht zu machen und dadurch die Einführung zu erleichtern. Der Begriff der Flechtung ist überdies ein neuer und ist daher für den neuen Begriff auch ein neuer Name erforderlich oder doch wünschenswert.

Für die zweite Art der Webung, welche den Ausgeschieden (Komplexionen ohne Wiederholung) entspricht, für welche die Vertauschung zweier Einheiten gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Bedingung $e_a\, e_a = 0$, und, da in der Ausdehnungslehre jede Gröse als Einheit geſetzt werden kann, auch $0 = (e_a + e_b)(e_a + e_b) = e_a\, e_a + e_a\, e_b + e_b\, e_a + e_b\, e_b$ alſo da $0 = e_a\, e_a = e_b\, e_b$, auch $0 = e_a\, e_b + e_b\, e_a$.

Da nun ferner Vertauschung gilt, ſo ist $e_a\, e_b = e_b\, e_a$ mithin auch $e_a\, e_b = 0$, d. h. es werden für dieſe Art der Verwebung ſämmtliche Zeuge oder Produkte Null und fällt dieſe Art der Rechnung mithin aus.

Für die dritte Art der Webung, welche den Vollgeändern (Variationen mit Wiederholung) entspricht, für welche alſo nicht Vertauschung gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt nur die Grund-

* Das Flechten bezeichnet ein Verknüpfen von jedem mit jedem, ist alſo für dieſe Art der Zeuge ein ganz passender Name, da e_1 und e_2 geflochten $\begin{matrix} e_1\, e_1 & e_2\, e_1 \\ e_1\, e_2 & e_2 \cdot e_2 \end{matrix}$ geben und alle diese Produkte ihre Werte behalten, ohne zu verschwinden.

formel der Einwebung (Grösenlehre 57) und daraus abgeleitet das Gefetz der Einwebung (Grösenlehre 60), d. h. man kann in jeder Grösenknüpfung die Plusklammern und die Malklammern beliebig fetzen oder weglassen und die Beziehungsklammern auflöfen, indem man jedes Stück des einen Faches (Faktors) mit jedem des andern webt und die Zeuge zufügt (die Produkte addirt). Es scheint hienach, als könnte auch diefe Art der Webung oder Multiplikation in der Ausdehnungslehre verwandt werden; allein es ergiebt fich, dass diefe Art der Webung nicht Zeuge liefert, welche gleichmäsig oder fymmetrisch und zugleich unabhängig von den ursprünglich gefetzten Einheiten find, und dass diefe Art der Webung daher für die Ausdehnungslehre keine allgemeinen Gefetze liefert.

Für die vierte Art der Webung, welche den Ausgeändern (Variationen ohne Wiederholung) entspricht, für welche alfo nicht Vertauschung gilt, für welche aber das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Grundformel $e_a e_a = 0$ und, da in der Ausdehnungslehre jede Gröse als Einheit gefetzt werden kann, auch $0 = (e_a + e_b)(e_a + e_b) = e_a e_a + e_a e_b + e_b e_a + e_b e_b$ mithin da $0 = e_a e_a = e_b e_b$ auch $0 = e_a e_b + e_b e_a$, mithin $e_b e_a = -- e_a e_b$.

Es bildet diefe Art der Webung oder Multiplikation die der Ausdehnungslehre eigentümliche Verknüpfung. Der Begründer der Ausdehnungslehre hat diefe Art der Multiplikation die **kombinatorische** genannt, ich nenne fie eine **Flachung**, das Zeug oder Produkt ein **Flach***. Der Name kombinatorisches Produkt kann leicht zu Irrungen und Missverständnissen führen. In der Kombinationslehre wird jede Kombination ein Zeug oder Produkt und zwar, wenn $aa \gtrless a$, $a + a = a$ ist, ein kombinatorisches Produkt genannt. Das Flach der Ausdehnungslehre muss von diefem kombinatorischen Produkte unterschieden werden. Ich wende daher lieber die Namen Flach und Flachung an. Die Sätze werden dadurch auch deutlicher und kürzer. Der Bruder hat den Namen kombinatorisches Produkt wieder aus Rückficht auf die Mathematiker gewählt, um diefen die Sache leichter und bequemer zu machen.

Wir haben alfo von der äusern Webung oder Multiplikation der Ausdehnungslehre zwei Arten kennen gelernt, die Flechtung und die Flachung oder die algebraische und die kombinatorische Multiplikation. Von diefen ist die Flachung bei weitem die einfachere. In der Tat, betrachten wir bei zwei Einheiten e_1 und e_2 das Zeug zweier Fache oder Faktoren $[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)]$ $= \alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + \alpha_1 \beta_2 [e_1 e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2 e_1]$, fo führt fich dies bei der zweiten Gattung, wo $[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0$, $[e_2 e_1] = - [e_1 e_2]$ ist, auf $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1 e_2]$, alfo auf nur eine Einheit, nämlich $[e_1 e_2]$ zurück; ja, wenn in einer Entwicklungsreihe nie mehr als jene beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, fo wird man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, $[e_1 e_2] = 1$ fetzen können, und erhält dann als das Zeug eine Zahl. Ganz anders bei der ersten Gattung, wo fich jenes Zeug auf $\alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) [e_1 e_2]$ zurückführt, alfo auf nicht weniger als drei Einheiten. Wenn hier nur die beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, fo kann man als ein-

---

* **Flach** stammt vom alten Verb spal, sskr. phal spalten, bersten. Davon ist abgeleitet palaka, sskr. phalaka, gr. plák-s, lat. planca, Brett, Planke, ahd. flah, nhd. Flach, die Fläche: das auseinander Tretende, fich Ausdehnende.

fachsten Fall $e_1 = 1$ und $e_2 = i = (-1)^{1/2}$ fetzen und hat dann $e_1 e_1 = -e_2 \cdot e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = i$, das heist, man erhält dann als Grösen die Richtgrösen oder komplexen Grösen $a + ib$, welche alfo nur einen einfachen Fall diefer Art der Knüpfung darstellen. Da es in der Entwicklung der Wissenschaft vor allen Dingen darauf ankommt, die nach und nach hervortretenden Grösen in ihrem einfachsten Begriffe zu erfassen, fo werden wir mit der Flachung beginnen und fie in der Ausdehnungslehre behandeln, während wir die Flechtung erst im höhern Zweige der Ausenlehre oder Synthefis erörtern werden.

79. **Erklärung. Das äusere Zeug oder Produkt heist in der Ausdehnungslehre ein Flach (ein kombinatorisches Produkt), wenn das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, und auch je zwei Zeuge oder Produkte von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Fache oder Faktoren aus einander hervorgehen, zur Summe Null geben, das Zeichen derfelben ist die Flachkammer [ ], oder in Formeln**

$$[e_a \cdot e_a] = 0 \qquad [e_a\, e_b] + [e_b\, e_a] = 0.$$

80. **Erklärung. Das äusere Zeug oder Produkt heist in der Ausenlehre oder Synthesis ein Flecht oder ein algebraisches Produkt, wenn das Zeug je zweier gleichen Einheiten, die ungleich Null find, auch ungleich Null ist, und in dem Zeuge ungleicher Fache oder Faktoren Vertauschung der Fache gilt, das Zeichen derfelben ist das der gewöhnlichen Webung, oder in Formeln** $e_a\, e_a \gtrless 0 \quad e_a\, e_b = e_b\, e_a$

Um vollständig klar zu sein, entwickeln wir beispielsweise die verschiedenen Einheiten 3. Klasse aus den 6 ursprünglichen Einheiten $e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5\, e_6$, wobei wir die Zeuge, in denen gleiche ursprüngliche Einheiten vorkommen, in dem einen Beispiele, wie bei den Flechten, ungleich Null, im andern, wie bei den Flachen, gleich Null setzen.

Die Flechte dritter Klasse aus 6 ursprünglichen Einheiten.	Die Flache dritter Klasse aus 6 ursprünglichen Einheiten.
$e_1e_1e_1$, $e_1e_1e_2$, $e_1e_1e_3$, $e_1e_1e_4$, $e_1e_1e_5$, $e_1e_1e_6$	
$e_1e_2e_2$, $e_1e_2e_3$, $e_1e_2e_4$, $e_1e_2e_5$, $e_1e_2e_6$	$e_1e_2e_3$, $e_1e_2e_4$, $e_1e_2e_5$, $e_1e_2e_6$
$e_1e_3e_3$, $e_1e_3e_4$, $e_1e_3e_5$, $e_1e_3e_6$	$e_1e_3e_4$, $e_1e_3e_5$, $e_1e_3e_6$
$e_1e_4e_4$, $e_1e_4e_5$, $e_1e_4e_6$	$e_1e_4e_5$, $e_1e_4e_6$
$e_1e_5e_5$, $e_1e_5e_6$	$e_1e_5e_6$
$e_1e_6e_6$	
$e_2e_2e_2$, $e_2e_2e_3$, $e_2e_2e_4$, $e_2e_2e_5$, $e_2e_2e_6$	
$e_2e_3e_3$, $e_2e_3e_4$, $e_2e_3e_5$, $e_2e_3e_6$	$e_2e_3e_4$, $e_2e_3e_5$, $e_2e_3e_6$
$e_2e_4e_4$, $e_2e_4e_5$, $e_2e_4e_6$	$e_2e_4e_5$, $e_2e_4e_6$
$e_2e_5e_5$, $e_2e_5e_6$	$e_2e_5e_6$
$e_2e_6e_6$	
$e_3e_3e_3$, $e_3e_3e_4$, $e_3e_3e_5$, $e_3e_3e_6$	
$e_3e_4e_4$, $e_3e_4e_5$, $e_3e_4e_6$	$e_3e_4e_5$, $e_3e_4e_6$

$e_3e_5e_5$, $e_3e_5e_6$	$e_3e_5e_6$
$e_3e_6e_6$	
$e_4e_4e_4$, $e_4e_4e_5$, $e_4e_4e_6$	
$e_4e_5e_5$, $e_4e_5e_6$	$e_4e_5e_6$
$e_4e_6e_6$	
$e_5e_5e_5$, $e_5e_5e_6$	
$e_5e_6e_6$	
$e_6e_6e_6$	

Jeder, welcher die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass dies die Geschiede oder Komplexionen sind, aber als Zeuge oder Produkte im Sinne der äusern Webung oder Multiplikation aufgefasst.

Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

6. Die Gesetze der Flachungslehre.

81\. **Erklärung. Das Flach oder kombinatorische Produkt heist ein Zeug oder Produkt von Einheiten, die Webung heist Flachung oder kombinatorische Multiplikation, wenn**

1) **jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist und**
2) **die Summe zweier Zeuge von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Einheiten aus einander hervorgehen, Null ist.**

Das Zeichen des Flaches ist eine um das Zeug gesetzte Flachklammer, gelesen „Flach" z. B. $[e_1\,e_2]$ gelesen Flach $e_1\,e_2$.

Zwei Grösen heisen gleichgeordnet, wenn in zwei Reihen der Grösen dieselbe Gröse die frühere, sie heisen entgegengesetzt geordnet, wenn in der einen Reihe die Gröse die frühere ist, welche in der andern die spätere ist.

Die Flachung oder die kombinatorische Multiplikation haben wir die äusere Webung oder Multiplikation genannt, für welche $[e_a \cdot e_a] = 0$ und $[e_a \cdot e_b] + [e_b \cdot e_a] = 0$ ist. In der obigen Erklärung ist die letzte Bedingungsgleichung etwas allgemeiner gefasst, wie sie für die weitere Ableitung erforderlich ist, die erste Bedingungsgleichung aber fortgelassen, da sie sich aus der andern von selbst ergiebt und in Satz 829 abgeleitet wird.

Für die Flachklammer wird meist aus Bequemlichkeit der Drucker die scharfkantige Klammer [ ] genommen, welche allgemein für gewöhnliche Klammern verwandt wird, sobald zwei Arten von Klammern zu unterscheiden sind z. B. $[a + b\,(c - x^2)]^{1/2}$. Es kann nun leicht zu Verwirrungen führen, wenn dieselbe Klammer zur Bezeichnung der Flache und zugleich für gewöhnliche

Zeuge oder Produkte verwandt wird. Ich habe daher eine abweichende Form für die Flachklammer eingeführt, welche jede Verwechselung ausschliest.

Satz. $[e_1 e_2 e_3 \cdot \cdot] \gtrless 0.$ 82.

Jedes Flach, in welchem nur ungleiche Einheiten geflacht sind, ist ungleich Null.

Satz. $[Ee_r e_s] + [Ee_s e_r] = 0.$ 83.

Die Summe zweier Flache von Einheiten, welche auseinander durch Vertauschung der letzten beiden Einheiten hervorgehen, ist Null.

Satz. Für die Flache gilt das Einigungs- und das Beziehungsgesetz für alle Grösen, dagegen gilt das Vertauschungsgesetz der Fache oder Faktoren nur für Zahlen. 84.

Beweis. Unmittelbar aus 3 und 4.

Für die Flachung oder kombinatorische Multiplikation gilt nicht die Vertauschung der Fache oder Faktoren, sofern dies Einheiten oder Grösen der Ausdehnungslehre sind. So ist nach 818 $e_r e_s \gtrless e_s e_r$, wenn $r \gtrless s$ ist; aber da $[e_r e_s] + [e_s e_r] = 0$ ist, so besteht der Unterschied dieser Flache nur im Vorzeichen; es ist $[e_r e_s] = -[e_s e_r]$. Es ändert sich also bei der Vertauschung der Fache oder Faktoren nur das Vorzeichen oder die Vorzahl. Die nächste Aufgabe wird es demnach sein, festzustellen, welches Vorzeichen das Flach erhält, wenn die Ordnung der Fache beliebig geändert wird.

Satz. Für die Flachung gelten namentlich auch die Sätze 70 bis 76. 85.

Beweis. Da diese Sätze für alle Arten der Webung oder Multiplikation gelten, so gelten sie auch für die Flachung.

Satz. $[Abc] + [Acb] = 0$, **wo b und c Grösen erster Klasse sind.** 86.

Man kann in jedem Flache von Grösen erster Klasse die beiden letzten vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis. a. Es seien b und c Einheiten. Die Gröse A lässt sich als Zeug von Grösen erster Klasse auf die Form bringen $A = S\alpha_r E_r$, wo E_r ein Zeug von Einheiten ist. Führt man diesen Ausdruck ein, so ist

$$[Abc] + [Acb] = \left[\underset{1,n}{S}\alpha_a E_a bc\right] + \left[\underset{1,n}{S}\alpha_a E_a cb\right] = \underset{1,n}{S}\alpha_a [E_a bc] + \underset{1,n}{S}\alpha_a [E_a cb] \quad \text{(nach 73)}$$

$$= \underset{1,n}{S}\alpha_a ([E_a bc] + [E_a cb]) \quad \text{(nach 4)}$$

$$= \underset{1,n}{S}\alpha_a \cdot 0 = 0 \quad \text{(nach 83)}$$

b. Es ſeien b und c Grösen erster Klasse und ſei $b = \underset{1,n}{S}\beta_r e_r$ und $c = \underset{1,n}{S}\gamma_r e_r$, ſo ist

$$[Abc] + [Acb] = \left[A\left(\underset{1,n}{S}\beta_a e_a\right)\left(\underset{1,n}{S}\gamma_b e_b\right)\right] + \left[A\left(\underset{1,n}{S}\gamma_b e_b\right)\left(\underset{1,n}{S}\beta_a e_a\right)\right]$$

$$= \underset{1,n}{S}\beta_a\gamma_b[Ae_a e_b] + \underset{1,n}{S}\beta_a\gamma_b[Ae_b e_a] \qquad \text{(nach 71)}$$

$$= \underset{1,n}{S}\beta_a\gamma_b([Ae_a e_b] + [Ae_b e_a]) \qquad \text{(nach 3)}$$

$$= \underset{1,n}{S}\beta_a\gamma_b 0 = 0 \qquad \text{(nach 86.a)}$$

Viel einfacher ist der Beweis für ein Gebiet dritter Stufe, wie es der äusere Raum ist. Ich lasse daher dieſen Beweis noch in der Anmerkung folgen, da er die Sache klarer macht.

Beweis für ein Gebiet dritter Stufe. Es ſei $a = \underset{1,3}{S}\alpha_a e_a$, $b = \underset{1,3}{S}\beta_b e_b$, $\gamma = \underset{1,3}{S}\gamma_c e_c$, ſo ist nach 75

$$[abc] + [acb] = S(\alpha_a\beta_b\gamma_c)[e_a e_b e_c] + S(\alpha_a\gamma_c\beta_b)[e_a e_c e_b]$$

$$= S(\alpha_a\beta_b\gamma_c)([e_a e_b e_c] + [e_a e_c e_b]) \qquad \text{(nach } 3_{,2})$$

$$= S(\ _a\beta_b\gamma_c)0 = 0 \qquad \text{(nach 83)}$$

87. **Satz.** **[AbcD] + [AcbD] = 0, wo b und c Grösen erster Klasse.**

Man kann in jedem Flache von Grösen erster Klasse beliebige zwei auf einander folgende Grösen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengeſetzt nimmt.

Beweis. Es ist $[AbcD] + [AcbD] = ([Abc] + [Acb])D$ (nach $3_{,2}$)

$= 0 \cdot D = 0$ (nach 86)

88. **Satz.** $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$ oder $[P_{a,b}] = -[P_{b,a}]$

In jedem Flache von Grösen erster Klasse kann man beliebige zwei Grösen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis. Wenn zwischen a und b noch n Grösen erster Klasse stehen: ſo vertausche man a mit der nächstfolgenden und ſo fort mit den n + 1 nächstfolgenden, ſo hat es die Stelle des b; demnächst vertausche man b mit der nächstvorhergehenden und demnächst mit den n vorhergehenden, ſo hat es die Stelle, welche zuerst a hatte. Im Ganzen ſind hierbei zwei auf einander folgende Grösen 2n + 1 mal vertauscht und ist dadurch das Vorzeichen 2 + 1 mal entgegengeſetzt geworden und zuletzt entgegengeſetzt geblieben, d. h. es ist $[P_{a,b}] = -[P_{b,a}]$.

Wir kommen nun zu der Betrachtung der Flache von Grösen höherer Klasse oder zu den Flachen der Flache.

Satz. $[AB_rC_s] = (-1)^{rs}[AC_sB_r]$, 89.

wo B_r ein Zeug (Produkt) von r, C_s ein Zeug von s Fachen oder Faktoren erster Klasse ist oder

Wenn man in einem Flache von Grösen erster Klasse eine Reihe von r Grösen mit einer unmittelbar darauf folgenden Reihe von s Grösen vertauscht, ohne im Uebrigen die Folge der Grösen zu ändern, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal $(-1)^{rs}$.

Beweis. Es sei $C_s = c_1c_2 \cdot\cdot c_s$; rückt man nun c_1 vor B_r, d. h. vertauscht man es mit der nächstvorhergehenden und so fort mit den r vorhergehenden Grösen, so ändert sich das Zeichen r mal und es wird

$$[AB_rC_s] = [AB_rc_1c_2 \cdot\cdot c_s] = (-1)^r[Ac_1B_rc_2 \cdot\cdot c_s]$$
$$= (-1)^{2r}[Ac_1c_2B_rc_3 \cdot\cdot c_s] \text{ u. s. w.}$$
$$= (-1)^{sr}[Ac_1c_2 \cdot\cdot c_sB_r] = (-1)^{rs}[AC_sB_r]$$

Satz. $[A_qB_rC_s] = (-1)^{qr+qs+rs}[C_sB_rA_q]$ 90.

Wenn man in einem Flache von Grösen erster Klasse eine Reihe von q Grösen, welche durch eine Reihe von r Grösen von einer Reihe von s Grösen getrennt sind, mit letzteren vertauscht, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal $(-1)^{qr+qs+rs}$

Beweis. Es ist $[A_qB_rC_s] = (-1)^{(q+r)s}[C_sA_qB_r]$ (nach 89)

$$= (-1)^{(q+r)s}(-1)^{qr}[C_sB_rA_q] \text{ (nach 89)}$$
$$= (-1)^{qr+qs+rs}[C_sB_rA_q].$$

Satz. $[P] = (-1)^r[Q]$, 91.

wo [P] und [Q] dieselben Fache oder Faktoren erster Klasse enthalten und r die Anzahl der Grösenpare bezeichnet, welche in P und Q entgegengesetzt geordnet sind oder

Zwei Flache von Grösen erster Klasse, welche dieselben Grösen enthalten, sind einander gleich, wenn eine gerade, einander entgegengesetzt, wenn eine ungerade Anzahl von Grösenparen in beiden Flachen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis. Seien in [Q] r Grösenpare erster Klasse entgegengesetzt wie in [P], so vertausche man jedes dieser r Pare, so wird aus [Q] [P], zugleich aber ist bei jedem dieser Tausche das Zeichen nach Satz 88 entgegengesetzt geworden, d. h. es ist $[P] = (-1)^r[Q]$.

Satz. $[P_{a,a}] = 0$. 92.

Wenn in einem Flache zwei Fache oder Faktoren gleich sind, so ist das Flach Null.

Beweis. Nach Satz 88 ist $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$; alſo wenn a und b gleich ſind, ſo ist

$$0 = [P_{a,a}] + [P_{a,a}] = 2[P_{a,a}], \text{ d. h. } [P_{a,a}] = 0.$$

93. **Satz. Ein Flach von Grösen erster Klasse $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ ist Null wenn zwischen den Grösen eine Hörigkeit herrscht.**

Beweis. Es ſei $a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_n a_n$, ſo ist

$$[a_1 a_2 \cdots a_n] = [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_n a_n) a_2 a_3 \cdots a_n]$$
$$= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \cdots a_n] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \cdots a_n] + \cdots + \alpha_n [a_n a_2 a_3 \cdots a_n]$$
(nach 4 und 73)
$$= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0$$
(nach 92)

Wir kommen nun zu den Sätzen über die Flachung von Vielfachenſummen. Die Flache der Vielfachenſummen von Einheiten erster Klasse entwickeln ſich nach dem Satze 75.

94. **Satz.** $[(S\alpha_a a_a) \cdot (S_m \beta_b b_b) \cdot (S\gamma_c c_c) \cdots (S\mu_m m_m)] = S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)[a_a b_b c_c \cdots m_m]$ **wo** $a_a, b_b, c_c \cdots m_m$ **beliebige Grösen erster Klasse,** $\alpha_a \beta_b \cdots$ **beliebige Zahlen oder**

Das Flach mehrer Vielfachenſummen aus beliebigen Grösen erhält man, indem man jede Gröse der ersten Vielfachenſumme mit jeder der zweiten, das Zeug derſelben mit jeder der dritten u. s. w. zu einem Teilzeuge flacht (multiplizirt), jedes dieſer Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Grösen gehörigen Vorzahlen vervielfacht, und dann ſämmtliche Zeuge, welche ſich auf dieſe Weiſe bilden lassen, zufügt oder addirt.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 75.

95. **Satz.** $(S\alpha_a a_a) \cdot (S\beta_b a_b) \cdots (S\mu_m a_m) = S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)[a_a a_b a_c \cdots a_m]$ **wo** $a_a a_b a_c \cdots a_m$ **beliebige Grösen erster Klasse im Gebiete n ter Stufe und** $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \cdots \mu_m$ **beliebige Zahlen ſind.**

Beweis. Unmittelbar nach Satz 94.

Da ſich nach Satz 91 für die Flache beim Vertauschen der Fache oder Faktoren nur das Vorzeichen ändert, ſo kann man bei allen den Zeugen, welche dieſelben m Grösen $a_a a_b \cdots a_m$ enthalten, die Fache unter Berückſichtigung des Vorzeichens ſo umordnen, dass die Zeiger der Grösen steigend geordnet ſind und kann dann alle dieſe Zeuge in ein Glied zuſammenfassen, indem man die Summe der Vorzahlen dieſer ſämmtlichen Zeuge, jede mit ihrem Vorzeichen in eine Vorzahl vereinigt und dieſe mit dem Flache vervielfacht.

Die Vorzahl ist dann die Summe der Tausche oder Permutationen aus den m Fachen $\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$, ſofern man jeder Tausche das entsprechende Vorzeichen giebt.

Man erhält dieſe Tausche, wenn man jede der m Zahlen α_a z. B. α_c mit jeder der andern Zahlen $\beta, \gamma \cdots \mu$ webt, ſofern alle dieſe Zahlen andere Zeiger als α_a, hier alſo als α_c haben. Es wird alſo α_c mit den ſämmtlichen Tauschen aus den m—1 Fachen $\beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$, wo b, c ⋯ m ungleich c ist, gewebt. Die Anzahl

der Glieder in dieser Summe ist also gleich der Anzahl der Tausche aus m Grösen d. h. $1\cdot 2\cdot 3\cdots m = m!$ Gleiche Zeiger können unter den m Zahlen $\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\cdots\mu_{\mathfrak{m}}$ nicht vorkommen, da dann das Flach $[a_{\mathfrak{a}}b_{\mathfrak{b}}\cdots a_{\mathfrak{m}}]$ nach 92 Null wäre.

Das Vorzeichen jedes Gliedes ist $(-1)^r$ wo r die Zahl der niederen Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist. So ist in $\alpha_4\beta_1\gamma_2\delta_3$ das $r = 3$, in $\alpha_3\beta_4\gamma_1\delta_2$, das $r = 4$, in $\alpha_4\beta_3\gamma_1\delta_2$ das $r = 5$ u. s. w.

Wir nennen die Summe aus diesen Tauschen mit ihren Vorzeichen die Flachtausche.

Es ist also $S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}})[a_1a_2] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[a_1a_2]$

Es ist $S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}})[a_1a_2a_3] = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1)[a_1a_2a_3]$

Es ist $S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{d}})[a_1a_2a_3a_4] =$

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4 - \alpha_2\beta_1\gamma_3\delta_4 - \alpha_1\beta_3\gamma_2\delta_4 + \alpha_2\beta_3\gamma_1\delta_4 + \alpha_3\beta_1\gamma_2\delta_4 - \alpha_3\beta_2\gamma_1\delta_4$$
$$- \alpha_1\beta_2\gamma_4\delta_3 + \alpha_2\beta_1\gamma_4\delta_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_4\delta_2 - \alpha_2\beta_3\gamma_4\delta_1 - \alpha_3\beta_1\gamma_4\delta_2 + \alpha_3\beta_2\gamma_4\delta_1$$
$$+ \alpha_1\beta_4\gamma_2\delta_3 - \alpha_2\beta_4\gamma_1\delta_3 - \alpha_1\beta_4\gamma_3\delta_2 + \alpha_2\beta_4\gamma_3\delta_1 + \alpha_3\beta_4\gamma_1\delta_2 - \alpha_3\beta_4\gamma_2\delta_1$$
$$- \alpha_4\beta_1\gamma_2\delta_3 + \alpha_4\beta_2\gamma_1\delta_3 + \alpha_4\beta_1\gamma_3\delta_2 - \alpha_4\beta_2\gamma_3\delta_1 - \alpha_4\beta_3\gamma_1\delta_2 + \alpha_4\beta_3\gamma_2\delta_1)[a_1a_2a_3a_4]$$

Man entwickelt die Flachtausche am bequemsten schrittweise erst für 2, dann für 3, für 4 u. s. w. Fache und zwar so, dass man jedesmal das neu hinzutretende Fach zuerst die letzte Stelle, dann die vorletzte, drittletzte bis zur ersten Stelle hin einnehmen lässt. Bei 2 Fachen erhält man dann $1\cdot 2$, bei 3 Fachen $1\cdot 2\cdot 3$, bei 4 Fachen $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ Glieder, kurz bei n Fachen $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ Glieder, kurz man erhält die sämmtlichen Tausche, wie diese in der Kombinationslehre entwickelt sind. Die Zeichen folgen dann leicht. Bei 5 Fachen würde Beispielsweise die 5 jede der 5 Stellen einnehmen können und würden auf jeder Stelle die 4 anderen Fache die 24 Glieder entwickeln, welche wir bei $n = 4$ kennen gelernt haben.

Erklärung. Die Flachtausche oder Determinante aus m Reihen von je m Zahlen $\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\cdots\mu_{\mathfrak{m}}$ heist der Gliederausdruck, welchen man aus dem Zeuge $\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\cdots\mu_{\mathfrak{m}}$, in welchem die Zeiger steigend geordnet sind, dadurch erhält, dass man in ihm die Zeiger nach und nach auf alle möglichen Weisen versetzt, während man die Reihenfolge $\alpha\beta\gamma\cdots\mu$ unverändert lässt und dann jedes dieser Flache mit $(-1)^r$ vervielfacht, wo r die Zahl der niederen Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist. 96.

Das Zeichen der Flachtausche oder Determinante aus m Reihen zu n Zahlen ist $\Delta^m(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\cdots\mu_{\mathfrak{m}})$ kurz Δ^m.

Als Beispiel gebe ich noch

$$\overset{3}{\Delta}(\delta_4\zeta_6\vartheta_8) = \delta_4\zeta_6\vartheta_8 - \delta_4\zeta_8\vartheta_6 - \delta_6\zeta_4\vartheta_8 + \delta_6\zeta_8\vartheta_4 + \delta_8\zeta_4\vartheta_6 - \delta_8\zeta_6\vartheta_4.$$

Der Name, die Determinante, d. h. wörtlich die Bestimmende, die Begrenzende bezeichnet eigentlich gar nicht die Sache; denn ebenso gut wie dieser Ausdruck ist jede Vorzahl eine determinans. Das Eigentümliche dieser Zahl dagegen ist, dass sie die Summe ist aus den Tauschen, sofern man jedem Gliede das bei der Flachung entstehende Vorzeichen giebt, der Name die Flachtausche bezeichnet diesen Begriff genau. Ich habe daher diese Zahl zum Unterschiede von den andern Vorzahlen die Flachtausche genannt, setze aber stets den lateinischen Namen daneben.

97. **Satz.** $\Delta^{m\cdot} = \underset{1,n}{S}(-1)^{r}\alpha_a\beta_b\gamma_c\cdots\mu_m$, **wo r die Zahl der niedern Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.**

Die wohlgeordneten Flache mter Klasse $[a_a a_b a_c \cdots a_m]$ aus dem Gebiete nter Stufe $a_1 a_2 \cdots a_n$ bilden die Ausgeschiede oder Komplexionen ohne Wiederholung aus nEinfachen oder Elementen zur mten Klasse, jedes Ausgeschiede als ein Flach betrachtet. Ich nenne diese Flache die Geschiedsflache.

98. **Erklärung. Die Geschiedsflache aus n Grösen zur mten Klasse heisen die Flache mit m Fachen aus diesen Grösen, welche man erhält, wenn man diese Grösen nach steigendem Zeiger in eine Reihe ordnet, und dann jede dieser Grösen mit jeder folgenden flacht, dann weiter jedes Flach aus a Grösen mit jeder auf die letzte Gröse dieses Flaches folgenden Gröse flacht und so fortfährt, bis in jedem Flache m der Grösen als Fache oder Faktoren enthalten sind.**

Das Zeichen der Geschiedsflache aus n Grösen zur mten Klasse ist $[a_1, a_2, \cdots a_n]^{\overset{\bullet}{m}}$.

Einige Beispiele werden eine Anschauung der Geschiedsflache geben. Es ist

$[a_1, a_2, \cdots a_6]^{\overset{\bullet}{1}} =$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$[a_1, a_2, \cdots a_6]^{\overset{\bullet}{2}} =$		a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5	a_1a_6
			a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5	a_2a_6
				a_3a_4	a_3a_5	a_3a_6
					a_4a_5	a_4a_6
						a_5a_6
$[a_1, a_2, \cdots a_6]^{\overset{\bullet}{3}} =$			$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_5$	$a_1a_2a_6$
				$a_1a_3a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_3a_6$
					$a_1a_4a_5$	$a_1a_4a_6$
				$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_1a_5a_6$
				$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_2a_3a_6$
					$a_2a_4a_5$	$a_2a_4a_6$
						$a_2a_5a_6$
					$a_3a_4a_5$	$a_3a_4a_6$
						$a_3a_5a_6$
						$a_4a_5a_6$

Jeder, der die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass diese Geschiedsflache nichts anderes sind, als die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung), sofern man jedes Geschiede als ein Flach auffasst.

Die Anzahl dieser Geschiedsflache ist demnach

$$\overset{\bullet}{n}{}^{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad \text{wo } m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots m.$$

99. **Satz. Die Geschiedsflache aus n Grösen zur m ten Klasse sind die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung) aus diesen n Grösen zur m ten Klasse, wenn man jedes Geschiede als ein Flach betrachtet.**

Beweis. Unmittelbar aus Satz 98 und den Vorbemerkungen.

Satz. $(S\alpha_a a_a)\cdot(S\beta_b a_b)\cdots(S\mu_m a_m) = S\Delta^m\cdot[a_a a_b\cdots a_m]$ wo 100.
$a < b < c \cdots < m$. **Jedes Flach von m Grösen erster Klasse, welche zu n gegenfeitig freien Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig find, ist die Vielfachenfumme der Geschiedsflache diefer freien Grösen zur m ten Klasse, in welcher die Vorzahl jedes Geschiedsflaches die Flachtausche oder Determinante aus denjenigen m Vorzahlen ist, welche zu den m hörigen Grösen des Geschiedsflaches gehören.**

Beweis. Unmittelbar nach 95 in Verbindung mit 97 und 99.

Satz. Das Flach von n Grösen erster Klasse, welche zu n gegen- 101.
feitig freien Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig find, erhält man, indem man aus den n Reihen der je n Vorzahlen die Flachtausche oder Determinante bildet und diefe mit dem Flache $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ vielfacht, oder

Alle Flache n ter Klasse, welche demfelben Gebiete n ter Stufe angehören, lassen fich als Zeuge einer Zahl mit dem Flache der n ursprünglichen Einheiten darstellen.

Beweis. Unmittelbar nach 100.

Satz. Wenn ein Flach von Grösen erster Klasse Null ist, fo 102.
herrscht zwischen den Grösen eine Hörigkeit.

Beweis. Es fei $[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0$ das gegebene Flach, dessen Grösen $a_1 \cdots a_m$ zu den n Einheiten $e_1 \cdots e_n$ hörig feien. Angenommen nun, zwischen den Grösen $a_1 \cdots a_m$ herrschte keine Hörigkeit, fo könnte man nach Satz 23 zu den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ noch n—m Grösen $a_{m+1} \cdots a_n$ hinzufügen der Art, dass die Einheiten $e_1 \cdots e_n$ Vielfachenfummen der Grösen $a_1 \cdots a_n$ wären. Führt man diese Vielfachenfummen in das Flach $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ ein und führt die Rechnung nach Satz 97 aus, fo erhält man eine Gleichung der Form

$[e_1 e_2 \cdots e_n] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_n]$, wo α eine Zahl ist,

$= \alpha[(a_1 a_2 \cdots a_m)(a_{m+1} \cdots a_n)]$ (nach 4)

$= \alpha[0(a_{m+1} \cdots a_n)] = 0$ (nach Vorausfetzung)

Dies aber widerstreitet dem Satze 84; alfo ist die Annahme unmöglich, d. h. zwischen den Grösen herrscht eine Hörigkeit.

Satz, Sämmtliche Sätze der Flachung bleiben bestehen, wenn 103.
man statt der ursprünglichen n Einheiten erster Klasse beliebige n gegenfeitig freie zu den Einheiten hörige Grösen erster Klasse einführt.

Beweis. Statt der ursprünglichen n Einheiten kann man nach Satz 24 beliebige n gegenfeitig freie zu den Einheiten hörige Grösen als Einheiten einführen und find alle Grösen, welche zu den ersten hörig find, auch zu den letzten hörig. Für die neu eingeführten

Grösen gilt ferner wie für die ursprünglichen Einheiten das Gesetz 81, dass 1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist, (denn wäre es gleich Null, so müsste nach Satz 102 zwischen den Grösen eine Hörigkeit herrschen) und dass 2) [Abc] + [Acb] = 0 ist, nach Satz 86. Es gilt also die Erklärung der Flachung, mithin gelten auch alle Gesetze der Flachung.

104. **Satz. Wenn** $Z_b = \underset{1,n}{S}{}^b\alpha_a x_a$ und $x_a = \underset{1,n}{S}{}^a\beta_c y_c$ **auch** $Z_b = \underset{1,n}{S}{}^b\gamma_c y_c$ **ist,** **so ist** ${}^b\gamma_c = {}^b\alpha_1{}^1\beta_c + {}^b\alpha_2{}^2\beta_c + \cdots + {}^b\alpha_n{}^n\beta_c$

Beweis. Es ist $Z_b = {}^b\alpha_1 x_1 + {}^b\alpha_2 x_2 + \cdots + {}^b\alpha_n x_n$

$$x_a = {}^a\beta_1 y_1 + {}^a\beta_2 y_2 + \cdots + {}^a\beta_n y_n$$

setzt man dies in erste Gleichung für Z_b ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} Z_b = &({}^b\alpha_1{}^1\beta_1 + {}^b\alpha_2{}^2\beta_1 + \cdots + {}^b\alpha_n{}^n\beta_1)y_1 \\ &+ ({}^b\alpha_1{}^1\beta_2 + {}^b\alpha_2{}^2\beta_2 + \cdots + {}^b\alpha_n{}^n\beta_2)y_2 \\ &+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ ({}^b\alpha_1{}^1\beta_n + {}^b\alpha_2{}^2\beta_n + \cdots + {}^b\alpha_n{}^n\beta_n)y_n \end{aligned}$$

es ist aber auch

$$Z_b = {}^b\gamma_1 y_1 + {}^b\gamma_2 y_2 + \cdots + {}^b\gamma_n y_n$$

mithin ist $\quad {}^b\gamma_c = {}^b\alpha_1{}^1\beta_c + {}^b\alpha_2{}^2\beta_c + \cdots + {}^b\alpha_n{}^n\beta_c$

Der Satz lehrt das Flach umzuformen, wenn statt der ursprünglichen n Einheiten beliebige n gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Grösen als neue Einheiten eingeführt sind.

105. **Satz. Wenn** $[Z_1Z_2\cdots Z_n] = \overset{n}{\Delta}_\alpha \cdot [x_1x_2\cdots x_n]$,

$[x_1x_2\cdots x_n] = \overset{n}{\Delta}_\beta [y_1y_2\cdots y_n]$ **und**

$[Z_1Z_2\cdots Z_n] = \overset{n}{\Delta}_\gamma [y_1y_2\cdots y_n]$ **ist,**

so ist $\overset{n}{\Delta}_\alpha \cdot \overset{n}{\Delta}_\beta = \overset{n}{\Delta}_\gamma$.

Beweis. Es ist

$$[Z_1Z_2\cdots Z_n] = \overset{n}{\Delta}_\alpha \cdot [x_1x_2\cdots x_n] = \overset{n}{\Delta}_\alpha \overset{n}{\Delta}_\beta [y_1y_2\cdots y_n]$$

$$= \overset{n}{\Delta}_\gamma [y_1y_2\cdots y_n] \quad \text{also} \quad \overset{n}{\Delta}_\alpha \overset{n}{\Delta}_\beta = \overset{n}{\Delta}_\gamma$$

Man nennt den Satz das Multiplikationstheorem für Determinanten. Man nennt $\overset{n}{\Delta}_\alpha$ die Original-Determinante, $\overset{n}{\Delta}_\gamma$ die transformirte Determinante, $\overset{n}{\Delta}_\beta$ die Substitutions-Determinante oder den Modulus der Transformation.

106. **Satz. Die Geschiedsflache (multiplikativen Kombinationen) gegenseitig freier Grösen sind auch gegenseitig frei oder**

Die Gleichung $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$, **wo** $\alpha, \beta \cdots$ **Zahlen, A, B** $\cdots$

Geschiedsflache gegenfeitig freier Grösen $a_1 \cdots a_n$ find, wird erfetzt durch die Gleichungsgruppe

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \cdots$$

Beweis. Die Gleichung $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$ flache man mit denjenigen der Grösen $a_1 \cdots a_n$, welche in A fehlen, und fei A_1 das Flach diefer Grösen, fo dass das Flach $[AA_1] = [a_1 a_2 \cdots a_n]$, dann erhält man $\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \cdots = 0$.

Hier find A, B, C verschiedene Geschiedsflache: es müssen alfo B, C $\cdots$ jede mindestens eine der Grösen enthalten, welche in A fehlt und welche alfo in A_1 vorkommen. Jedes der Flache $[BA_1]$, $[CA_1]$ enthält alfo diefelbe Gröse zweimal als Faktor und ist alfo nach Satz 92 Null.

Die obige Gleichung wird alfo $0 = \alpha[AA_1] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_n]$. Hier ist $[a_1 a_2 \cdots a_n] \gtrless 0$ nach Satz 102, alfo ist $\alpha = 0$ nach Zahlenlehre 175. Aus demfelben Grunde find $\beta, \gamma \cdots$ Null, d. h. zwischen den Geschiedsflachen herrscht keine Hörigkeit.

Satz. Zwei Flache von Grösen erster Stufe, welche ungleich Null find, find dann und nur dann deckend, wenn die aus ihren Grösen erster Stufe ableitbaren Gebiete deckend find, oder 107.

$[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m]$ **dann und nur dann, wenn stets**

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

gefetzt werden kann, welche Werte auch entweder $x_1 \cdots x_m$ oder $y_1 \cdots y_m$ haben mögen.

Beweis. a. Angenommen, es fei das Gebiet $a_1 \cdots a_m$ deckend mit dem Gebiete $b_1 \cdots b_m$. Dann können nach Satz 24 die Grösen $a_1 \cdots a_m$ als Vielfachenfummen der Grösen $b_1 \cdots b_m$ dargestellt werden und ist dann nach Satz 101

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist.}$$

Die beiden Flache find dann alfo nach Satz 9 deckend, d. h. $[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$.

b. Angenommen, es feien die beiden Flache deckend, d. h. $[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$, dann ist $[a_1 \cdots a_m] = \alpha[b_1 \cdots b_m]$. Flacht man nun beide Seiten mit der Gröse b_1, fo erhält man

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m b_1] = 0 \qquad \text{(nach Satz 92)}$$

Alfo herrscht zwischen den Grösen $a_1 a_2 \cdots a_m b_1$ nach Satz 102 eine Hörigkeit und da die Grösen $a_1 \cdots a_m$ nach Satz 93 gegenfeitig frei find, da $[a_1 \cdots a_m] \gtrless 0$, fo ist b_1 zu den Grösen $a_1 \cdots a_m$ hörig oder eine Vielfachenfumme der letztern. Aus gleichem Grunde find aber auch $b_2 \cdots b_m$ zu $a_1 \cdots a_m$ hörig. Da aber $[b_1 \cdots b_m] \gtrless 0$, fo find

nach Satz 830 die Grösen $b_1 \cdots b_m$ gegenſeitig frei. Wir haben alſo m gegenſeitig freie Grösen, welche zu m andern Grösen $a_1 \cdots a_m$ hörig ſind und ist alſo das Gebiet der erstern Grösen nach Satz 23 dem der letztern deckend.

Da zwei gleiche Grösen immer in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, ſo folgt aus dem Satze unmittelbar, dass zwei gleiche Flache immer ein und dasſelbe Gebiet haben, dem ſeine einfachen Fache oder Faktoren angehören, und dass daher auser dieſem Gebiete nur noch der durch eine Zahl darstellbare messbare Wert gegeben zu ſein braucht, damit der ganze Wert des Flaches genau bestimmt ſei. Ist nämlich dann in dem Gebiete irgend ein Flach gegeben, aus dessen einfachen Fachen dasſelbe ableitbar ist, ſo wird jedes andere Flach, aus dessen einfachen Fachen dasſelbe Gebiet ableitbar ist, durch eine einfache Zahl bestimmt ſein, welche das Verhältniss dieſes Flaches zu jenem bestimmt.

108. **Erklärung. Einfach heist eine Gröse m ter Klasse, wenn ſie ſich als ein Flach von m Grösen erster Klasse darstellen lässt.**

Das Gebiet dieſer Gröse heist das aus ihren m Einheiten erster Klasse ableitbare Gebiet.

Uebergeordnet, untergeordnet, schneidend, getrennt heist eine einfache Gröse einer andern gegenüber, wenn ihre Gebiete ſo heisen.

Zuſammengeſetzt heist eine Gröse m ter Klasse, wenn ſie ſich nicht als ein Flach von m Grösen erster Klasse darstellen lässt.

Als Beispiel einer zuſammengeſetzten Gröse kann man die Summe $[ab] + [cd]$ anführen, wenn a, b, c, d vier gegenſeitig freie Grösen ſind. Sollte nämlich $[ab] + [cd]$ eine einfache Gröse, etwa $= [fg]$ ſein, ſo müsste $[(ab + cd)(ab + cd)] = [fgfg] = 0$ ſein (nach 92); aber $[(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd] + [cdab]$, da $[ab\,ab]$ und $[cd\,cd]$ Null ſind. Aber (nach 91) ist $[abcd] = [cdab]$. Alſo $[(ab + cd)(ab + cd)] = 2[abcd]$. Somit müsste, wenn $[ab] + [cd]$ eine einfache Gröse wäre, $[abcd] = 0$ ſein, alſo (nach 102) zwischen a, b, c, d eine Hörigkeit herrschen, was wider die Vorausſetzung ist.

109. **Satz. Ein Flach aus m gegenſeitig freien Grösen erster Klasse ist eine einfache Gröse m ter Klasse und ist als Vielfachenſumme von Einheiten m ter Klasse darstellbar.**

7. Die linige Aenderung der Grösen erster Klasse.

Wir kommen nun zu den Aenderungen der Grösen erster Klasse, welche erfolgen können, ohne den Wert der Flache aus dieſen Grösen zu ändern.

110. **Erklärung. Eine einfache linige Aenderung heist die Aenderung einer Gröse erster Klasse, wenn in einer Grösenreihe statt einer Gröse die Summe dieſer Gröse und eines Vielfachen ihrer Nachbargröse geſetzt wird, während die andern Grösen unverändert bleiben oder**

wenn in der Reihe $\cdots p,q \cdots$ statt p,q nun $p,q+\alpha p$ oder $p+\alpha q,q$ gesetzt wird, wo α eine beliebige Zahl ist.

Eine mehrfache linige Aenderung heist eine Aenderung, wenn in der Grösenreihe wiederholt eine einfache linige Aenderung vorgenommen wird.

Satz. $[Pa,(b+\alpha a)] = [Pa,b]$ 111.

Ein Flach von Grösen erster Klasse ändert seinen Wert nicht, wenn man zu einer Gröse desselben ein beliebiges Vielfaches einer andern Gröse desselben zufügt oder addirt oder

Das Flach einer Grösenreihe wird durch linige Aenderung in seinem Werte nicht geändert.

Beweis. Es ist $[Pa,(b+\alpha a)] = [Pa,b] + \alpha[Pa,a]$ (nach 76)
$= [Pa,b]$ (nach 92)

Satz. Man kann in einer Grösenreihe statt einer Gröse die Summe dieser Gröse und eines Vielfachen einer beliebigen andern Gröse jener Reihe setzen und zwar wird diese Umwandlung durch linige Aenderung bewirkt. 112.

Beweis. Es sei die Reihe $p_1, p_2, \cdots p_n, q$, ich will beweisen, dass man durch mehrfache linige Aenderung statt p_1 die Summe $p_1+\alpha q$ setzen kann. Man nehme die folgenden Umwandlungen vor

$$p_1, p_2, \cdots p_{n-1}, p_n, q$$
$$p_1, p_2, \cdots p_{n-1}, p_n + \alpha q, q$$
$$p_1, p_2, \cdots p_{n-1} + p_n + \alpha q, p_n + \alpha q - \alpha q, q$$
$$p_1, p_2, \cdots p_{n-1} + p_n + \alpha q, p_n, q$$
$$p_1, p_2, \cdots p_{n-1} + p_n + \alpha q - p_n, p_n, q$$
$$p_1, p_2, \cdots p_{n-1} + \alpha q, p_n, q$$

so folgt zuletzt $p_1 + \alpha q, p_2, \cdots p_{n-1}, p_n, q$

Satz. Man kann in einer Grösenreihe zwei beliebige Grösen im umgekehrten Verhältnisse durch linige Aenderung ändern oder 113.

die Reihe $\cdot\cdot p \cdots q$ lässt sich durch linige Aenderung in $\alpha p \cdots \frac{q}{\alpha}$ umwandeln.

Beweis. Wenn p und q unmittelbar auf einander folgen, so lässt sich durch linige Aenderung p,q in $p,q+(\alpha-1)p$, dies in $p+q+(\alpha-1)p, q+(\alpha-1)p$, d. h. in $\alpha p+q$, $q+(\alpha-1)p$, dies in $\alpha p+q$, $q+(\alpha-1)p-\frac{\alpha-1}{\alpha}(\alpha p+q)$, d. h. in $\alpha p+q, \frac{q}{\alpha}$ und dies in $\alpha p+q-\alpha\cdot\frac{q}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}$, d. h. in $\alpha p, \frac{q}{\alpha}$ umwandeln. Zweitens:

Wenn p und q durch die Grösen $p_1, p_2 \cdots p_n$ getrennt ſind, ſo kann man für $p, p_1, p_2, \cdots q$ ſetzen $\alpha p, \frac{p_1}{\alpha}, p_2, \cdots q$, dann $\alpha p, p_1, \frac{p_2}{\alpha}, \cdots q$ und endlich $\alpha p, p_1, p_2, \cdots \frac{q}{\alpha}$.

114. **Satz. Umkehr von 111. Wenn zwei von Null verschiedene Flache einander gleich ſind, ſo lassen ſich die einfachen Fache des einen aus denen des andern durch linige Aenderung ableiten, oder wenn**

$$[abc \cdots m] = [ABC \cdots M] \gtrless 0$$

ſo lässt ſich die Grösenreihe a, b, c, ⋯ m in A, B, C, ⋯ M durch linige Aenderung umwandeln.

Beweis. Nach 101 müssen die Gebiete von a, b, c, ⋯ m und von A, B, C, ⋯ M deckend oder identisch ſein. Es müssen alſo die Grösen A, B, C, ⋯ M Vielfachenſummen sein von a, b, c, ⋯ m. In dieſen Vielfachenſummen darf die Vorzahl von einer dieſer Grösen, z. B. von a nicht in allen Ausdrücken gleichzeitig Null ſein, denn ſonst wären die m Grösen A, B, C, ⋯ M aus m — 1 Grösen b, c, ⋯ m ableitbar, alſo würde nach 26 eine Hörigkeit zwischen ihnen herrschen, alſo ihr Flach nach 93 Null ſein, was gegen die Annahme ist. Sei nun A die Gröse, in welcher die Vorzahl von A ungleich Null ist und ſei

$$A = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots + \mu m \qquad \text{wo alſo } \alpha \gtrless 0$$

ist, ſo kann ich nach 850 durch wiederholte linige Aenderung die Reihe a, b, c, ⋯ m in die Reihe $a + \frac{\beta}{\alpha} b + \frac{\gamma}{\alpha} c + \cdots + \frac{\mu}{\alpha} m, b, c, \cdots m$ umwandeln, d. h. in die Reihe $\frac{A}{\alpha}, b, c, \cdots m$. Dieſe kann man aber nach 113 in die Reihe $A, b, c, \cdots \alpha m$ umwandeln.

8. Die Flache der Grösen höherer Klassen.

115. **Satz. Zwei einfache Grösen höherer Klassen flacht man, indem man die Fache erster Klasse der ersten fortschreitend mit denen der zweiten flacht, oder**

$$[(a_1 a_2 \cdots)(b_1 b_2 \cdots)] = [a_1 a_2 \cdots b_1 b_2 \cdots]$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 84.

Da für die Flachung nach 84 Einigung der Fache gilt, ſo bedarf es nicht einer beſonderen Erklärung für das Flach der Grösen höherer Klassen.

116. **Satz. In einem Flache kann man die Malklammern beliebig ſetzen oder weglassen oder**

es ist $$[A(BC)] = [ABC]$$

Beweis. Unmittelbar nach 84.

Satz. Wenn eine einfache Gröse einer zweiten, welche nicht Null ist, übergeordnet ist, so lässt sich die erstere als Flach der zweiten Gröse mit einer dritten einfachen Gröse darstellen oder wenn $A > B$ und $B \gtrless 0$ ist, so ist $A = [BC]$ 117.

Beweis. Da A dem B übergeordnet, so ist nach 108 auch das Gebiet von A dem von B übergeordnet, d. h. jede Gröse des zweiten auch eine Gröse des ersten (nach 34 und 32). Es sei $B = [b_1 b_2 \cdots b_m]$, wo $b_1 b_2 \cdots b_m$ Grösen erster Klasse seien und $B \gtrless 0$, dann darf zwischen diesen Grösen nach 93 keine Hörigkeit herrschen. Sei nun $A = [a_1 a_2 \cdots a_n]$, so müssen die Grösen $b_1 b_2 \cdots b_m$, da sie dem Gebiete von $a_1 a_2 \cdots a_n$ angehören, zu diesen hörig sein, mithin kann man nach Satz 22 zu den Grösen $b_1 b_2 \cdots b_m$ noch $(n - m)$ Grösen $b_{m+1} \cdots b_n$ hinzufügen der Art, dass die Gebiete $a_1 a_2 \cdots a_n$ und $b_1 b_2 \cdots b_n$ deckend sind. Dann aber sind auch die Flache derselben nach 107 deckend. Es sei $[a_1 a_2 \cdots a_n] = \beta [b_1 b_2 \cdots b_n] = \beta [(b_1 b_2 \cdots b_m)(b_{m+1} \cdots b_n)]$ Setzen wir demnach $C = \beta [b_{m+1} \cdots b_n]$, so wird $A = [BC]$

Zu bemerken ist hier noch, dass für die Flache nach 821 auch das Beziehungsgesetz gilt

$[A(B \pm C)] = [AB] \pm [AC]$ und $[(A \pm B)C] = [AC] \pm [BC]$

und dass nach 828 auch das Gesetz der Vertauschung gilt, sofern man das Zeichen richtig setzt, d. h. es ist $[AB] = (-1)^{mn}[BA]$, wenn die beiden Flache m ter und n ter Klasse sind.

Satz. $$\left(\mathfrak{S}^{\alpha}_{a,b,c,\ldots} [a_\alpha a_b a_c \cdots]\right)\left(\mathfrak{S}^{\beta}_{m,n,o,\ldots} [b_m b_n b_o \cdots]\right)$$ 118.
$$= \mathfrak{S}\binom{\alpha \cdots \quad \beta \cdots}{a, b, c, \cdots m, n, o, \cdots} [a_\alpha a_b a_c \cdots b_m b_n b_o \cdots]$$

Beweis. Unmittelbar nach 75 und 115.

Wir wollen nun die Fälle untersuchen, in denen das Flach von Grösen höherer Klasse Null wird.

Satz. Jedes Flach von Grösen höherer Klasse, welches zwei oder mehre gleiche Fache erster Klasse enthält, ist Null. 119.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 92.

Satz. Jedes Flach von Grösen höherer Klasse, in welchem ein Fach zu den andern Fachen erster Klasse hörig ist, ist Null. 120.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 93.

Satz. Wenn $a_1 \cdots a_m$ und $b_1 \cdots b_n$ Grösen erster Klasse sind, welche gegenseitig frei sind, und A eine Vielfachensumme r ter Klasse der ersten m, B eine s ter Klasse der zweiten n Grösen, auch das Flach beider $[A \cdot B] = 0$ ist, so ist eine der beiden Vielfachensummen Null, d. h. entweder $A = 0$ oder $B = 0$. 121.

Beweis. Da A von r ter und B von s ter Klasse ist, ſo kann man $A = S\alpha_a A_a$ und $B = S\beta_b B_b$ ſetzen, wo A_a die Geschiedsflache zur r ten Klasse aus $a_1 \cdots a_m$ und B_b die zur s ten Klasse aus $b_1 \cdots b_n$ darstellen, alſo ist

$$0 = [A \cdot B] = S\alpha_a\beta_b[A_aB_b] \qquad \text{(nach 74 und 115)}$$

wo $[A_aB_b]$ als Geschiedsflache von $a_1 \cdots a_m\, b_1 \cdots b_n$ zu betrachten ſind, welche nach 103 gegenſeitig frei ſind. Alſo ist nach 15 $\alpha_a\beta_b = 0$ für jedes a und b. Wenn nun die eine Gröse $A \gtrless 0$, d. h. wenn irgend eine der Zahlen $\alpha_a \gtrless 0$ ist, ſo folgt $\beta_b = 0$ für jedes b, d. h. $B = 0$, und ebenſo folgt wenn $B \gtrless 0$, dass $A = 0$ ſei.

122. **Satz. Wenn eine Summe S einfacher Grösen mit einer von Null verschiedenen Gröse erster Klasse a geflacht Null giebt, ſo ist die erste gleich einem Flache, in welchem a ein Fach oder Faktor ist, oder wenn $[aS = 0]$, ſo ist $S = [aP]$.**

Beweis. Es ſei S eine Summe von Grösen m ter Klasse, und ſei das Gebiet $e_1 \cdots e_n$, dem ſie angehören, n ter Stufe, ſo kann man nach 793 zu a noch m — 1 freie Grösen erster Klasse $a_2 \cdots a_n$ hinzufügen der Art, dass beide Gebiete gleich oder deckend ſind, dann lassen ſich $b_1 \cdots b_n$, alſo auch S als Vielfachenſummen dieſer n freien Grösen $a_1a_2 \cdots a_n$ darstellen. Seien nun die Flache, welche a enthalten, $[aA_1]$, $[aA_2] \cdots$ ſeien die, welche a nicht enthalten $B_1, B_2 \cdots$ und ſei

$$S = \alpha_1[aA_1] + \alpha_2[aA_2] + \cdots + \beta_1B_1 + \beta_2B_2 + \cdots$$

mithin $0 = [aS] = \alpha_1[aaA_1] + \alpha_2[aaA_2] + \cdots + \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots$

$$= \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots \qquad \text{(nach 92)}$$

Hier ſind da a nicht in $B_1, B_2 \cdots$ enthalten ist, die Grösen Geschiedsflache, welche nach 103 gegenſeitig frei ſind, alſo ſind nach 15 auch $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0$

mithin ist $S = \alpha_1[aA_1] + \alpha_2[aA_2] + \cdots$

$$= [a(\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \cdots)] = [aP]$$

$$\text{wenn } P = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \cdots$$

123. **Satz. Wenn eine Summe S einfacher Grösen mit jeder von m freien Grösen erster Klasse $a_1, \cdots a_m$ geflacht Null giebt, ſo lässt ſich jene Summe S als ein Flach darstellen, in welchem $a_1, \cdots a_m$ Fache oder Faktoren ſind, oder wenn $0 = [a_1S] = [a_2S] = \cdots = [a_mS]$, ſo ist $S = [a_1a_2 \cdots a_mS_m]$.**

Beweis. Die ursprünglichen Einheiten ſeien $e_1 \cdots e_n$, ſo kann man nach 23 zu den m Grösen $a_1 \cdots a_m$ noch n — m freie Grösen $a_{m+1} \cdots a_n$ hinzufügen der Art, dass die Gebiete von $e_1 \cdots e_n$ und von $a_1 \cdots a_n$ deckend ſind, dann wird nach 122, da $0 = [a_1S]$ auch

$S = [a_1 P_1]$. Hier werden alle die Flache von $[a_1 P_1]$, wo a_1 noch in P_1 enthalten ist, nach 92 Null; man kann diese also weglassen und verwandle sich dadurch P_1 in S_1, so ist $S = [a_1 S_1]$, wo S_1 nur aus den Grösen $a_2 \cdots a_n$ hervorgegangen ist und kein a_1 enthält. Da nun $0 = a_2 S = [a_2(a_1 S_1)] = [a_2 a_1 S_1] = [a_1 a_2 S_1]$ (nach 117 und 88) so muss nach 121 entweder a_1 oder $[a_2 S_1]$ Null sein; das erste ist gegen die Annahme, also ist $0 = [a_2 S_1]$, mithin $S_1 = [a_2 P_2]$ nach 122. Hier kann man wieder in P_2 alle Flache weglassen, welche a_2 enthalten und verwandle sich dadurch P_2 in S_2, so ist $S_1 = [a_2 S_2]$, mithin $S = [a_1 a_2 S_2]$ und so fort zuletzt $S [a_1 a_2 \cdots a_m S_m]$.

Satz. Wenn eine Summe S von Grösen m ter Klasse mit jeder von m freien Grösen erster Klasse geflacht Null giebt, so ist S mit dem Flache dieser m Grösen deckend oder wenn $0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \cdots = [a_m S]$, so ist $S = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_m]$. 124.

Beweis. Unmittelbar aus 123.

Satz. Wenn eine Summe S von Grösen m ter Klasse mit m + 1 Grösen erster Klasse $a_1 \cdots a_{m+1}$ geflacht Null giebt, so ist entweder S oder $[a_1 \cdots a_{m+1}]$ gleich Null oder wenn $0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \cdots = [a_{m+1} S]$, so ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 \cdots a_{m+1}] = 0$. 125.

Beweis. Angenommen, es sei $[a_1 a_2 \cdots a_{m+1}] \gtrless 0$, so ist auch $[a_1 \cdots a_m] \gtrless 0$, also sind $a_1 \cdots a_m$ gegenseitig frei, also da $0 = [a_1 S] = \cdots = [a_m S]$, so ist nach 124 auch $S = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_m]$, da ferner $0 = [a_{m+1} S] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_{m+1}]$ mithin, da $[a_1 a_2 \cdots a_{m+1}] \gtrless 0$, so ist $\alpha = 0$, also auch $S = \alpha[a_1 \cdots a_m] = 0$, d. h. es ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 \cdots a_{m+1}] = 0$.

Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modlungslehre.

9. Die grundlegenden Gefetze der Modlungslehre.

Wir haben bereits in der Gebietslehre gefehen, welche überaus grose Uebereinstimmung die Gefetze über die Gebiete in der Gebietslehre mit den Gefetzen der Begriffe in der Logik zeigen. Auch in der Modlungslehre wird uns eine überraschende Aehnlichkeit in den Ideen der Lehre vom Hauptgebiete und von der Ergänzung eines Flachs zum Hauptgebiete entgegentreten, und werden uns diefe Begriffe ebenfo in der Ausdehnungslehre, wie in der Logik zu den reichsten Sätzen führen.

Von der Flachungslehre muss diefe Modlungslehre streng geschieden werden, wenn man nicht in die grösten Verwirrungen geraten will. Ich werde bei den einzelnen Sätzen in den Anmerkungen auf die überaus grosen Unterschiede der beiden Rehnungsarten aufmerkfam machen und diefelben strenge scheiden.

126. **Erklärung. Das Hauptgebiet heist in der Modlungslehre das Gebiet der Einheiten erster Klasse, zu welchem alle der Betrachtung unterworfenen Grösen hörig find. Das Zeug oder Produkt aller der Einheiten erster Klassen diefes Gebietes wird in der Modlungslehre gleich eins gefetzt, d. h. es ist $\overset{n}{[}e_1 \cdots e_n] = 1$. Das n oben am Flachzeichen bezeichnet die Stufe des Hauptgebietes. Das Flach heist in der Modlungslehre ein Modelflach oder ein Enflach.**

In der Flachungslehre ist $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ eine Gröse nter Klasse, dagegen 1 eine Gröse nullter Klasse, beide mithin ganz verschieden; dagegen wird in der Modlunglehre $\overset{n}{[}e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$ gefetzt, d. h. gleich einem Flache nullter Stufe. Wir werden bei N 133 fehen, aus welchen Gründen wir zu diefer Setzung kommen mussten.

Erklärung. Die Ergänzung einer Einheit m ter Klasse E heist das Flach aller in jener Einheit m ter Klasse nicht vorkommenden Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, fofern das Flach der Einheit m ter Klasse und ihrer Ergänzung gleich eins ist. Die Ergänzung einer Zahl fetzen wir der Zahl gleich. 127.

Das Zeichen der Ergänzung einer Gröse ist ein über die Gröse gefetzter wagerechter Strich, alfo $\overline{E}$ gelefen „Nicht E" oder „Ergänzt E", bei einer Klammer ein mit der Klammer verbundener wagerechter Strich $\overline{[}$ gelefen „Nichtklammer".

Es ist zweckmäsig, fich an einigen Beispielen den Begriff der Ergänzung einer Gröse klar zu machen.

Im Gebiete zweiter Stufe $a_1a_2 = 1$ ist $\overline{a_1} = a_2$, $\overline{a_2} = -a_1$; denn es ist $a_1a_2 = 1$, $a_2a_1 = -1$.

Im Gebiete dritter Stufe $a_1a_2a_3 = 1$ ist $\overline{a_2} = -a_1a_3 = a_3a_1$, $\overline{a_1} = a_2a_3$, $\overline{a_3} = a_1a_2$, ferner $\overline{[}a_1a_3] = -a_2$, $\overline{[}a_3a_1] = a_2$, $\overline{[}a_1a_2] = a_3$, $\overline{[}a_2a_1] = -a_3$, $\overline{[}a_2a_3] = a_1$, $\overline{[}a_3a_2] = -a_1$.

In H. Grassmann Ausdehnungslehre von 1862 ist der Ergänzung von E das Zeichen |E gegeben. Ich habe dies Zeichen aufgegeben und dafür das Zeichen $\overline{E}$ eingeführt und zwar aus folgenden Gründen. Der Begriff des Nicht-E oder der Ergänzung von E ist uralt und zuerst von Aristotélēs in die Begriffslehre eingeführt, er unterscheidet bereits perì hermēneías c10 den Menschen den ánthrōpos und den Nichtmenschen, den ouk ánthrōpos. Er versteht darunter bereits ganz wie in unferer Erklärung alle die Grösen, welche in dem Selbstbegriffe nicht enthalten find. In der Logik hat man nun bereits längst für diefen Begriff das Zeichen $\overline{E}$ gelefen „Nicht E" eingeführt, wo der Strich über dem Buchstaben an das Minuszeichen erinnert, aber fo mit dem Zeichen der Gröse E verwachfen ist, dass er mit dem Buchstaben eine Einheit bildet, und alfo unzweifelhaft nur das Zeichen einer Gröse ist.

Das Zeichen |E, welches in H. Grassmann Ausdehnungslehre 1862 eingeführt ist, ist meiner Anficht nach weniger zu empfehlen. Nicht nur ist das Zeichen $\overline{E}$ geschichtlich viel früher eingeführt, fondern es ist auch ganz unzweideutig; das Zeichen |E dagegen giebt notwendig zu Verwirrungen Anlass. Wenn z. B. das Flach [E|E] geschrieben wird, fo nimmt hier das Zeichen | zwischen den beiden Buchstaben unzweifelhaft die Stelle eines Knüpfungszeichens ein. Noch schlimmer ist das Zeichen **I**A oder [A**I**A], wo das **I** als das Zeichen einer eigenen zu flachenden Gröse erscheint. Ich halte mich daher berechtigt, das Zeichen $\overline{E}$ einzuführen, welches alle diefe Zweifel befeitigt.

Satz. $\overset{n}{[}E\overline{E}] = 1$ 128.

Das Modelflach einer Einheit mit ihrer Ergänzung ist Eins.

Satz. $\overline{\overline{E}} = E$; **dagegen** $\overline{\overline{E}} = -E$, **wenn E ungerader Klasse im Hauptgebiet gerader Stufe ist. Die Ergänzung der Ergänzung einer Einheit E (d. h.** $\overline{\overline{E}}$ **gelefen Nichtnicht E) ist im Allgemeinen** 129.

dieser Einheit gleich, dagegen ist sie dieser Einheit entgegengesetzt, wenn gleichzeitig die Stufe des Hauptgebietes gerade und die Klasse der Einheit E ungerade ist.

Beweis. Es sei E die Einheit und die Stufe des Hauptgebietes n. Nach 126 ist $\overset{n}{[}E\bar{E}] = 1$ und ebenso $\overset{n}{[}\bar{E}\bar{\bar{E}}] = 1$. Also ist $\overset{n}{[}E\bar{E}] = \overset{n}{[}\bar{E}\bar{\bar{E}}]$ $= (-1)^{m(n-m)}\overset{n}{[}\bar{\bar{E}}\bar{E}]$ nach 89. Mithin ist $\bar{\bar{E}} = (-1)^{m(n-m)}E$.

Hier ist, wenn n gerade ist, eine von den Zahlen m und n — m gerade, mithin $(-1)^{m(n-m)} = +1$. Wenn n gerade und zugleich m gerade ist, so ist gleichfalls $(-1)^{m(n-m)} = +1$. Nur in dem Falle, wenn n gerade und zugleich m ungerade ist, sind beide Zahlen m und n — m ungerade, nur in diesem Falle ist $(-1)^{m(n-m)} = -1$. Es folgt mithin der Satz.

130. **Erklärung. Die Ergänzung einer beliebigen Gröse A heist die Gröse $\bar{A}$ (gelesen Nicht A), welche man erhält, wenn man A als Vielfachensumme aus den Einheiten darstellt, und statt jeder dieser Einheiten ihre Ergänzung setzt, oder**

$$\bar{A} = \overline{(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots)} = \alpha_1 \bar{E}_1 + \alpha_2 \bar{E}_2 + \cdots$$

wo $E_1, E_2 \cdots$ Einheiten beliebiger Klassen sind.

Es ist hier darauf aufmerksam zu machen, dass bei der Modlung nicht mehr $\overset{n}{[}A\bar{A}] = 1$ gilt.

131. **Satz. Die Klasse der Ergänzung einer Gröse m ter Klasse im Hauptgebiete n ter Stufe ist n — m.**

132. **Satz. $\bar{\bar{A}} = A$; dagegen $\bar{\bar{A}} = -A$, wenn A ungerader Klasse im Hauptgebiet gerader Stufe ist.**

Die Ergänzung der Ergänzung einer Gröse A (d. h. $\bar{\bar{A}}$ gelesen Nichtnicht A) ist dieser Gröse A im Allgemeinen gleich; doch ist sie dieser Gröse A entgegengesetzt, wenn zugleich das Hauptgebiet von gerader Stufe und die Gröse A von ungerader Klasse ist.

Beweis. Es sei $A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots$, so ist nach 130 $\bar{A} = \alpha_1 \bar{E}_1 + \alpha_2 \bar{E}_2 + \cdots$ mithin $\bar{\bar{A}} = \alpha_1 \bar{\bar{E}}_1 + \alpha_2 \bar{\bar{E}}_2 + \cdots = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots = A$ nach 129, sofern nicht zugleich das Hauptgebiet von gerader Stufe und die Gröse A von ungrader Klasse ist, dagegen ist in letzterm Falle

$$\bar{\bar{A}} = \alpha_1 \bar{\bar{E}}_1 + \alpha_2 \bar{\bar{E}}_2 + \cdots = \alpha_1 (-E_1) + \alpha_2 (-E_2) + \cdots$$
$$= -(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots) = -A.$$

Wir kommen nun zu der Erklärung des **Modelflaches** und der **Modelsumme**, welche die Base für die ganze **Modlungslehre** bildet.

Erklärung. Das Modelflach oder Enflach heist ein fortschreitendes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten kleiner ist als die Stufe ihres Hauptgebietes n. 133.

Das Modelflach heist ein stehendes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten gleich der Stufe des Hauptgebietes n ist.

Das Modelflach heist ein rückschreitendes oder eingewandtes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten gröser ist als die Stufe des Hauptgebietes n.

Das fortschreitende Modelflach oder Enflach der Einheiten ist gleich dem gewöhnlichen Flache der Einheiten.

Das stehende Modelflach der Einheiten ist gleich ± 1.

Das rückschreitende Modelflach der Einheiten ist gleich der Gröse, deren Ergänzung das gewöhnliche Flach der Ergänzungen jener Einheiten ist oder für welches $\overline{\overset{n}{[EF]}} = [\overline{E}\,\overline{F}]$ ist, d. h. für welches das Nichtenflach das Flach der Nichte ist.

Das Zeichen des Modelflaches oder Enflaches im Hauptgebiete n ter Stufe ist $\overset{n}{[EF]}$ gelefen „Enflach EF."

Es ist wichtig, dass man fich diefe Erklärung wieder an Beispielen klar mache und auf den grosen Unterschied des Modelflaches vom gewöhnlichen Flache achte.

Nur das fortschreitende Modelflach ist gleich dem gewöhnlichen Flache.

Das stehende Modelflach ist ± 1, alfo eine Zahl nullter Klasse; dagegen ist das gewöhnliche Flach in diefem Falle $\pm [e_1 e_2 \cdots e_n]$, d. h. eine Gröse n ter Klasse.

Das rückschreitende Modelflach von zwei Einheiten E und F ist die Gröse, für welche $\overline{\overset{n}{[EF]}} = [\overline{E}\,\overline{F}]$ ist, dagegen ist das gewöhnliche Flach diefer Grösen Null.

Seien z. B. im Gebiete dritter Stufe $E = e_1 e_2$ und $F = e_1 e_3$, fo ist $[(e_1 e_2)(e_1 e_3)] = 0$ (nach 92.) Dagegen ist für das Modelflach $\overline{[e_1 e_2]} = e_3$, $\overline{[e_1 e_3]} = -e_2$, mithin

$$\overline{\overset{3}{[EF]}} = [\overline{E}\,\overline{F}] = [e_3 \cdot - e_2] = [e_2 e_3], \text{ alfo } \overset{3}{[EF]} = e_1 \text{ alfo eine Gröse}$$

erster Klasse.

So ist das Flach $[(e_1 e_2 e_4)(e_1 e_3 e_4)] = 0$, dagegen ist für das Modelflach im Gebiete 4ter Stufe $\overline{[e_1 e_2 e_4]} = -e_3$ und $\overline{[e_1 e_3 e_4]} = e_2$, mithin

$$\overline{\overset{4}{[EF]}} = [\overline{E}\,\overline{F}] = [(-e_3) \cdot e_2] = [e_2 e_3], \text{ alfo } \overset{4}{[EF]} = e_1 e_4.$$

Es wird zweckmäsig fein, fich durch einige Uebungen diefen Unterschied klar zu machen.

Auch die Gefetze der Webung oder Multiplikation find für die Modlung ganz andere als für die Flachung. Denn nach 84 gilt für die Flachung Einigung der Fache oder Faktoren, dagegen gilt diefe für die Modlung nicht; denn gölte fie, fo wäre $\overset{3}{[(e_1 e_2)(e_1 e_3)]} = \overset{3}{[e_1 e_2 e_1 e_3]} = 0$, während doch $\overset{3}{[(e_1 e_2)(e_1 e_3)]} = e_1$

ſein muss. Für die Modlung gilt alſo zunächst nur das Beziehungsgeſetz Satz 74 und 75, nicht mehr das Geſetz der Einigung.

In der Ausarbeitung von 1847 hatten H. und R. Grassmann dieſe Multiplikation die bezügliche Multiplikation genannt.

In H. Grassmann Ausdehnungslehre 1862 ist das Modelflach ein auf das Hauptgebiet bezügliches Flach genannt. Dieſer Ausdruck erscheint mir zweideutig. Man könnte dadurch verleitet werden, die Geſetze der Flachung auch für die Modlung oder bezügliche Flachung anzuwenden und käme dadurch in die schlimmste Verwirrung. Ich halte es daher für notwendig, dieſe neue Art der Multiplikation auch mit einem neuen Namen und mit einem neuen Zeichen zu bezeichnen und nenne ſie daher Modlung, das Zeug oder Produkt ein **Modelflach** oder für das Hauptgebiet nter Stufe ein Enflach.

Wir können nun zu der Betrachtung übergehen, was uns veranlasst hat, dieſe ganz neuen, von der Flachung weſentlich abweichenden und auf den ersten Blick verwirrenden Erklärungen einzuführen. Es wird uns dies Gelegenheit geben, die Idee des Modelflaches klar zu legen und in das begriffliche Verständniss dieſes Zweiges einzuführen.

Der eigentliche Grundbegriff dieſes Abschnittes ist der der Ergänzung zu einem Hauptgebiete nter Stufe, ein Begriff, welcher der Logik und der Ausdehnungslehre gemeinſam ist und in beiden Zweigen der Denklehre die reichsten Anwendungen zulässt.

Wollen wir aber dieſen Begriff in der Ausdehnungslehre anwenden können, ſo müssen wir notwendig auch das Zeug oder Produkt zweier Ergänzungen bilden können Legen wir z. B. ein Gebiet fünfter Stufe $\overset{n}{[}e_1e_2e_3e_4e_5] = 1$ als Hauptgebiet zu Grunde und ſetzen wir $E = [e_1e_2]$, $F = [e_3e_4]$, ſo ist $\overline{E} = \overset{n}{[}e_3e_4e_5]$ und ist $\overline{F} = \overset{n}{[}e_1e_2e_5]$, mithin wird das Zeug oder Produkt $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = \overset{n}{[}e_3e_4e_5]\overset{n}{[}e_1e_2e_5]$. Dies Produkt wäre nun nach den Geſetzen der Flachung Null, da $e_5 \cdot e_5 =$ Null ist, es wäre mithin unmöglich, ein Produkt der Nichte zu bilden, wenn man die Geſetze der Flachung ganz allgemein weiter gelten lassen wollte. Beachtet man aber, dass $\overset{n}{[}e_3e_4e_5]\overset{n}{[}e_1e_2e_5] = \overset{n}{[}e_1e_2e_3e_4e_5]e_5$ ist und ſetzt man hier $\overset{n}{[}e_1e_2e_3e_4e_5] = 1$, ſo ergiebt ſich $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = e_5$, d. h. da $\overset{n}{[}EF] = \overset{n}{[}e_1e_2e_3e_4]$ ist, ſo ist die Ergänzung zu $\overset{n}{[}e_1e_2e_3e_4]$ gleich e_5, d. h. es ist das Flach der Nichte gleich dem Nicht-Enflach $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = \overline{\overset{n}{[}EF]}$.

Wir haben in dieſem Enflache nun ein Produkt von Grösen kennen gelernt, welche in einem Gebiete nter Stufe, mehr als n Grösen als Fache oder Faktoren enthalten, nämlich auser den n Grösen des Gebietes noch eine oder mehre Grösen des Gebietes und wir haben dies Produkt, indem wir das Produkt der n Grösen des Gebietes $\overset{n}{[}e_1e_2\cdots e_n]$ gleich 1 ſetzten, dem Produkte der einen oder den mehren Grösen des Gebietes gleich geſetzt, welche dann noch übrig blieben. Hieraus ergeben ſich dann alle Festſetzungen der obigen Erklärung und daraus die folgenden Geſetze der Modlungslehre.

Für die Ergänzung gilt hier $\overset{n}{[}E\overline{E}] = 1$ und $\overset{n}{[}A\overline{A}] = 1$, während in der Logik $E + \overline{E} = 1$ und $A + \overline{A} = 1$ ist. Es folgert dieſer Unterschied einfach aus den verschiedenen Erklärungen der beiden Wissenschaften.

Erklärung. Die Modelſumme der Klassen α, β, γ **der Fache** 134.
oder Faktoren heist die Zahl ϱ**, welche kleiner ist als die Stufe des Hauptgebietes n, wenn** $\alpha + \beta + \gamma = an + \varrho$ **oder es ist** $\alpha + \beta + \gamma = an + \overset{n}{(\alpha + \beta + \gamma)}$.

Wenn die Modelſumme der Klassen gleich Null ist, ſo kann man das Flach ſowohl als fortschreitend, wie als rückschreitend betrachten.

Das Zeichen der Modelſumme für ein Hauptgebiet n ter Stufe ist $\overset{n}{(\alpha + \beta + \cdot\cdot)}$ **geleſen „die Enſumme von** $\alpha + \beta + \cdots\cdot$**"**

Beispiele $\overset{3}{(2 + 2 + 1)} = 2$, $\overset{4}{(3 + 2 + 3)} = 0$, $\overset{4}{(2 + 3 + 2)} = 3$.

Wir wenden uns nun zunächst zu der Betrachtung der fortschreitenden, der stehenden und der rückschreitenden Modelflache und demnächst zu den allgemeinen Geſetzen über die Modlung.

Satz. Zwei einfache Grösen A und B, bei denen die Summe 135.
ihrer Klassen $\alpha + \beta$ **die Stufe des Hauptgebietes n um** γ **übertrifft, lassen ſich in der Form darstellen** $A = [CA_1]$ **und** $B = [CB_1]$**, wo C eine einfache Gröse der Klasse** γ **darstellt.**

Beweis. Nach der Bedingung ist $\alpha + \beta = n + \gamma$, alſo ist nach 30 den Gebieten von A und B ein Gebiet der Stufe γ gemein. Sei nun C eine Gröse der Klasse γ, ſo ist C ſowohl dem A als dem B untergeordnet, alſo ist nach 117 auch A in der Form $[CA_1]$ und B in der Form $[CB_1]$ darstellbar.

Satz. Die Summe von einfachen Grösen (n — 1) ter Klasse in 136.
einem Hauptgebiete n ter Stufe ist wieder eine einfache Gröse (n — 1) ter Klasse.

Beweis. Es ſeien zwei einfache Grösen (n — 1) ter Klasse A und B gegeben, ſo ist die Summe ihrer Klassen 2 n — 2, mithin haben ſie nach 135 eine einfache Gröse C von 2 n — 2 — n = n — 2 ter Klasse gemeinſam und ſind alſo nach 135 in der Form $A = [Ca]$ und $B = [Cb]$ darstellbar, wo a und b einfache Grösen erster Klasse, mithin a + b wieder eine einfache Gröse erster Klasse ist; folglich ist $A + B = [Ca + Cb] = [C(a + b)]$ (nach 84) ein Flach von n — 1 Grösen erster Klasse, d. h. eine einfache Gröse (n — 1) ter Klasse. Mithin gilt der Satz fortschreitend für die Summe von beliebig vielen einfachen Grösen (n — 1) ter Klasse.

Es ist hier wohl zu beachten, dass nur die Grösen erster und die (n — 1) ter Klasse eine einfache Gröse und zwar gleicher Klasse zur Summe haben. Schon 2 Grösen zweiter Klasse haben nur dann eine einfache Gröse zweiter Klasse zur Summe, wenn ihre 4 Grösen erster Klasse nicht gegenſeitig frei, ſondern eine zu

den andern hörig ist. Soll nämlich $S = ab + cd$ ein Flach ſein, ſo muss nach 92 $[SS] = 0$ ſein, alſo $0 = [SS] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd + cdab]$ da $[abab] = [cdcd] = 0$ nach 92. Aber nach 91 auch $[cdab] = [abcd]$, mithin $0 = 2\,[abcd]$, oder $[abcd] = 0$, mithin nach 98 eine der Grösen zu den andern hörig; dagegen kann dann S nicht eine einfache Gröse ſein, wenn die 4 Grösen gegenſeitig frei ſind.

Dasſelbe folgt auch, wenn man das gemeinſame Gebiet aufſucht, dasſelbe ist $\gamma = 4 - n$. Ist hier $n = 3$, ſo ist $\gamma = 1$ und folgt der Satz aus 129, ist dagegen $n > 3$, ſo ist die Summe eine zuſammengeſetzte Gröse.

137. **Satz. Das stehende Modelflach ist gleich ± 1, d. h. eine Gröse 0 ter Klasse.**

Beweis. 1. Unmittelbar nach Erklärung 133.

2. Sei $\overset{n}{[}AB]$ ein stehendes Modelflach, und α und β die Klassen von A und B, ſo ist nach 133 $\alpha + \beta = n$, die Klassen der Ergänzungen ſind $n - \alpha$ und $n - \beta$, alſo die Summe $2n - (\alpha + \beta) = n$, d. h. $\overset{n}{[}\overline{AB}]$ nach 133 ein stehendes Modelflach.

138. **Satz. $\overline{E} = \overset{n}{[}EFF]$, wo F das Flach der Einheiten von E. Wenn eine Gröse F das Flach ist aller in einer Einheit beliebiger Klasse E nicht vorkommender Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, ſo ist $\overline{E} = \overset{n}{[}EFF]$.**

Beweis. Nach 137 ist $\overset{n}{[}EF] = \pm 1$, alſo ist $\overset{n}{[}E(EFF)] = \overset{n}{[}E(\pm 1)F] = (\pm 1)\overset{n}{[}EF] = (\pm 1)(\pm 1) = 1$ (nach 67)

Ebenſo ist $\overset{n}{[}E\overline{E}] = 1$, mithin ist $\overset{n}{[}E\overline{E}] = \overset{n}{[}E(EFF)]$, alſo ist auch $\overline{E} = \overset{n}{[}EFF]$.

Es bietet uns dieſer Satz wieder ein ſehr schlagendes Beispiel, dass die Geſetze der Einigung nicht gelten; denn es ist, wie im Satze bewieſen $\overset{n}{[}EFF] = \overline{E}$; dagegen ist $\overset{n}{[}E(FF)] = 0$, indem hier $FF = 0$ nach Satz 92, mithin $\overset{n}{[}E(FF)] = \overset{n}{[}E \cdot 0] = 0$.

139. **Satz. Für die rückschreitenden Modelflache ist $\overline{\overset{n}{[}EF]} = [\overline{E}\overline{F}]$ oder die Ergänzung des rückschreitenden Modelflaches zweier Einheiten ist das Flach der Ergänzungen der Einheiten.**

Beweis. Unmittelbar nach Erklärung 133.

140. **Satz. Die Modelſumme eines Modelflaches ist gleich dem Reste der bleibt, wenn man die Summe der Klassen der Fache oder Faktoren durch die Stufe n des Hauptgebietes teilt oder**

$$\alpha + \beta \cdots = an + \overset{n}{(}\alpha + \beta + \cdots).$$

Satz. Für die Modelflache gilt das Beziehungsgefetz Satz 74 141.
und 75.

Satz. Das Enflach zweier Grösen, welche Flache von Einheiten erster Gröse find, ist dann und nur dann ungleich Null, wenn in dem Enflache keine Einheit erster Klasse des Hauptgebietes 2mal öfter als Fach oder Faktor vorkommt, als irgend eine andere Einheit erster Klasse des Hauptgebietes. 142.

Beweis. 1. Wenn in dem Enflache $\overset{n}{[}AB]$ irgend eine Einheit erster Klasse des Hauptgebietes als Fach oder Faktor in dem Enflache fehlt, fo können nicht die n Fache $\overset{n}{[}e_1e_2\cdots e_n]=1$ in dem Enflache enthalten fein. Diefe n Flache können dann alfo aus dem Produkte $\overset{n}{[}AB]$ nicht ausscheiden, es bleiben mithin in diefem Falle in dem Produkte $\overset{n}{[}AB]$ zwei gleiche Fache oder Faktoren, und das Produkt ist alfo nach Satz 92 Null.

2. Wenn dagegen in dem Enflache $\overset{n}{[}AB]$ jede Einheit erster Klasse des Hauptgebietes als Faktor nur einmal enthalten ist, fo ist das Flach nach Satz 82 $\gtrless 0$. Ebenfo wenn in dem Enflache $\overset{n}{[}AB]$ fämmtliche Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes wenigstens einmal enthalten find, fo ist zunächst das Enflach $\overset{n}{[}e_1e_2\cdots e_n]=1$ und bleibt nur noch das Enflach der Einheiten erster Klasse, welche in dem Enflache beider Grösen zweimal vorkommen, d. h. welche den beiden Grösen A und B gemeinfam find. Die Ergänzung diefes Enflaches ist dann das Flach aus den Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, welche den beiden Grösen A und B nicht gemeinfam find.

Satz. Für die fortschreitenden Modelflache gelten alle Gefetze der Flachung, namentlich auch der Satz 84 und das Enflach ist gleich dem Flache. 143.

Beweis. Unmittelbar nach Erklärung 133.

Satz. Wenn das Modelflach zweier Grösen fortschreitend ist, fo ist das ihrer Ergänzungen rückschreitend und umgekehrt. 144.

Beweis. Wenn $\overset{n}{[}AB]$ ein fortschreitendes Modelflach ist, und α und β die Klassen find, fo ist $\alpha+\beta<n$ (nach 133); dann ist für die Ergänzungen $(n-\alpha)+(n-\beta)=2n-(\alpha+\beta)>n$, mithin nach 133 $\overset{n}{[}\overline{AB}]$ ein rückschreitendes Flach. Ebenfo umgekehrt.

10. Die allgemeinen Sätze für Enflache.

Die Sätze find im Folgenden zunächst für die drei Fälle zu beweifen, dass das Modelflach ein fortschreitendes, ein stehendes, oder ein rückschreitendes ist, oder mit andern Worten, dass $\alpha+\beta<n$, dass $\alpha+\beta=n$ und dass $\alpha+\beta>n$ fei. Wir fetzen dabei in allen Sätzen diefer Nummer die Stufe des Hauptgebietes

gleich n, die Klasse von A gleich α, die von B gleich β, die von C gleich $\gamma \cdots$, die von R gleich ϱ. Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nun zur Entwicklung der Sätze.

145. **Satz. Die Klasse des Enflachs zweier Grösen, welches $\gtrless$ Null ist, ist gleich der Ensumme ihrer Klassen, oder wenn γ, α, β die Klassen und $C = \overset{n}{[}AB]$, so ist $\gamma = \overset{n}{(}\alpha + \beta)$.**

Beweis. 1. Wenn $\alpha + \beta < n$, so ist $\overset{n}{[}AB]$ ein fortschreitendes Modelflach, also die Klasse von $C = \overset{n}{[}AB]$ gleich der Klasse von $[AB]$, d. h. $\gamma = \alpha + \beta$.

2. Wenn $\alpha + \beta = n$, so ist $\overset{n}{[}AB] = \pm 1$ nach 137, und also nullter Klasse, d. h. $\gamma = \overset{n}{(}\alpha + \beta)$.

3. Wenn $\alpha + \beta > n$, so ist $\bar C = \overline{\overset{n}{[}AB]} = \overset{n}{[}\bar A \bar B]$ nach 139. Hier ist die Klasse von $\bar A$ nach 131 gleich $n - \alpha$, die von $\bar B = n - \beta$, die von $\bar C = n - \gamma$, also

$$n - \gamma = n - \alpha + n - \beta = n - (\alpha + \beta - n) \text{ d. h. } \gamma = \alpha + \beta - n = \overset{n}{(}\alpha + \beta).$$

Somit gilt der Satz für den Fall, dass A, B und $\overset{n}{[}AB]$ Einheiten beliebiger Klassen sind. Da aber jede Vielfachensumme dieser Einheiten mit ihren Einheiten gleicher Klasse ist, so gilt er auch für beliebige Grösen.

146. **Satz. Die Klasse des Enflachs mehrer Grösen, welches ungleich Null ist, ist gleich der Ensumme ihrer Klassen, oder**

$$\textbf{Wenn } R = \overset{n}{[}ABC\cdots], \textbf{ so ist } \varrho = \overset{n}{(}\alpha + \beta + \gamma + \cdots)$$

Beweis. In Satz 145 ist dieser Satz für das Enflach zweier Grösen bewiesen, tritt nun zu dem Flache noch ein Fach oder Faktor hinzu, so bleibt der Satz nach 145 in Gültigkeit, also gilt er auch für beliebig viele Fache oder Faktoren, da auch die Klasse dabei stets kleiner als n bleibt und nie eine Strichzahl wird.

Beispiele. Seien 5 Fache 4ter Klasse in Bezug auf ein Hauptgebiet 6ter Stufe geflacht, so ist die Klasse des Flaches $\varrho = 20 - 18 = 2$. Seien 3 Fache 3ter Klasse in Bezug auf ein Hauptgebiet 5ter Stufe geflacht, so ist die Klasse des Flachs $\varrho = 9 - 5 = 4$.

147. **Satz. Das Enflach der Ergänzungen zweier Grösen ist die Ergänzung des Enflaches der Grösen, oder**

$$\overset{n}{[}\bar A \bar B] = \overline{\overset{n}{[}AB]} \qquad \text{und} \qquad \overline{\overset{n}{[}\bar A \bar B]} = \overset{n}{[}AB]$$

Beweis. 1. Wenn $\alpha + \beta > n$. Es sei $A = S\alpha_a E_a$ und $B = S\beta_b F_b$, wo E_a und F_b Einheiten sind, so ist nach 130 $\overline{A} = S\alpha_a \overline{E}_a$ und $\overline{B} = S\beta_b \overline{F}_b$, und ist

$$\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]} = \overset{n}{[(S\alpha_a\overline{E}_a)(S\beta_b\overline{F}_b)]} = S\alpha_a\beta_b\overset{n}{[\overline{E}_a\overline{F}_b]} \qquad \text{(nach 74)}$$
$$= S\alpha_a\beta_b\,\overline{\overset{n}{[E_aF_b]}} \qquad \text{(nach 139)}$$
$$= \overline{(S\alpha_a\beta_b\overset{n}{[E_aF_b]})} \qquad \text{(nach 130)}$$
$$= \overline{\overset{n}{[(S\alpha_aE_a)(S\beta_bF_b)]}} \qquad \text{(nach 74)}$$
$$= \overline{\overset{n}{[AB]}}$$

2. Wenn $\alpha + \beta < n$. Wir setzen $A = \overline{A'}$ und $B = \overline{B'}$. Dann ist allgemein für $\overset{n}{[A'B']}$ die Summe $\alpha' + \beta' > n$ nach 144, also ist dann nach $147_{,1}$ $\overline{\overset{n}{[A'B']}} = \overset{n}{[\overline{A'}\overline{B'}]} = \overset{n}{[AB]}$. Also ist $\overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}} = \overline{\overset{n}{[AB]}}$.

Ist nun n ungerade, oder ist n, sowie α und β gerade, so ist nach 132 $\overline{A} = \overline{\overline{A'}} = A'$ und ebenso $\overline{B} = \overline{\overline{B'}} = B'$, mithin ist dann auch nach 132 $\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]} = \overset{n}{[A'B']} = \overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}}$. Also da $\overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}} = \overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]}$ ist, und auch $\overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}} = \overline{\overset{n}{[AB]}}$, so ist $\overline{\overset{n}{[AB]}} = \overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]}$.

Ist dagegen n gerade, und ist eine z. B. α gerade, die andere β aber ungerade, so ist nach 132 $\overline{B} = \overline{\overline{B'}} = -B'$ und also
$\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]} = \overset{n}{[A' \cdot (-B')]} = -\overset{n}{[A'B']} = \overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}}$ nach 132, da $\alpha + \beta$ ungerade, mithin $\overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}} = -\overset{n}{[A'B']} = \overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]}$ und da allgemein für $\alpha + \beta < n$ $\overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}} = \overline{\overset{n}{[AB]}}$ ist, so ist auch $\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]} = \overline{\overset{n}{[AB]}}$.

Sind endlich n gerade, aber α und β beide ungerade, so ist $\overline{A} = \overline{\overline{A'}} = -A'$ und $\overline{B} = \overline{\overline{B'}} = -B'$ nach 132, also ist
$\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]} = \overset{n}{[(-A')(-B')]} = \overset{n}{[A'B']} = \overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}}$ nach 132, da $\alpha + \beta$ gerade.

Es ist aber auch allgemein für $\alpha + \beta < n$ $\overline{\overline{\overset{n}{[A'B']}}} = \overline{\overset{n}{[AB]}}$, also ist auch $\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}]} = \overline{\overset{n}{[AB]}}$.

3. Wenn $\alpha + \beta = n$. Wir beweisen hier den Satz zuerst für Einheiten.

Wenn E und F Einheiten sind, welche keine Einheit erster Klasse gemein haben, so ist $\overset{n}{[EF]} = \pm 1$ und ebenso $\overset{n}{[FE]} = \pm 1$ nach 137. Dann ist aber nach 138 auch $\overline{E} = \overset{n}{[EFF]}$ und $\overline{F} = \overset{n}{[FEE]}$, mithin ist $\overset{n}{[\overline{E}\overline{F}]} = \overset{n}{[EFF(FEE)]} = \overset{n}{[\pm 1F(\pm 1E)]} = \overset{n}{[FE]} = \pm 1$, d. h. $\overset{n}{[EF]}$

eine Zahl und da nach 127 für Zahlen $\overline{\alpha} = \alpha$ ist, ſo ist auch $\overset{n}{[}EF] = \overline{\overset{n}{[}EF]}$, alſo ist auch $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = \overline{\overset{n}{[}EF]}$.

Wenn E und F Einheiten ſind, welche eine oder mehre Einheiten erster Klasse gemein haben, ſo ist nach 92 $\overset{n}{[}EF] = 0$. Da aber $\alpha + \beta = n$, ſo können die Einheiten E und F zuſammen nur n Fache enthalten, es muss alſo mindestens eine der ursprünglichen Einheiten in E und F fehlen, es ſei dies e_r, dann muss ſowohl $\overline{E}$ als auch $\overline{F}$ dieſe Einheit enthalten, alſo nach 92 $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = 0$ ſein. Alſo ist dann auch $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = \overset{n}{[}EF]$.

Da ferner hier $\overset{n}{[}EF] = 0$ eine Zahl ist, ſo ist nach 127 auch $\overset{n}{[}EF] = \overline{\overset{n}{[}EF]}$, mithin $\overset{n}{[}\overline{E}\overline{F}] = \overline{\overset{n}{[}EF]}$.

Da nun das Geſetz für Einheiten gilt, ſo folgt ganz wie in Beweis 1, dass es auch für beliebige Grösen gilt, deren Summe der Klassen $\alpha + \beta = n$ ist.

148. **Satz. Das Enflach der Ergänzungen mehrer Grösen ist die Ergänzung des Enflaches dieſer Grösen oder**

$$\overset{n}{[}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cdots] = \overline{\overset{n}{[}ABC\cdots]}$$

Beweis. Wenn der Satz für m Fache oder Faktoren gilt, ſo dass

$$\overset{n}{[}\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{M}] = \overline{\overset{n}{[}AB\cdots M]} \qquad \text{(Annahme)},$$

ſo gilt er auch für m + 1 Fache oder Faktoren, denn es ſei dieſer (m + 1)te Fach N, ſo ist

$$\overset{n}{[}\overline{A}\overline{B}\cdots\overline{M}\overline{N}] = \overset{n}{[}\overline{[AB\cdots M]}\overline{N}] \qquad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \overline{\overset{n}{[}AB\cdots MN]} \qquad \text{(nach 147)}$$

Nun gilt der Satz für 2 Fache nach 147, alſo gilt er auch fortschreitend für beliebig viele.

149. **Satz. Wenn a, b, c ⋯ Grösen erster Klasse ſind, ſo ist**

$$\overset{n}{[}\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdots] = \overline{\overset{n}{[}abc\cdots]}$$

Das rückschreitende Enflach der Ergänzungen von Grösen erster bez. (n — 1)ter Klasse kann als ein Enflach betrachtet werden dessen Fache oder Faktoren (n — 1)ter bez. erster Klasse ſind.

150. **Satz. Die Ergänzung eines vielgliedrigen Ausdrucks (eines Polynoms) erhält man, wenn man von jedem Gliede, ohne das Vorzeichen des Gliedes zu ändern, die Ergänzung nimmt oder**

$$\overline{(A \pm B \pm C \pm \cdots)} = \overline{A} \pm \overline{B} \pm \overline{C} \pm \cdots$$

Beweis. Es ſei $A = S\alpha_a\overline{E_a}$, $B = S\beta_a\overline{E_a}$, $C = S\gamma_a\overline{E_a}\cdots$, ſo ist $\overline{(A \pm B \pm C \pm \cdots)} =$

$= \overline{(S\alpha_a E_a \pm S\beta_a E_a \pm S\gamma_a E_a \pm \cdots)} = \overline{(S(\alpha_a \pm \beta_a \pm \gamma_a \pm \cdots)E_a)}$

$= S(\alpha_a \pm \beta_a \pm \gamma_a \pm \cdots)\overline{E}_a$ (nach 130)

$= S\alpha_a\overline{E}_a \pm S\beta_a\overline{E}_a \pm S\gamma_a\overline{E}_a \pm \cdots$

$= \overline{(S\alpha_a E_a)} \pm \overline{(S\beta_a E_a)} \pm \overline{(S\gamma_a E_a)} \pm \cdots = \overline{A} \pm \overline{B} \pm \overline{C} \pm \cdots$ (nach 130)

Satz. Eine Gleichung, in welcher keine andern Verknüpfungen als die Bildung von Vielfachenſummen beliebigen Gebietes und Modelung vorkommen, bleibt auch bestehen, wenn man in der Gleichung statt der Grösen ihre Ergänzungen ſetzt oder 151.

Wenn $f_0(A, B \cdots) = \varphi_0(A', B' \cdots)$, wo f_0 und φ_0 Verknüpfungen der genannten Art ſind, ſo ist auch

$$f_0(\overline{A}, \overline{B} \cdots) = \varphi_0(\overline{A}', \overline{B}' \cdots)$$

Beweis. In den Verknüpfungen der Formeln f_0 und φ_0 können nur Zufügen und Abziehen, ſowie Modlung vorkommen, wenn wir zur letzteren auch die Vervielfachung mit Zahlen rechnen. Nun bleibt beim Zufügen und Abziehen die Gleichung nach Satz 150 auch für die Ergänzungen und bei der Modlung nach Satz 148 auch für die Ergänzungen bestehen, mithin gilt allgemein für dieſe Arten der Verknüpfungen, wenn $f_0(A, B \cdots) = \varphi_0(A', B' \cdots)$ auch $f_0(\overline{A}, \overline{B} \cdots) = \varphi_0(\overline{A}', \overline{B}', \cdots)$.

Satz. Zwischen den Grösen m ter und denen (n — m) ter Klasse in einem Hauptgebiete n ter Stufe besteht volle Gegenſeitigkeit, ſo dass jeder Satz, der von den einen gilt, auch für die andern gilt. 152.

Satz. Für drei Einheiten EFG, bei denen die Summe der Klassen der Stufe des Hauptgebietes n gleich ist, ist 153.

$$\overset{n}{[}EF(EG)] = \overset{n}{[}EFGE].$$

Beweis. 1. Wenn $\overset{n}{[}EFG]$ keine gleichen Fache enthält, ſo muss es alle n ursprünglichen Einheiten enthalten und ist nach 137 alſo $= \pm 1$. Dann ist nach 138

$$\overline{G} = \overset{n}{[}G(EF)(EF)] \qquad \overline{F} = \overset{n}{[}F(EG)(EG)]$$

Dieſe können wir, da $\overset{n}{[}G(EF)]$ und $\overset{n}{[}F(EG)]$ gleich ± 1 ist, mit $\overset{n}{[}G(EF)]$ bez. $\overset{n}{[}F(EG)]$ vervielfachen und erhalten dann $\overset{n}{[}G(EF)] \cdot \overset{n}{[}G(EF)] = 1$, und $\overset{n}{[}F(EG)] \cdot \overset{n}{[}F(EG)] = 1$, mithin

$$\overset{n}{[}G(EF)\overline{G}] = \overset{n}{[}EF], \qquad \overset{n}{[}F(EG)\overline{F}] = \overset{n}{[}EG]$$

Hier erhält man, da man die Zahlfache beliebig ordnen kann,

$$\overset{n}{[}EF(EG)] = \overset{n}{[}G(EF)\bar{G}]\cdot\overset{n}{[}F(EG)\bar{F}] = \overset{n}{[}G(EF)]\overset{n}{[}F(EG)]\overset{n}{[}\bar{G}\bar{F}]$$

$$= \overset{n}{[}G(EF)]\overset{n}{[}F(EG)\overline{]}\cdot\overset{n}{[}GF] \qquad \text{(nach 147)}$$

$$= \overset{n}{[}G(EF)]\overset{n}{[}F(EG)]\overset{n}{[}GFEE] \qquad \text{(nach 138)}$$

In dieſem Ausdrucke ist $\overset{n}{[}FE] = \pm\overset{n}{[}EF]$ (nach 91), mithin bleibt das Zeichen unverändert, wenn man zweimal dieſe Aenderung macht, d. h. es wird

$$\overset{n}{[}EF(EG)] = \overset{n}{[}G(EF)]\overset{n}{[}E(FG)]\overset{n}{[}GEFE]$$

$$= \overset{n}{[}EFGE]$$

Da $\overset{n}{[}GEF] = \pm 1$, mithin $\overset{n}{[}GEF]\cdot\overset{n}{[}GEF] = 1$ ist.

2. Wenn $\overset{n}{[}EFG]$ gleiche Fache enthält, ſo ist $\overset{n}{[}EFG] = 0$ nach 92. Ferner muss, da die Zahl ſeiner Fache n ist, mindestens eine der n Einheiten des Hauptgebietes, etwa e, in dem Flache $\overset{n}{[}EFG]$, alſo auch in $\overset{n}{[}EF]$ und in $\overset{n}{[}EG]$ fehlen. Sei nun $[EF] = \bar{Q}$ und $[EG] = \bar{R}$, ſo müssen nach 127 ſowohl Q als R dieſe Einheit als Fach enthalten, mithin muss nach 92 $\overset{n}{[}QR]$ gleich Null ſein, alſo nach 127 auch die Ergänzung derſelben $\overline{\overset{n}{[}QR]} = \overset{n}{[}\bar{Q}\bar{R}]$ gleich Null ſein. Mithin ist

$$\overset{n}{[}EF(EG)] = \overset{n}{[}\bar{Q}\bar{R}] = 0 = [EFGE]$$

154. **Satz. Für drei einfache Grösen A, B, C, bei denen die Summe der Stufenzahlen $\alpha + \beta + \gamma$ der Stufenzahl des Hauptgebietes n gleich ist, ist**

$$\overset{n}{[}\mathbf{AB(AC)}] = \overset{n}{[}\mathbf{ABC\cdot A}]$$

Beweis. 1. Angenommen, der Satz gelte für den Fall, dass die drei einfachen Grösen keine anderen Fache enthalten als ſolche, welche einer gegebenen Reihe von n Grösen erster Stufe $a_1, a_2 \cdots a_n$ angehören, ſo ſoll zunächst bewieſen werden, dass ſie auch noch gilt, wenn man statt einer dieſer Grösen z. B. statt a_1 eine Vielfachenſumme der n Grösen, etwa

$$a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \underset{1,n}{S}\alpha_a a_a \qquad \text{ſetzt.}$$

Es kann a_1 in jeder der drei Grösen A, B, C enthalten ſein.

Ist a_1 in B enthalten, ſo ſei $B = \overset{n}{[}a_1 D]$ und verwandle ſich, wenn man a' statt a_1 einführt, B in $B' = \overset{n}{[}a'D]$, dann wird

$$\overset{n}{[}AB'(AC)] = \overset{n}{[}A(a'D)(AC)] = \overset{n}{\left[}A\left(\underset{1,n}{S}\alpha_a a_a D\right)\left(AC\right)\right]$$

$$= \underset{1,n}{S}\alpha_a \overset{n}{[}A(a_aD)(AC)] \qquad \text{(nach 75)}$$

$$= \underset{1,n}{S}\alpha_a \overset{n}{[}A(a_aD)CA] \qquad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \overset{n}{\left[}A\left(\underset{1,n}{S}\alpha_a a_a D\right)CA\right] \qquad \text{(nach 75)}$$

$$= \overset{n}{[}Aa'DCA] = \overset{n}{[}AB'CA]$$

Genau derfelbe Beweis folgt, wenn a_1 in C enthalten ist.

Ist a_1 in A enthalten, fo fei $A = [a_1D]$ und verwandle fich, wenn man zunächst $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ statt a_1 einführt, A in $A' = \overset{n}{[}a'D]$, dann ist

$$A' = \alpha_1 \overset{n}{[}a_1D] + \alpha_2 \overset{n}{[}a_2D] = \alpha_1 A + \alpha_2 \overset{n}{[}a_2D] \qquad (+)$$

Wenn hier noch a_2 in D enthalten ist, fo wird nach 92 das letzte Stück $\overset{n}{[}a_2D] = 0$, es würde alfo $A' = \alpha_1 A$ und würde

$$\overset{n}{[}A'B(A'C)] = \alpha^2 \overset{n}{[}AB(AC)] = \alpha^2 \overset{n}{[}ABCA] \qquad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \overset{n}{[}\alpha ABC(\alpha A)] = \overset{n}{[}A'BCA'] \qquad \text{(nach 75)}$$

Wenn dagegen α_2 nicht in D, alfo auch nicht in A vorkommt, fo kann es nur in B oder C enthalten fein. Es fei in B und $B = [a_2E]$. Dann ist (nach +) $A' = \alpha_1 A + \alpha_2 [a_2D]$, alfo da a_2 auch in B enthalten $\overset{n}{[}a_2DB] = 0$, mithin ist $\overset{n}{[}A'B] = \alpha_1 \overset{n}{[}AB]$, und ist $\overset{n}{[}A'C] = \overset{n}{[}(\alpha_1 A + \alpha_2 \overset{n}{[}a_2D)]C] = \alpha_1 \overset{n}{[}AC] + \alpha_2 \overset{n}{[}a_2DC]$, mithin ist

$$\overset{n}{[}A'B(A'C)] = \alpha_1{}^2 \overset{n}{[}AB(AC)] + \alpha_1\alpha_2 \overset{n}{[}AB(a_2DC)]$$

$$= \alpha_1{}^2 \overset{n}{[}ABCA] + \alpha_1\alpha_2 \overset{n}{[}AB(a_2DC)] \qquad \text{(nach Annahme)}$$

Im zweiten Stücke ist hier, wenn man für A und B die Werte einfetzt

$$\overset{n}{[}AB(a_2DC)] = \overset{n}{[}a_1Da_2E(a_2DC)] = -\overset{n}{[}a_2Da_1E(a_2DC)] \qquad \text{(nach 91)}$$

$$= -\overset{n}{[}a_2Da_1EC(a_2D)] \qquad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \overset{n}{[}a_1Da_2EC(a_2D)] = \overset{n}{[}ABC(a_2D)] \qquad \text{(nach 91)}$$

fomit wird

$$\overset{n}{[}A'B(A'C)] = \alpha_1{}^2 \overset{n}{[}ABCA] + \alpha_1\alpha_2 \overset{n}{[}ABC(a_2D)]$$

$$= \alpha_1 \overset{n}{[}ABC(\alpha_1 A + \alpha_2 a_2 D)]$$

$$= \alpha_1 \overset{n}{[}ABCA'] = \overset{n}{[}A'BC \cdot A']$$

Ebenſo folgt der Beweis, wenn a_2 in C statt in B enthalten war. Es ist alſo bewieſen, dass der Satz bestehen bleibt, wenn ſich das eine Fach a_1 in $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ verwandelt, alſo auch, wenn man dies wieder in $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ verwandelt u. ſ. w.

2. Der Satz 154 bleibt alſo, wenn er für den Fall gilt, dass die 3 Grösen A, B, C nur Fache enthalten, welche irgend einer Reihe von n Grösen erster Klasse $a_1, a_2 \cdots a_n$ angehören, auch bestehen, wenn man statt einer dieſer Grösen, eine Vielfachenſumme der n Grösen ſetzt. Führt man dieſe Vielfachenſumme statt der ursprünglichen Gröse ein, ſo gilt nun der Satz für eine Reihe von n Grösen und bleibt alſo nach Beweis 1 auch bestehen, wenn man statt einer zweiten Gröse eine Vielfachenſumme der n ursprünglichen Grösen einführt. Er bleibt alſo auch bestehen, wenn man statt der n Grösen $a_1 a_2 \cdots a_n$ andere n Grösen $b_1 \cdots b_n$ einführt, welche gegenſeitig frei und Vielfachenſummen jener Grösen ſind, und ist das Gebiet der ersten n Grösen nach 22 dem Gebiete der letzten n Grösen gleich.

3. Nun gilt der Satz nach 153, wenn die Grösen A, B, C Einheiten ſind, alſo gilt er auch für alle aus ihnen abgeleiteten Grösen A, B, C, ſofern die Reihe der n Grösen erster Stufe, welche ihre Fache bilden, gegenſeitig frei ſind, oder ſofern $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist.

155. **Satz. Für die Grösen A, B, C gilt die Gleichung**

$$\overset{n}{[}AB(AC)] = \overset{n}{[}ABCA]$$

auch dann, wenn auch B und C zuſammengeſetzte Grösen ſind, ſofern nur A eine einfache Gröse und die Summe der Klassen der drei Grösen der Stufe des Hauptgebietes gleich ist.

Beweis. Es ſei $B = S\beta_\mathfrak{b}\overline{D_\mathfrak{b}}$, $C = S\gamma_\mathfrak{c}\overline{E_\mathfrak{c}}$, wo D und E Zeuge (Produkte) von einfachen Grösen ſind, ſo ist

$$\overset{n}{[}AB(AC)] = S\beta_\mathfrak{b}\gamma_\mathfrak{c}\overset{n}{[}AD_\mathfrak{b}(AE_\mathfrak{c})] \quad \text{(nach 74)}$$
$$= S\beta_\mathfrak{b}\gamma_\mathfrak{c}\overset{n}{[}AD_\mathfrak{b}E_\mathfrak{c}A] \quad \text{(nach 153)}$$
$$= \overset{n}{[}A(S\beta_\mathfrak{b}D_\mathfrak{b})(S\gamma_\mathfrak{c}E_\mathfrak{c})A] \quad \text{(nach 74)}$$
$$= \overset{n}{[}ABCA]$$

Wenn A eine zuſammengeſetzte Gröse ist, gilt der Satz nicht mehr allgemein. Sei z. B. $A = ab + cd$, wo a, b, c, d gegenſeitig frei, und ſei $B = c$, $C = d$, ſo wird in Bezug auf ein Gebiet 4ter Stufe $\overset{4}{[}AB(AC)] = \overset{4}{[}(ab + cd)c((ab + cd)d)] = \overset{4}{[}abc(abd)]$, da $\overset{4}{[}cdc]$ und $\overset{4}{[}cdd]$ verschwinden; aber $\overset{4}{[}abc(abd)] = \overset{4}{[}abcd(ab)]$. Alſo wird

$$\overset{4}{[}AB(AC)] = \overset{4}{[}abcd(ab)].$$

Dagegen wird

$$\overset{4}{[}ABCA] = \overset{4}{[}(ab + cd)cd(ab + cd)] = \overset{4}{[}abcd(ab + cd)]$$
$$= \overset{4}{[}abcd(ab)] + \overset{4}{[}abcd(cd)] = \overset{4}{[}abcd(ab)] + \overset{4}{[}abcd(cd)]$$

Alſo ſind beide Ausdrücke um $\overset{4}{[}abcd(cd)]$ von einander verschieden.

Satz. Für drei einfache Grösen A, B, C, deren Flach nullter Klasse ist, gelten die drei Gleichungen: 156.

1. $\overset{n}{[}AB(AC)] = \overset{n}{[}ABCA]$
2. $\overset{n}{[}AB(BC)] = \overset{n}{[}ABCB]$
3. $\overset{n}{[}AC(BC)] = \overset{n}{[}ABCC]$.

Beweis. 1. Es ſeien die Klassen von A, B, C gleich α, β, γ, die Stufe des Hauptgebietes ſei n. Da nun das Flach $\overset{n}{[}ABC]$ nullter Klasse ſein ſoll, ſo muss nach 126 auch $0 = \overset{n}{(}\alpha + \beta + \gamma)$, d. h. $\alpha + \beta + \gamma$ durch n teilbar ſein, mithin da α, β, γ kleiner als n ſind, gleich n oder gleich 2n ſein. Wenn $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist, ſo gilt die Formel 1 nach 154. Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2n$ ist, ſo ſei $A = \overline{A}'$, $B = \overline{B}'$, $C = \overline{C}'$ und ſeien α', β', γ' die Klassen von A′, B′, C′, ſo ist $\alpha' = n - \alpha$, $\beta' = n - \beta$, $\gamma' = n - \gamma$ (nach 130), mithin ist $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3n - (\alpha + \beta + \gamma) = 3n - 2n = n$. Dann aber ist

$$\overset{n}{[}AB(AC)] = \overset{n}{[}\overline{A}'\cdot\overline{B}'(\overline{A}'\cdot\overline{C}')] = \overline{\overset{n}{[}A'B'\cdot A'C']} \qquad \text{(nach 147)}$$

$= \overline{\overset{n}{[}A'B'C'A']}$, nach 155, da $\alpha' + \beta' + \gamma' = n$. Mithin nach 148

$$= \overset{n}{[}\overline{A}'\cdot\overline{B}'\cdot\overline{C}'\cdot\overline{A}'] = \overset{n}{[}ABC\cdot A].$$

2. Es ſei $\overset{n}{[}AB] = \overset{n}{[}BD]$, ſo ist D von gleicher Klasse mit A, mithin

$$\overset{n}{[}AB(BC)] = \overset{n}{[}BD(BC)] = \overset{n}{[}BDCB] \qquad \text{(nach } 156_{,1})$$
$$= \overset{n}{[}ABCB],$$

da $\overset{n}{[}BD] = \overset{n}{[}AB]$ ist.

3. Es ſei $\overset{n}{[}BC] = \overset{n}{[}CD]$, ſo ist D von gleicher Klasse mit B, mithin

$$\overset{n}{[}AC(BC)] = \overset{n}{[}AC(CD)] = \overset{n}{[}ACDC] \qquad (156_{,2})$$
$$= \overset{n}{[}ABCC],$$

da $\overset{n}{[}CD] = \overset{n}{[}BC]$ ist.

157. **Satz. Für zwei einfache Grösen A und C, bei denen die Summe der Klassen $\alpha + \gamma$ der Stufe n des Hauptgebietes gleich ist, gelten für die einfache der Gröse A untergeordnete Gröse B die folgenden Gleichungen:**

$$\overset{n}{[}A(BC)] = \overset{n}{[}ACB]$$

$$\overset{n}{[}CBA] = [CAB].$$

Beweis. Nach 117 ist A in der Form BD darstellbar, mithin ist

$$\overset{n}{[}A(BC)] = \overset{n}{[}BD(BC)] = \overset{n}{[}BDCB] \qquad \text{(nach } 156_{,1})$$

$$= \overset{n}{[}ACB] \qquad \text{und}$$

$$\overset{n}{[}CB \cdot A] = \overset{n}{[}CB(BD)] = \overset{n}{[}CBDB] \qquad \text{(nach } 156_{,2})$$

$$= \overset{n}{[}CAB]$$

158. **Satz. Das Enflach zweier einfachen Grösen, die ungleich Null find, ist dann, und nur dann von Null verschieden, wenn die Stufe ihres verbindenden Gebietes den grösten, oder, was dasfelbe ist, wenn die Stufe ihres gemeinschaftlichen Gebietes den kleinsten Wert hat, den fie bei den Klassen der beiden Fache oder Faktoren und der Stufe des Hauptgebietes haben kann, oder**

Wenn δ die Klasse des verbindenden Gebietes, γ die des gemeinschaftlichen ist, und

wenn $\alpha + \beta \leq$ n, d. h. wenn das Enflach ein fortschreitendes oder stehendes ist, fo ist

$\overset{n}{[}AB] \gtrless 0$, dann und nur dann, wenn

$\alpha + \beta = \delta$, oder, was dasfelbe ist, $\gamma = 0$; ferner

wenn $\alpha + \beta > $ n, d. h. wenn das Enflach ein rückschreitendes ist, fo ist

$\overset{n}{[}AB] \gtrless 0$, dann und nur dann, wenn

$\delta =$ n, oder, was dasfelbe ist, $\gamma = \alpha + \beta -$ n ist.

Beweis. 1. Es fei $\alpha + \beta \leq$ n, fo ist das Enflach (nach 133) fortschreitend, mithin (nach 93, 92) dann und nur dann Null, wenn zwischen feinen einfachen Fachen eine Hörigkeit herrscht. Wenn alfo $\overset{n}{[}AB] = 0$ ist, fo lässt fich (nach 19) von den einfachen Fachen oder Faktoren des Flaches $\overset{n}{[}AB]$ eines als Vielfachenfumme aus den $\alpha + \beta - 1$ übrigen darstellen. Dann werden mithin fämmtliche einfache Fache jenes Flaches von einem Gebiete von niederer als $(\alpha + \beta)$ter Stufe umfasst, d. h. $\delta < \alpha + \beta$. Ist hingegen $\overset{n}{[}AB] \gtrless 0$, fo find die einfachen Fache diefes Flaches (nach 93) gegenfeitig frei, ihr verbindendes

Gebiet ist alſo von $(\alpha + \beta)$ter Stufe, d. h. $\alpha + \beta = \delta$. Alſo ist, wenn $\alpha + \beta \leqq n$ ist, $\overset{n}{[AB]}$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\alpha + \beta = \delta$ ist. Dann aber ist nach 31 stets auch $\gamma = 0$.

Endlich ist, wenn $\alpha + \beta \leqq n$ ist, die kleinste Stufenzahl, die das den Grösen A und B gemeinschaftliche Gebiet haben kann, Null, und die grösste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta$.

2. Wenn dagegen $\alpha + \beta > n$ ist, dann haben die Gebiete A und B, da ſie von αter und βter Stufe ſind, nach 32 mindestens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$ter, d. h. γter Stufe gemein. Sei demnach C eine Gröse von γter Klasse in dieſem gemeinſamen Gebiete, dann lassen ſich A und B (nach 117) in den Formen $A = \overset{n}{[CA_1]}$, $B = \overset{n}{[CB_1]}$ darstellen, wo A_1 und B_1 Grösen von der Klasse $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ ſind, mithin ist $\overset{n}{[CA_1B_1]}$ von $n$ter Klasse, da die Klasse $\gamma + \alpha - \gamma + \beta - \gamma = \alpha + \beta - \gamma = n$ ist. Mithin ist nach 155

$$\overset{n}{[AB]} = \overset{n}{[CA_1(CB_1)]} = \overset{n}{[CA_1B_1C]}.$$

Hier ist aber $\overset{n}{[CA_1B_1]}$ von $n$ter oder mit andern Worten von nullter Klasse, alſo eine Zahl, und dieſe ist dann und nur dann Null, wenn $\overset{n}{[CA_1B_1]}$, d. h. $\overset{n}{[AB_1]}$ Null ist. Aber nach Beweis 1 ist $\overset{n}{[AB_1]}$ dann und nur dann Null, wenn A und B_1 von einem Gebiete von niederer als $n$ter Stufe umfasst werden, aber da C in $A = CA_1$ liegt, ſo werden dann auch A und CB_1, d. h. A und B von einem Gebiete niederer als $n$ter Stufe, umfasst, d. h. $\delta < n$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, $\overset{n}{[AB]}$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\delta = n$ ist. Dann aber ist nach 32 auch stets $\gamma = \alpha + \beta - n$.

Endlich ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, die gröste Stufenzahl, die das verbindende Gebiet haben kann, n, alſo (nach 31) die kleinste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta - n$. Mithin ist der Satz 158 in allen Teilen bewieſen.

Erklärung. Wir ſetzen das Nein einer Gröse A (Zeichen $\overset{\vdash\!\dashv}{A}$, gelesen Nein A) gleich dem Enflache $\overset{n}{[AA'A']}$, wo A' das Flach derjenigen n gegenſeitig freien Grösen $a_1 a_2 \cdots a_n$ ist, welche in A nicht vorkommen oder $\overset{\vdash\!\dashv}{A} \overset{*}{=} \overset{n}{[AA'A']}$ * wo $[AA'] = \pm [a_1 a_2 \cdots a_n]$. 159.

Wir müssen dieſe Erklärung hier einfügen, um zu einer allgemeinen Geltung für die Geſetze der Modlung zu gelangen.

Satz. Alle Geſetze der Modlung gelten auch noch, wenn man überall statt der ursprünglichen Einheiten erster Klasse eine beliebige 160.

Reihe von n Grösen erster Klasse fetzt, welche Vielfachenfummen derfelben find, und deren Enflach 1 ist.

Beweis. Es feien $e_1 \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, und $a_1 \cdots a_n$ Vielfachenfummen derfelben, für welche

$$\overset{n}{[}a_1, a_2 \cdots a_n] = 1 \text{ gilt.}$$

Es fei nun F' das Flach aller in der Einheit m ter Stufe E nicht vorkommenden Einheiten erster Stufe des Hauptgebietes, fo ist nach 138

$$\overline{E} = \overset{n}{[}EFF'].$$

Sei in gleicher Weife A' das Flach aller in A nicht vorkommender Grösen $a_1, a_2 \cdots a_n$, fo ist nach 159

$$\overset{\bowtie}{A} = \overset{n}{[}AA'A'].$$

Wir müssen nun zunächst beweifen, dass auch für diefe Gröse die in Erklärung 133 aufgestellte Bestimmung ihre Geltung behält, wenn wir die Grösen $a_1 \cdots a_n$ an Stelle der ursprünglichen Einheiten einführen, d. h. dass

(*) $\overset{\bowtie}{\overset{n}{[}AB]} = \overset{n}{[}\overset{\bowtie}{A}\overset{\bowtie}{B}]$ fei, wenn $\alpha + \beta \gtreqless n$ ist. Wir beweifen den Satz zunächst für den Fall, wenn $\alpha + \beta < n$ ist.

1. Sei nun zunächst $\overset{n}{[}AB] = 0$, fo müssen (nach 156) die Gebiete A und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe, alfo ein Gebiet γ ter Stufe oder γ Fache erster Klasse gemein haben, dann werden diefe Fache, da $\overset{\bowtie}{A}$ nur diejenigen Fache enthält, welche in A nicht vorkommen, in $\overset{\bowtie}{A}$ fehlen, und aus gleichem Grunde auch in $\overset{\bowtie}{B}$, alfo werden $\overset{\bowtie}{A}$ und $\overset{\bowtie}{B}$ von einem Gebiete von niederer als n ter Stufe umfasst, alfo ist (nach 158)

$$\overset{n}{[}\overset{\bowtie}{A}\overset{\bowtie}{B}] = 0,$$

mithin, da auch $\overset{n}{[}AB] = 0$ ist und die Ergänzung einer Zahl (nach 127) diefer gleich ist, d. h. die von Null felbst Null ist, fo ist

$$\overset{\bowtie}{\overset{n}{[}AB]} = \overset{n}{[}\overset{\bowtie}{A}\overset{\bowtie}{B}].$$

2. Sei ferner $\overset{n}{[}AB] \gtrless 0$, fo enthält dasfelbe $\alpha + \beta$ verschiedene Fache erster Klasse der Reihe $a_1 \cdots a_n$. Sei nun C das Flach der übrigen Fache, fo ist (nach 91) $\overset{n}{[}ABC] = \pm \overset{n}{[}a_1 \cdots a_n]$, mithin, da $\overset{n}{[}a_1 \cdots a_n] = 1$ ist, fo ist $\overset{n}{[}ABC] = \pm 1$. Da nun $\overset{n}{[}BC]$ das Flach der in A nicht vorkommenden Fache ist, fo ist nach der hier angenommenen Bezeichnung

$$\overset{\bowtie}{A} = \overset{n}{[}ABC(BC)], \text{ ebenfo}$$

$$\overset{\vdash\!\dashv}{B} = \overset{n}{[}BAC(AC)] \text{ und } \overset{\vdash\!\dashv}{\overset{n}{[}AB]} = \overset{n}{[}ABCC]$$

wo $\overset{n}{[}ABC]$ und $\overset{n}{[}BAC]$ wie bewiesen $= \pm 1$ sind, oder Zahlen sind, mithin ist $\overset{n}{[}\overset{\vdash\!\dashv}{A}\overset{\vdash\!\dashv}{B}] = \overset{n}{[}ABC]\overset{n}{[}BAC]\overset{n}{[}BC(AC)]$

$$= \overset{n}{[}ABC]\overset{n}{[}BAC]\overset{n}{[}BAC \cdot C] \qquad (154,_{3}).$$

Da aber $\overset{n}{[}BAC] = \pm 1$ ist, so ist $\overset{n}{[}BAC]\overset{n}{[}BAC] = 1$. Also

$$\overset{n}{[}\overset{\vdash\!\dashv}{A}\overset{\vdash\!\dashv}{B}] = \overset{n}{[}ABC \cdot C] = \overset{\vdash\!\dashv}{\overset{n}{[}AB]}.$$

Es gilt also die Formel, wenn $\alpha + \beta < n$ ist.

Dann gilt die Formel aber auch, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, und zwar folgt dieser Teil des Satzes ganz in gleicher Weise, wie Satz 147,$_{2}$.

Es gilt also die Erklärung 133, auch wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Grösen $a_1 \cdots a_n$ einführt, ebenso gelten alle früheren Sätze, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige gegenseitig freie n Grösen setzt, deren Flach nicht Null ist, also auch, wenn man statt derselben die Grösen $a_1 \cdots a_n$ setzt. Aus diesen früheren Sätzen und der in der Erklärung festgestellten Bestimmung sind aber alle folgenden Gesetze abgeleitet, folglich gelten auch diese noch bei der angegebenen Einführung der Grösen $a_1 \cdots a_n$ statt der ursprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$.

Zu bemerken ist hier, dass $\overset{\vdash\!\dashv}{A}$ nicht mit $\overline{A}$ zusammenfällt, so z. B. ist in dem Gebiete dritter Stufe e_1, e_2, e_3, wo $\overset{3}{[}e_1 e_2 e_3] = 1$ ist, die Ergänzung von $e_1 + e_2$, da $\overline{e_1} = \overset{3}{[}e_2 e_3]$, $\overline{e_2} = \overset{3}{[}e_3 e_1]$ ist, $\overline{\overset{3}{[}e_1 + e_2]} = \overline{e_1} + \overline{e_2} = \overset{3}{[}e_2 e_3] + \overset{3}{[}e_3 e_1]$. Dagegen ist, wenn

$$a_1 = e_1 + e_2, \; a_2 = e_2, \; a_3 = e_3$$

ist bei Anwendung der Bezeichnung in obigem Satze

$$\overset{\vdash\!\dashv}{a_1} = \overset{3}{[}a_1 a_2 a_3 (a_2 a_3)] = \overset{3}{[}a_2 a_3] = \overset{3}{[}e_2 e_3],$$

also von $\overline{a_1}$ um $[e_3 e_1]$ verschieden. Im folgenden Abschnitte wird sich ergeben, welche Beziehungen zwischen $e_1 \cdots e_n$ und $a_1 \cdots a_n$ stattfinden müssen, wenn $\overline{A} = \overset{\vdash\!\dashv}{A}$ sein soll.

Satz. Wenn 161.

$$1 = \overset{n}{[}a_1 \cdots a_n] = \overset{n}{[}PP'] = \overset{n}{[}AA'] = \overset{n}{[}BB'] = \overset{n}{[}C \cdot C'] = \cdots$$

ist, und alle diese Grösen $P, P', A, A' \cdots$ keine anderen Grösen erster Klasse enthalten, als die der Reihe $a_1 \cdots a_n$ angehören, auch

$$P = \overset{n}{[}ABC \cdots] \text{ ist, so ist auch } P' = \overset{n}{[}A'B'C' \cdots].$$

Beweis. Nach Erklärung 159 ist, da $1 = \overset{n}{[}PP'] = \overset{n}{[}AA']$

$$\overset{\vdash\!\dashv}{P} = \overset{n}{[}PP'P'] = P', \; \overset{\vdash\!\dashv}{A} = \overset{n}{[}AA'A'] = A' \text{ u. s. w.}$$

Da nun nach 160 alle früheren Sätze, alſo namentlich auch Satz 148 noch gelten, ſo ist, wenn man überall das Zeichen $\bowtie$ statt $-$ ſetzt,

$$\overset{\bowtie n}{[}ABC\cdots] = \overset{n}{[}\overset{\bowtie}{A}\overset{\bowtie}{B}\overset{\bowtie}{C}\cdots],$$

mithin $\overset{\bowtie}{P} = \overset{n}{[}\overset{\bowtie}{A}\overset{\bowtie}{B}\overset{\bowtie}{C}\cdots]$.

Folglich, da $\overset{\bowtie}{P} = P'$, $\overset{\bowtie}{A} = A'$, $\overset{\bowtie}{B} = B'$, $\overset{\bowtie}{C} = C' \cdots$ ist,

$$P' = \overset{n}{[}A'B'C'\cdots].$$

162. **Satz. Wenn man aus n Grösen erster Klasse, deren Enflach gleich 1 ist, die Geschiedsflache (die multiplikativen Kombinationen) zur n − 1ten Klasse bildet, und die einfachen Grösen in jedem Geschiedsflache nach dem Abece, die Flache ſelbst nach dem Lexikon ordnet, unter der Annahme, dass die Reihe jener n Grösen als ein Abece betrachtet werde, ſo ist das Enflach aus den n — m ersten dieſer Geschiedsflache gleich dem Enflache aus den m ersten jener n Grösen, d. h.**

$$\overset{n}{[}A_n\cdots\cdot A_{m+1}] = \overset{n}{[}a_1\cdots\cdot a_m],$$

wenn $\quad A_r = \overset{n}{[}a_1\cdots\cdot a_{r-1}a_{r+1}\cdots a_n]$

und $\quad \overset{n}{[}a_1\cdots a_n] = 1$ **ist.**

Beweis. 1. Wir wollen zuerst beweiſen, dass

$$\overset{n}{[}a_1\cdots\cdot a_r A_r] = \overset{n}{[}a_1\cdots a_{r-1}]$$

ſei. Nach der Bezeichnung im Satze ist

$$A_r = \overset{n}{[}a_1\cdots a_{r-1}a_{r+1}\cdots\cdot a_n]. \quad \text{Mithin ist}$$

$$\overset{n}{[}a_1\cdots a_r A_r] = \overset{n}{[}a_1\cdots a_r(a_1\cdots a_{r-1}a_{r+1}\cdots a_n)]$$

$$= \overset{n}{[}a_1\cdots a_r a_{r+1}\cdots a_n]\overset{n}{[}a_1\cdots a_{r-1}] \qquad (153,_1)$$

$$= \overset{n}{[}a_1\cdots a_{r-1}],$$

da $\overset{n}{[}a_1\cdots a_n] = 1$ ist.

2. Mithin ist

$$\overset{n}{[}A_n A_{n-1}] = \overset{n}{[}a_1\cdots a_{n-1}A_{n-1}] = \overset{n}{[}a_1\cdots a_{n-2}]$$

$$\overset{n}{[}A_n A_{n-1}A_{n-2}] = \overset{n}{[}a_1\cdots\cdot a_{n-2}A_{n-2}] = \overset{n}{[}a_1\cdots a_{n-3}]$$

u. ſ. w. Alſo

$$\overset{n}{[}A_n A_{n-1}\cdots A_{n-r}] = \overset{n}{[}a_1\cdots\cdot a_{n-r-1}].$$

Mithin, wenn $n - r - 1 = m$ ist,

$$\overset{n}{[}A_n A_{n-1}\cdots A_{m+1}] = \overset{n}{[}a_1\cdots a_m].$$

Satz. Wenn $F_1 F_2 \cdots$ die Geschiedsflache aus den Fachen erster Klasse einer von Null verschiedenen Gröse B sind und D_a jedesmal aus denjenigen Fachen von B besteht, welche in F_a fehlen, auch die Fache so geordnet sind, dass jedesmal $\overset{n}{[F_aD_a]} = B$ ist, so ist für jede Gröse A, deren Klasse die Klasse von D_a zu der des Hauptgebietes ergänzt, 163.

$$\overset{n}{[AB]} = S\overset{n}{[AD_aF_a]} = \overset{n}{[AD_1F_1]} + \overset{n}{[AD_2F_2]} + \cdots.$$

Beweis. Es sei m die Anzahl der Fache erster Stufe von B; es sei n die Stufe des Hauptgebietes, α die Klasse von A, und sei $B \doteq [b_1 b_2 \cdots b_m]$.

Da nun nach der Annahme $B \gtrless 0$ ist, so sind (nach 93) die Grösen $b_1 \cdots b_m$ gegenseitig frei, mithin lassen sich (nach 23) zu ihnen noch n — m Grösen erster Klasse $b_{m+1} \cdots b_n$ von der Art hinzufügen, dass alle Grösen erster Klasse, welche dem betrachteten Hauptgebiete angehören, als Vielfachensummen derselben dargestellt werden können. Auch A kann dann als Gröse αter Klasse in der Form

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots = S\alpha_a A_a$$

dargestellt werden, wo $A_1, A_2, \cdots$ die Geschiedsflache aus $b_1 \cdots b_n$ zur αten Klasse sind. Es seien diese Geschiedsflache $A_1, A_2, \cdots$ so gewählt, dass jedesmal A_a aus denjenigen jener n Grösen besteht, welche in D_a fehlen. Dies ist allemal möglich, da D_a nach der Annahme n — α jener Grösen enthält. Dann ist, da nach der Annahme $B = \overset{n}{[F_aD_a]}$ ist

$$\overset{n}{[AB]} = S\overset{n}{[\alpha_aA_aB]} = S\alpha_a\overset{n}{[A_aB]} \qquad (73)$$

$$= S\alpha_a\overset{n}{[A_a(F_aD_a)]}.$$

Da nun F_a nur solche jener n Grösen $b_1 \cdots b_n$ enthält, die dem D_a fehlen, und A_a sämmtliche der in D_a fehlenden Grösen $b_1 \cdots b_n$ enthält, so ist F_a dem A_a untergeordnet, also (nach 157) $\overset{n}{[A_a(F_aD_a)]} = \overset{n}{[A_aD_aF_a]}$, mithin $\overset{n}{[AB]} = S\alpha_a\overset{n}{[A_aD_aF_a]}$.

Ferner ist aber $\overset{n}{[A_bD_a]} = 0$ wenn b von a verschieden ist, weil dann A_b mindestens ein Fach enthält, das auch in D_a vorkommt, also kann man statt $\alpha_a\overset{n}{[A_aD_a]}$ schreiben $S\alpha_b\overset{n}{[A_bD_a]}$, wo sich die Summe nur auf den Zeiger b bezieht, d. h. es ist

$$\alpha_a\overset{n}{[A_aD_a]} = S\alpha_b\overset{n}{[A_bD_a]} = \overset{n}{[S\alpha_bA_bD_a]} = \overset{n}{[AD_a]},$$

mithin $\overset{n}{[AB]} = S\overset{n}{[AD_aF_a]}$.

11. Die reinen und die gemischten Enflache.

Auch in dieſer Nummer ſetzen wir in allen Sätzen die Stufe des Hauptgebietes gleich n, die Klasse der Gröse A gleich α, die der Gröse B gleich β, die der Gröse C gleich γ u. ſ. w., und bemerken dies für alle Sätze vorweg.

164. **Erklärung. Ein rein fortschreitendes Modelflach heist das Modelflach mehrer Grösen, wenn dieſe keiner andern als der fortschreitenden Flachung unterliegen.**

Ein rein rückschreitendes Modelflach heist das Modelflach mehrer Grösen, wenn dieſe keiner andern als der rückschreitenden Modlung unterliegen. Wenn das Geſammtflach nullter Stufe ist, ſo kann die letzte Modlung, welche dies Geſammtflach bildet, nach 133 ſowohl fortschreitend wie rückschreitend ſein.

Beide Arten der Flache heisen reine Modelflache, alle andern gemischte.

Beispielsweiſe ist das Enflach $\overset{p}{[}ABCD\cdots HJ]$ ein rein fortschreitendes, wenn das Enflach $\overset{p}{[}AB]$, ebenſo das Enflach von $\overset{p}{[}AB]$ mit C, das Enflach von $\overset{p}{[}ABC]$ mit D jedes fortschreitend ist u. ſ. w., endlich auch das Enflach von $\overset{p}{[}ABCD\cdots H]$ mit J fortschreitend ist. Dagegen heist das Enflach ein rein rückschreitendes, wenn das Enflach $\overset{p}{[}AB]$, ebenſo das Enflach von $\overset{p}{[}AB]$ mit C, das von $\overset{p}{[}ABC]$ mit D jedes rückschreitend ist u. ſ. w., endlich auch das von $\overset{p}{[}ABCD\cdots H]$ mit J rückschreitend ist. Im Hauptgebiete dritter Stufe bildet das Dreiflach $\overset{3}{[}ab(ac)(bc)]$ ein Beispiel des rein rückschreitenden Modelflaches.

165. **Satz. Wenn ein Enflach mehrer Grösen $\overset{p}{[}ABC\cdots]$ ein rein fortschreitendes ist, ſo ist das der Ergänzungen $\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cdots]$ ein rein rückschreitendes und umgekehrt.**

Beweis. Nach 144 gilt der Satz für zwei Fache oder Faktoren, mithin da $\overset{p}{[}AB]$ ein fortschreitendes Flach ist, ſo ist $\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}]$ ein rückschreitendes, und da $\overset{n}{[}ABC]$ ein fortschreitendes ist, ſo ist $\overset{p}{[}\overline{(AB)}\bar{C}]$ ein rückschreitendes, alſo ist $\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}\bar{C}]$ ein rein rückschreitendes u. ſ. w.

166. **Satz. Ein Enflach von m Grösen A, B, C, · · · L, M ist ein rein fortschreitendes, wenn die Summe der Klassen dieſer Grösen ebenſo gros oder kleiner ist als die Stufe (n) des Hauptgebietes, hingegen ein rein rückschreitendes, wenn jene Summe ebenſo gros oder gröser ist als n(m — 1), ein gemischtes, wenn jene Summe gröser als n und kleiner als n(m — 1) ist.**

Beweis. 1. Es ſeien $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ die Klassen der Grösen A, B, C, $\cdots$. Wenn nun $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu \leqq n$ ist, ſo ist auch $\alpha+\beta < n$, folglich ist das Enflach $\overset{n}{[}AB]$ (nach 133) ein fortschreitendes. Ebenſo ist $\alpha+\beta+\gamma < n$, alſo das Enflach der zwei Grösen $\overset{n}{[}AB]$ und C ein fortschreitendes, u. ſ. w. Endlich ist auch $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu \leqq n$, alſo auch das Enflach der zwei Grösen $\overset{n}{[}ABC\cdots L]$ und M, da die Stufe von $\overset{n}{[}ABC\cdots L]$ (nach 146) gleich $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda$ ist, ein fortschreitendes. Ebenſo folgt das Umgekehrte, dass, wenn $\overset{n}{[}ABC\cdots LM]$ ein rein fortschreitendes Flach ist, dann auch $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu \leqq n$ ſein muss.

2. Wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu \geqq n(m-1)$ ist, ſo folgt: $(n-\alpha)+(n-\beta)+(n-\gamma)+\cdots+(n-\lambda)+(n-\mu) \leqq n$, da m die Anzahl der Grösen A, B, C, $\cdots$ L, M ist. Da nun $n-\alpha$ die Klasse der Ergänzung von A, d. h. die Klasse von $\bar{A}$ ist u. ſ. w., ſo ist das Flach

$$\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cdots\bar{L}\bar{M}]$$

nach Beweis 1 ein rein fortschreitendes, folglich (nach 165) $\overset{n}{[}ABC\cdots LM]$ ein rein rückschreitendes.

Satz. Die Klasse eines rein fortschreitenden Enflaches ist 0, 167.
wenn die Summe der Klassen ſeiner Fache oder Faktoren gleich der Stufe n des Hauptgebietes ist, in jedem andern Falle ist die Klasse jenes Enflaches gleich der Summe der Klassen ſeiner Fache oder Faktoren. Die Klasse eines rein rückschreitenden Enflaches ist $=\sigma-(m-1)n$, wenn σ die Summe der Klassen ſeiner Fache und m die Anzahl dieſer Fache ist.

Beweis. Für zwei Fache oder Faktoren ist der Satz bereits in 145 bewieſen. Ist nun das Enflach $\overset{n}{[}ABC\cdots LM]$ ein rein fortschreitendes und ſind $\alpha,\beta,\gamma,\cdots\lambda,\mu$ die Klassen von A, B, C $\cdots$ L, M, ſo ist die von $\overset{n}{[}AB]=\alpha+\beta$, die alſo von $\overset{n}{[}ABC]=\alpha+\beta+\gamma$ u. ſ. w.; alſo die von $\overset{n}{[}ABC\cdots L]=\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda$. Ist nun $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu < n$, ſo ist nach demſelben Satze (145) die Klasse von $\overset{n}{[}ABC\cdots LM]=\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu$, wenn aber $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda+\mu = n$ ist, ſo ist ſie nach demſelben Satze null. Ist zweitens das Modelflach $\overset{n}{[}ABC\cdots LM]$ ein rein rückschreitendes, ſo

ist nach dem angeführten Satze die Klasse von $\overset{n}{[}AB]$ gleich $\alpha + \beta - n$, alſo die von $\overset{n}{[}ABC]$ gleich $\alpha + \beta - n$, alſo die von $\overset{n}{[}ABC]$ gleich $\alpha + \beta + \gamma - 2n$ u. ſ. w., alſo wenn m die Anzahl der Fache von $\overset{n}{[}ABC \cdots LM]$ ist, die Stufenzahl dieſes Flaches $= \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda + \mu - (m-1)n$.

168. **Satz. Das Gebiet eines rein fortschreitenden Enflaches ist gleich dem die ſämmtlichen Fache desſelben verbindenden Gebiete, und das Gebiet eines rein rückschreitenden Enflaches ist gleich dem für die ſämmtlichen Fache desſelben gemeinschaftlichen Gebiete, ſofern in beiden Fällen das Enflach nicht null ist.**

Beweis. 1. Es ſei $\overset{n}{[}AB \cdots\cdot]$ ein rein fortschreitendes Flach und $A = \overset{n}{[}a_1 \cdots\cdot a_q]$, $B = \overset{n}{[}b_1 \cdots b_r]$, u. ſ. w., wo $a_1, \cdots a_q$, $b_1, \cdots b_r$, u. ſ. w. Grösen erster Klasse ſind, dann ist alſo

$$\overset{n}{[}AB \cdots] = \overset{n}{[}(a_1 \cdots a_q)(b_1 \cdots\cdot b_r) \cdots\cdot].$$

In dem fortschreitenden Flache kann man nun (nach 116) die Klammern weglassen und es wird der letzte Ausdruck $= \overset{n}{[}a_1 \cdots a_q b_1 \cdots b_r \cdots\cdot]$.

Das Gebiet des Enflaches ist alſo nach 108 das aus den einfachen Grösen $a_1, \cdots a_q$, $b_1, \cdots b_r, \cdots\cdot$ ableitbare Gebiet. Ebenſo ist das Gebiet von A das aus $a_1, \cdots a_q$ ableitbare Gebiet u. ſ. w. und nach 30 ist das aus den Grösen zweier oder mehrer Gebiete $A, B, \cdots$ ableitbare Gebiet, oder die Summe dieſer Gebiete das dieſe verbindende Gebiet, alſo ist das Gebiet des fortschreitenden Flaches $\overset{n}{[}AB \cdots]$ das die Fache oder Faktoren $A, B, \cdots$ verbindende Gebiet.

2. Es ſei $\overset{n}{[}AB]$ ein rein rückschreitendes Enflach ungleich null, alſo die Summe der Stufenzahlen α und β der Fache A und B gröser als n, dann haben A und B ein Gebiet $\alpha + \beta - n$ ter Stufe gemein; aber auch kein Gebiet höherer Stufe, weil ſonst (nach 158) das Flach null ſein würde. Alſo lassen ſich A und B auf ein gemeinschaftliches Fach D von $\alpha + \beta - n$ ter Stufe von der Art bringen, dass $A = DF$, $B = DG$ und D, F, G einfache Grösen ſind; dann ist nach $156_{,1}$

$$\overset{n}{[}AB] = \overset{n}{[}DF(DG)] = \overset{n}{[}DFG \cdot D].$$

Hier ist $\overset{n}{[}DFG]$ eine von Null verschiedene Zahl, alſo ist das Gebiet von $\overset{n}{[}AB] \equiv D$ gleich dem den Fachen A und B gemeinschaftlichen Gebiete. Tritt nun noch ein Fach C hinzu, ſo wird ganz in gleicher Weiſe das Gebiet von

$$\overset{n}{[}ABC] \equiv \overset{n}{[}DC] \equiv E,$$

wenn E das dem D und C gemeinschaftliche Gebiet ist, alſo das dem A, B, C gemeinschaftliche u. ſ. w.

Satz. In einem reinen Enflache kann man Klammern beliebig 169.
ſetzen und weglassen, d. h. es ist

$$\overset{n}{[}A(BC)] = \overset{n}{[}ABC],$$

wenn $\overset{n}{[}ABC]$ ein reines Enflach ist.

Beweis. 1. In dem rein fortschreitenden Flache kann man nach 116 die Klammern beliebig ſetzen oder weglassen.

2. Wenn das Enflach $\overset{n}{[}ABC]$ ein rein rückschreitendes ist, ſo ist nach 165 das Enflach $\overset{n}{[}\overline{A}\overline{B}\overline{C}]$ ein rein fortschreitendes, alſo nach Beweis 1

$$\overset{n}{[}\overline{A}(\overline{B}\overline{C})] = \overset{n}{[}\overline{A}\overline{B}\overline{C}],$$

d. h. nach 151

$$\overset{n}{[}A(BC)] = \overset{n}{[}ABC].$$

Satz. Ein reines Enflach verändert ſeinen Wert nicht, wenn 170.
man ſeine Fache in lauter Fache erster bezüglich (n — 1)ter Klasse auflöſt, je nachdem das gegebene Enflach fortschreitend oder rückschreitend war. Das fortschreitende Enflach bleibt auch in Bezug auf dieſe neuen Fache fortschreitend und ebenſo das rückschreitende Enflach bleibt auch in Bezug auf die neuen Fache rückschreitend oder

Wenn $P = \overset{n}{[}AB \cdots G]$
ein reines Enflach der Fache $A, B, \cdots G$ ist, und

$$A = \overset{n}{[}a_1 \cdots a_q],\ B = \overset{n}{[}a_{q+1} \cdots a_r] \text{ u. ſ. w., } G = \overset{n}{[}a_{s+1} \cdots a_t]$$

und $a_1 \cdots a_t$ Grösen erster oder (n — 1)ter Klasse ſind, je nachdem das Enflach $\overset{n}{[}AB \cdots G]$ ein fortschreitendes oder rückschreitendes ist, ſo ist auch

$$P = \overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_t]$$

und zwar ist auch dies Enflach ein rein fortschreitendes oder rückschreitendes, je nachdem das gegebene Enflach $\overset{n}{[}AB \cdots G]$ es war.

Beweis. Es ſei das Enflach $\overset{n}{[}AB \cdots G]$ ein rein fortschreitendes, ſo ist die Summe der Klassen von $A, B, \cdots G$, d. h. t, kleiner als n, ſomit bleibt es auch nach 166 ein rein fortschreitendes in Bezug auf die Fache $a_1 \cdots a_t$, wenn man $\overset{n}{[}a_1 \cdots a_q]$ statt A ſetzt u. ſ. w., mithin

kann man nach 169 die Klammern weglassen und erhält $P = \overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_t]$. Wenn aber $\overset{n}{[}AB \cdots G]$ ein rein rückschreitendes Enflach ist, ſo wird $\overset{n}{[}\overline{A}\,\overline{B} \cdots \overline{G}]$ nach 165 ein rein fortschreitendes, und wenn $A = \overset{n}{[}a_1 \cdots a_q]$ ist u. ſ. w., und $a_1, \cdots a_t$ Grösen $(n-1)$ter Klasse ſind, ſo ist $\overline{A} = \overset{n}{[}\overline{a_1} \cdots \overline{a_q}]$ u. ſ. w., wo $\overline{a_1} \cdots \overline{a_t}$ Grösen erster Klasse ſind, ſomit nach Beweis 1

$$\overset{n}{[}\overline{A}\,\overline{B} \cdots \overline{G}] = \overset{n}{[}\overline{a_1} \cdots \overline{a_t}].$$

Mithin nach 151 auch

$$\overset{n}{[}AB \cdots G] = \overset{n}{[}a_1 \cdots a_t],$$

und dies nach 165 ein rein rückschreitendes Enflach.

171. **Satz. Wenn $\alpha, \beta \cdots$ Klassen der Fache eines reinen Enflaches P und φ die Klasse des Enflaches, ferner δ die Stufenzahl des verbindenden, γ die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, ſo ist**

1) wenn das Enflach P ein fortschreitendes ist, P dann und nur dann ein von Null verschiedenes Enflach der Klasse δ, wenn

$$\delta = \alpha + \beta + \cdots,$$

2) wenn das Enflach P ein rückschreitendes ist, ſo ist P dann und nur dann ein von Null verschiedenes Enflach der Klasse γ, wenn

$$\gamma = \alpha + \beta + \cdots - (m-1)n \text{ ist.}$$

Beweis. 1. Wenn das Enflach P ein fortschreitendes ist, ſo kann man die Fache oder Faktoren nach 170 in lauter Fache erster Klasse auflöſen; die Anzahl dieſer Fache erster Klasse ist nach 109 gleich $\alpha + \beta + \cdots$; das Flach dieſer Fache ist nach 93 und 92 dann und nur dann von Null verschieden, wenn die Fache erster Klasse gegenſeitig frei ſind, d. h. nach 21 wenn das verbindende Gebiet von $(\alpha + \beta + \cdots)$ter Stufe, alſo $\delta = \alpha + \beta + \cdots$ ist. Dann ist die Klasse des Flaches nach 109 $= \alpha + \beta + \cdots$, d. h. $= \delta$.

2. Wenn das Enflach P ein rückschreitendes ist, ſo gilt der Satz zunächst für zwei Fache. Denn nach 158 ist P dann und nur dann von Null verschieden. wenn $\gamma = \alpha + \beta - n$, und nach 145 ist auch $\varphi = \alpha + \beta - n$, das heist $\varphi = \gamma$. Mithin gilt der Satz für zwei Fache. Durch wiederholte Anwendung erhält man daraus den Satz für beliebig viele Fache.

172. **Satz. Ein reines Enflach bleibt ſich ſelbst deckend, wenn man die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändert, d. h. $P_{A,B} \equiv P_{B,A}$.**

Beweis. 1. Es ſei zuerst das Enflach $\overset{n}{[}AB]$ ein fortschreitendes, ſo ist nach 89

$$\overset{n}{[}AB] = (-1)^{\alpha\beta}\overset{n}{[}BA], \text{ mithin } \overset{n}{[}AB] \equiv \overset{n}{[}BA].$$

Sei dagegen das Enflach $\overset{n}{[}AB]$ ein rückschreitendes, ſo ist $\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}]$ nach 165 ein fortschreitendes Enflach und da $n-\alpha$ und $n-\beta$ die Klaſſen von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ ſind

$$\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)}\overset{n}{[}\bar{B}\bar{A}],$$

folglich nach 151

$$\overset{n}{[}AB] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)}\overset{n}{[}BA], \text{ mithin auch } \overset{n}{[}AB] \equiv \overset{n}{[}BA].$$

2. Es ſei ferner das Enflach $\overset{n}{[}PAB]$, wo A und B zwei auf einander folgende Fache ſind, ein reines, ſo ist

$$\overset{n}{[}PAB] = \overset{n}{[}P(AB)] \qquad (169)$$

$$\equiv \overset{n}{[}P(BA)] \qquad (\text{nach } 172,_1)$$

$$= \overset{n}{[}PBA] \qquad (169),$$

mithin $\overset{n}{[}PAB] \equiv \overset{n}{[}PBA]$.

3. Indem man nun zwei auf einander folgende Fache vertauscht, ſo kann man nach und nach jedes Fach auf jede beliebige Stelle bringen, alſo den Fachen jede beliebige Ordnung geben, während dabei nach Beweis 2 das Enflach ſich deckend bleibt.

Satz. Wenn ein reines Enflach zwei Fache enthält, deren Klasse nicht null ist, und deren eines dem andern untergeordnet ist, ſo ist das Enflach null, oder 173.

Es ist $P_{A,B} = 0$, wenn P reines Enflach und von den Grösen A und B eine der andern untergeordnet ist.

Beweis. 1. Seien von den Grösen A und B die eine der andern untergeordnet, etwa B dem A, ſo ist B das gemeinſchaftliche Gebiet und A das verbindende, alſo ist das Enflach $\overset{n}{[}AB] = 0$, da die Stufe von $B > 0$, und die von $A < n$ ist nach 158

2. Wenn nun das Enflach $P_{A,B}$ zwei Fache A und B enthält, deren eines dem andern untergeordnet ist, ſo kann man nach 172 die Fache oder Faktoren ſo ordnen, dass A und B auf einander folgen, wobei das Flach ſich ſelbst deckend bleibt. Dann kann man nach 169 dieſe beiden Fache in eine Klammer schliesen. Ihr Enflach ist null nach Beweis 1, mithin ist ein Fach oder Faktor von P null, alſo auch P ſelbst null.

Satz. Ein gemischtes Enflach dreier Grösen $\overset{n}{[}ABC]$ ist dann und nur dann null, wenn entweder $\overset{n}{[}AB] = 0$ ist, oder alle drei 174.

Grösen A, B, C von einem Gebiete von niederer als n ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als 0 ter Stufe gemein haben.

Beweis. Es ſei nach 166 $\alpha+\beta+\gamma>n$ und $<2n$. Ferner ſei $\overset{n}{[}AB]\gtrless 0$, und ſei zuerst $\alpha+\beta>n$ etwa $=n+\zeta$, ſo lassen ſich nach 135 A und B auf ein gemeinschaftliches Fach ζter Stufe Z bringen, ſo dass $A=ZA'$, $B=ZB'$ ist; dann ist

$$\overset{n}{[}AB]=\overset{n}{[}ZA'B'Z] \qquad (156,_{1}),$$

mithin da $\overset{n}{[}AB]$ nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, ſo muss auch $\overset{n}{[}ZA'B']\gtrless 0$ ſein. Dann ist

$$\overset{n}{[}ABC]=\overset{n}{[}ZA'B'(ZC)]$$

alſo, da $\overset{n}{[}ZA'B']$ eine von Null verschiedene Zahl ist, ſo ist $\overset{n}{[}ABC]$ dann und nur dann null, wenn $\overset{n}{[}ZC]$ es ist. Die Stufe von $\overset{n}{[}ZC]$ aber ist $=\zeta+\gamma=\alpha+\beta-n+\gamma$, alſo $<n$, da $\alpha+\beta+\gamma<2n$ ist. Alſo ist das Enflach $\overset{n}{[}ZC]$ nach 158 dann und nur dann null, wenn Z und C ein Fach von höherer als nullter Stufe gemein haben, d. h. (da Z das gemeinſame Fach von A und B ist) wenn A, B und C ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben.

Es ſei zweitens $\alpha+\beta\leqq n$, ſo ist $\overset{n}{[}AB]$ ein fortschreitendes Enflach, mithin, da $\overset{n}{[}AB]$ nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, das Enflach $\overset{n}{[}ABC]$ nach 158 dann und nur dann null, wenn $\overset{n}{[}AB]$ und C, d. h. A, B und C, von einem Gebiete niederer als n ter Stufe umfasst werden. Der Satz ist hiermit bewieſen.

175. **Satz. Die Ordnung, in welcher man mit zwei einfachen Grösen, deren eine der andern untergeordnet ist, fortschreitend modelt, ist gleichgültig für das Ergebniss, d. h.**

$\overset{n}{[}ABC]=\overset{n}{[}ACB]$, wo B dem C, bez. C dem B untergeordnet ist.

Beweis. Wenn B von nullter Stufe, d. h. eine Zahl ist, ſo findet nach 4 die Gleichheit beider Seiten statt. Wenn die Enflache nicht gemischt ſind, ſo ſind beide Seiten nach 173 null, mithin ist der Satz nur noch zu erweiſen für den Fall, dass das Enflach $\overset{n}{[}ABC]$ gemischt ist und zugleich B von höherer als nullter Stufe ist. Es ist für dieſen Fall $\alpha+\beta+\gamma>n$ und $<2n$, durch β von Null verschieden und zugleich $\beta\leqq\gamma$, da B dem C untergeordnet. Wir nehmen zunächst an, A ſei eine einfache Gröse; dann ſind nur drei

Fälle möglich: entweder es ist $\alpha + \gamma < n$, oder es ist $\alpha + \gamma \geqq n$ und dabei $\alpha + \beta \leqq n$, oder es ist $\alpha + \beta > n$.

a. Es ſei zunächst $\alpha + \gamma < n$, ſo werden die drei Grösen A, B, C von einem Gebiete $\alpha + \gamma$ter Stufe, alſo von einem Gebiete von niederer als $n$ter Stufe umfasst, da B dem C untergeordnet ist, ſomit ſind nach 173 ſowohl $\overset{n}{[ABC]}$ als $\overset{n}{[ACB]}$ null, alſo

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[ACB]}.$$

b. Sei demnächst $\alpha + \gamma \geqq n$ und $\alpha + \beta \leqq n$, ersteres etwa $= n + \zeta$, wo ζ auch null ſein kann, ſo müssen nach 135 ſich A und C auf ein gemeinschaftliches Fach Z von ζter Stufe bringen lassen in der Art, dass $C = \overset{n}{[ZC']}$ ist, wo Z und C′ einfache Grösen ſind und Z dem A untergeordnet ist. Dann ist C′ von $(\gamma - \zeta)$ter Stufe, alſo die Summe der Klassen von A und C′ gleich $\alpha + \gamma - \zeta = n$, alſo ist nach 157

$$\overset{n}{[AC]} = \overset{n}{[A(ZC')]} = \overset{n}{[AC'Z]}, \text{ mithin}$$

$$\overset{n}{[ACB]} = \overset{n}{[AC'(ZB)]}$$

Das Enflach $\overset{n}{[ZB]}$ ist hier ein fortschreitendes; denn es ist $\zeta + \beta = \alpha + \beta + \gamma - n < n$, da ja das Enflach ein gemischtes ſein ſollte.

Sei nun zunächst $\overset{n}{[ZB]}$ null, ſo haben nach 158 Z und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein, dann haben aber auch, da Z dem A untergeordnet ist, A und B dies Gebiet gemein; das Enflach $\overset{n}{[AB]}$ ist aber, da $\alpha + \beta \leqq n$ ist, ein fortschreitendes, alſo ist es nach 158 null, mithin ist auch $\overset{n}{[ABC]} = 0$, ebenſo wie $\overset{n}{[ACB]}$, und folglich beide einander gleich.

Sei dagegen $\overset{n}{[ZB]} \gtrless 0$, ſo ist, da Z und B beide dem C untergeordnet ſind, auch ihr verbindendes Gebiet $\overset{n}{[ZB]}$ dem Gebiete von C untergeordnet, alſo kann C nach 117 in der Form $\overset{n}{[ZBF]}$ dargestellt werden, wo F wieder eine einfache Gröse ist. Dann wird, da wir oben $C = ZC'$ ſetzten, $C' = BF$ geſetzt werden können, und man erhält:

$$\overset{n}{[ACB]} = \overset{n}{[AC'(ZB)]} = \overset{n}{[ABF(ZB)]}.$$

Ferner ist aber auch, da Z dem A untergeordnet, alſo auch $\overset{n}{[ZB]}$ dem $\overset{n}{[AB]}$ untergeordnet und $\overset{n}{[ABF]} = \overset{n}{[AC']}$ von nullter Klasse ist, wie dies oben bewieſen, auch:

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[AB(ZBF)]} = \overset{n}{[ABF(ZB)]} \qquad \text{(nach 157).}$$

Mithin ist $\overset{n}{[}ACB] = \overset{n}{[}ABC]$.

c. Sei endlich $\alpha + \beta > n$, so sind, da $\beta \leqq \gamma$, auch $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma) < n$, also dann, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Klassen der Ergänzungen von A, B, C sind,

$$\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}\bar{C}] = \overset{n}{[}\bar{A}\bar{C}\bar{B}] \qquad \text{(nach } 175,_1)$$

also nach 151

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB].$$

Also ist der Satz bewiesen, sofern A eine einfache Gröse ist.

d. Sei endlich A eine zusammengesetzte Gröse, so ist sie immer nach 108 eine Vielfachensumme von einfachen Grösen. Es sei $A = S\alpha_a A_a$, wo alle A_a einfache Grösen sind, so ist

$$\begin{aligned} \overset{n}{[}ABC] &= S\alpha_a \overset{n}{[}A_a BC] && (73) \\ &= S\alpha_a \overset{n}{[}A_a CB] && (\text{nach } 175,_1) \\ &= \overset{n}{[}ACB] && (73). \end{aligned}$$

176. **Satz. Wenn A, B, C drei einfache Grösen sind, so sind die Enflache $\overset{n}{[}ABC]$ und $\overset{n}{[}ACB]$ nur in folgenden Fällen deckend oder es ist**

$\overset{n}{[}ABC] \equiv \overset{n}{[}ACB]$, **nur dann,**

a) wenn $\alpha + \beta + \gamma \leqq n$ ist, dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^{\beta\gamma} \overset{n}{[}ACB],$$

b) wenn $\alpha + \beta + \gamma \geqq 2n$ ist, dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)} \overset{n}{[}ACB],$$

c) wenn $\overset{n}{[}ABC]$ ein gemischtes Enflach ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete von niederer als n ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB] = 0,$$

d) wenn $\overset{n}{[}AB]$ und $\overset{n}{[}AC]$ null sind, dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB] = 0,$$

e) wenn $\alpha + \beta + \gamma = n + t$ ist und B und C entweder ein Gebiet von t ter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete t ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^{(\beta - t)(\gamma - t)} \overset{n}{[}ACB],$$

f) wenn B dem C untergeordnet ist; dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB].$$

Beweis. a. Die erste Formel ist in 89 bewiefen.

b. Wenn $\alpha + \beta + \gamma \geqq 2n$ ist, fo ist $(n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) \leqq n$, folglich, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Klassen der Ergänzungen von A, B, C find, fo ist in diefem Falle

$$\overset{n}{[}\bar{A}\bar{B}\bar{C}] = (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)}\overset{n}{[}\bar{A}\bar{C}\bar{B}] \qquad \text{(nach 176,}_a\text{)}$$

Alfo nach 151

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)}\overset{n}{[}ACB].$$

Da in beiden Fällen $\alpha + \beta + \gamma$ entweder $\leqq n$ oder $\geqq 2n$ war, fo bleibt nur der Fall übrig, wo $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ ist, alfo der Fall des gemischten Enflachs.

c. Angenommen zuerst $\overset{n}{[}ABC]$ fei null. Ein gemischtes Enflach $\overset{n}{[}ABC]$ ist nach 174 dann und nur dann null, wenn entweder $\overset{n}{[}AB] = 0$ ist, oder alle drei Grösen A, B, C von einem Gebiete niederer als nter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Tritt einer der beiden letzten Fälle ein, fo ist fowohl $\overset{n}{[}ABC]$ als $\overset{n}{[}ACB]$ null, und alfo $\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB] = 0$, fomit Formel (c) bewiefen.

d. Wenn $\overset{n}{[}AB] = 0$ ist. Wenn hier $\overset{n}{[}ABC]$ mit $\overset{n}{[}ACB]$ deckend fein foll, fo muss auch $\overset{n}{[}ACB]$ null fein, dies kann aber, da die beiden Fälle der Formel c ausgeschlossen find, nicht anders geschehen als wenn auch $\overset{n}{[}AC]$ null ist, und es tritt alfo dann der Fall (d) ein. Es bleiben alfo nur noch die Fälle des von Null verschiedenen gemischten Enflaches übrig.

e. Da $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ ist, fo können wir $\alpha + \beta + \gamma = n + t$ fetzen, wo $t > 0$ und $< n$ ist. Nun find hier wie in 175 drei Fälle zu unterscheiden. Erstens der, wo die Summen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma$ beide kleiner als n find. Dann ist, da $\overset{n}{[}AB]$ und $\overset{n}{[}AC]$ dann von Null verschiedene fortschreitende Enflache find, $\alpha + \beta$ die Klasse von $\overset{n}{[}AB]$ und $\alpha + \gamma$ die von $\overset{n}{[}AC]$. Dann haben $\overset{n}{[}AB]$ und C nach 31 ein Fach oder einen Faktor von $\alpha + \beta + \gamma - n$ter, d. h. tter Klasse gemein. Diefer fei Z, und fei $C = \overset{n}{[}ZC']$, fo ist die Summe der Klassen von A, B, C' gleich n, alfo $\overset{n}{[}ABC']$ eine Zahl, und Z ist dem $\overset{n}{[}AB]$ untergeordnet. Mithin ist dann nach 157

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}AB(ZC')] = \overset{n}{[}ABC' \cdot Z] \equiv Z.$$

Mithin muss, wenn $\overset{n}{[ABC]} \equiv \overset{n}{[ACB]}$ ſein ſoll, auch $\overset{n}{[ACB]} \equiv Z$ ſein, d. h. $\overset{n}{[AC]}$ und B müssen ſich auf ein mit Z deckendes gemeinschaftliches Fach bringen lassen, d. h. auf das Fach Z ſelbst; mithin muss Z dem B untergeordnet ſein, es war aber auch dem C untergeordnet, d. h. B und C lassen ſich auf das gemeinschaftliche Fach t ter Klasse Z bringen, oder ſie haben ein Gebiet t ter Stufe gemein. Es ſei $B = \overset{n}{[ZF]}$, ſo ist

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[AB(ZC')]} = \overset{n}{[ABC'Z]} \qquad (157)$$
$$= \overset{n}{[A(ZF)C'Z]} = \overset{n}{[AZFC'Z]} \qquad (169)$$
$$\overset{n}{[ACB]} = \overset{n}{[AC(ZF)]} = \overset{n}{[ACFZ]} \qquad (157)$$
$$= \overset{n}{[A(ZC')FZ]} = \overset{n}{[AZC'F \cdot Z]} \qquad (169).$$

Da nun $C = \overset{n}{[ZC']}$ war, ſo ist C′ von $(\gamma - t)$ ter Klasse, und da $B = \overset{n}{[ZF]}$ war, ſo ist F von $(\beta - t)$ ter Klasse, mithin

$$\overset{n}{[AZFC'Z]} = (-1)^{(\beta - t)(\gamma - t)} \overset{n}{[AZC'FZ]} \qquad (89),$$

alſo

$$\overset{n}{[ABC]} = (-1)^{(\beta - t)(\gamma - t)} \overset{n}{[ACB]},$$

d. h. es ergiebt ſich der erste Teil der Formel e.

Seien hingegen die beiden Summen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma$ gröser als n, ſo ſind die Summen $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma)$ kleiner als n, und $(n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) = n + (n - t)$. Folglich ſind in dieſem Falle (nach dem ersten Teile der Formel e) die Enflache $\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}\overline{C}]}$ und $\overset{n}{[\overline{A}\overline{C}\overline{B}]}$ nur dann einander deckend, wenn ſich $\overline{B}$ und $\overline{C}$ auf ein gemeinschaftliches Fach von $(n - t)$ ter Klasse bringen lassen. Dieſes ſei $\overline{Z}$ und ſei $\overline{B} = \overset{n}{[\overline{Z}\overline{F}]}$, $\overline{C} = \overset{n}{[\overline{Z}\overline{C}']}$, ſo ist (nach dem ersten Teile von e)

$$\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}\overline{C}]} = (-1)^{(t - \beta)(t - \gamma)} \overset{n}{[\overline{A}\overline{C}\overline{B}]}.$$

Aber nach 147 ist dann

$$B = \overset{n}{[ZF]},\ C = \overset{n}{[ZC']}$$
$$\overset{n}{[ABC]} = (-1)^{(t - \beta)(t - \gamma)} \overset{n}{[ACB]} = (-1)^{(\beta - t)(\gamma - t)} \overset{n}{[ACB]},$$

d. h. es ist der zweite Teil der Formel (e) bewieſen, auch werden dann B und C beide (da das Flach $B = \overset{n}{[ZF]}$ ist und zugleich B von geringerer Stufe als Z ist, mithin als rückschreitendes Enflach erscheint,

und ebenſo $C = \overset{n}{[ZC']}$, und alſo B und C beide dem Z untergeordnet ſind) von dem Gebiete Z umfasst.

f. Es bleibt ſomit nur noch der Fall übrig, wo von den Summen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma$ die eine, etwa die erstere, ebenſo gros oder kleiner, die andere ebenſo gros oder gröser als n ist. Dann lassen ſich nach 31 $\overset{n}{[AB]}$ und C auf ein gemeinschaftliches Fach $\alpha + \beta + \gamma - n$ ter, d. h. t ter Klasse bringen. Dieſes ſei Z, und ſei $C = \overset{n}{[ZC']}$ (wo C' von nullter Klasse, wenn $\alpha + \beta = n$ ist), ſo wird

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[AB(ZC')]} = \overset{n}{[ABC'Z]} \qquad (157).$$

Ferner ſei $\alpha + \gamma = n + u$, ſo haben A und C ein Fach von u ter Klasse gemein, dieſes ſei F, und ſei $C = \overset{n}{[FG]}$, ſo ist

$$\overset{n}{[AC]} = \overset{n}{[A(FG)]} = \overset{n}{[AGF]} \qquad (157).$$

Alſo

$$\overset{n}{[ACB]} = \overset{n}{[AGFB]} = \overset{n}{[AG(BF)]}.$$

Soll alſo $\overset{n}{[ABC]} \equiv \overset{n}{[ACB]}$ ſein, ſo muss, da $\overset{n}{[ABC']}$ und $\overset{n}{[AG]}$ von Null verschiedene Zahlen ſind, $Z \equiv \overset{n}{[BF]}$ ſein, d. h. es muss B dem Z untergeordnet ſein, aber auch Z ist dem C untergeordnet, mithin auch B dem C. Dies aber ist die Bedingung der Formel (f) und nach 175 ist dann

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[ACB]}.$$

Der Satz ist mithin vollständig in allen Teilen bewieſen.

Satz. Wenn A, B, C drei einfache Grösen ſind, ſo ſind die 177.
Enflache $\overset{n}{[BAC]}$ und $\overset{n}{[B(AC)]}$ nur in folgenden Fällen deckend, d. h. es ist

$$\overset{n}{[BAC]} \equiv \overset{n}{[B(AC)]} \textbf{ nur dann,}$$

a. b. wenn beide Enflache reine ſind, d. h. wenn $\alpha + \beta + \gamma \leqq n$ oder $\geqq 2n$, dann ist $\overset{n}{[BAC]} = \overset{n}{[B(AC)]}$,

c. d. wenn $\overset{n}{[AB]}$ und $\overset{n}{[AC]}$ null ſind, oder wenn $\overset{n}{[BAC]}$ ein gemischtes Modelflach ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem niederen Gebiete als n ter Stufe umfasst werden, ſo ist

$$\overset{n}{[BAC]} = \overset{n}{[B(AC)]} = 0,$$

e. wenn $\alpha + \beta + \gamma = n + t$ und B und C entweder ein Gebiet

von $t$ter Stufe gemein haben, oder von einem Gebiete $t$ter Stufe umfasst werden, fo ist, fofern $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma < n$ find,

$$\overset{n}{[}BAC] = (-1)^{\alpha t}\overset{n}{[}B(AC)],$$

fofern dagegen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$ find, fo ist

$$\overset{n}{[}BAC] = (-1)^{(n-\alpha)(n-t)}\overset{n}{[}B(AC)],$$

f. wenn B und C eine der andern untergeordnet ist, fo ist, fofern $\alpha + \beta < n$ und $\alpha + \gamma \geqq n$ ist,

$$\overset{n}{[}BAC] = (-1)^{\beta(n-\gamma)}\overset{n}{[}B(AC)], \text{ ferner}$$

fofern $\alpha + \beta > n$ und $a + \gamma \leqq n$ ist,

$$\overset{n}{[}BAC] = (-1)^{(n-\beta)\gamma}\overset{n}{[}B(AC)], \text{ ferner}$$

fofern zugleich $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$ oder zugleich $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma < n$ find,

$$\overset{n}{[}BAC] = \overset{n}{[}B(AC)] = 0.$$

Beweis. Es ist in allen diefen Fällen

$$\overset{n}{[}BAC] \equiv \overset{n}{[}ABC] \quad \text{(nach 89)}$$

$$\equiv \overset{n}{[}ACB] \quad \text{(nach 175)}$$

$$\equiv \overset{n}{[}B(AC)] \quad \text{(nach 89).}$$

Die Formel a. und b. folgt unmittelbar aus 169. Die Formel c. und d. folgt unmittelbar, da $\overset{n}{[}AC] = 0$ ist und da $\overset{n}{[}BA] = \pm \overset{n}{[}AB] = 0$ ist u. s. w., siehe 176.

178. **Satz. Ein Enflach nullter Klasse bleibt fich felbst deckend, wenn man die Ordnung aller feiner Fache umkehrt, oder die letzten Fache in beliebiger Anzahl mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliest, d. h.**

$$\overset{n}{[}A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] \equiv \overset{n}{[}A_n(A_{n-1} \cdots (A_2A_1))]$$

$$\equiv \overset{n}{[}A_1 \cdots A_{n-r-1} \cdot (A_n(A_{n-1} \cdots A_{n-r}))].$$

Beweis. Wir fetzen

$$\overset{n}{[}A_1A_2 \cdots A_{n-2}] = P,$$

dann ist

$$\overset{n}{[}A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] = \overset{n}{[}PA_{n-1}A_n].$$

Da das Enflach von nullter Klasse fein foll, fo muss die Summe der Klassen von P, A_{n-1}, A_n nach 146 durch n teilbar fein, alfo, da die einzelnen Klassen > 0 und $< n$ find, entweder gleich n oder gleich 2n fein; im erstern Falle ist das Enflach der drei Grösen

P, A_{n-1}, A_n ein rein fortſchreitendes, im letztern ein rein rück ſchreitendes, in beiden alſo ein reines, ſomit nach 177

$$\overset{n}{[}PA_{n-1}A_n] \equiv \overset{n}{[}P\cdot(A_nA_{n-1})],$$

oder

$$\overset{n}{[}A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n] \equiv \overset{n}{[}A_1\cdots A_{n-2}\cdot(A_nA_{n-1})].$$

Betrachten wir dieſen Ausdruck als ein Enflach der drei Grösen $\overset{n}{[}A_1\cdots A_{n-3}]$, A_{n-2} und $\overset{n}{[}A_nA_{n-1}]$, ſo erhalten wir auf gleiche Weiſe

$$\overset{n}{[}A_1\cdots A_{n-3}\cdot A_{n-2}\cdot A_nA_{n-1}] \equiv \overset{n}{[}A_1\cdots A_{n-3}\cdot(A_n(A_{n-1}A_{n-2}))].$$

Wendet man dies Verfahren r mal an, ſo erhält man

$$\overset{n}{[}A_1\cdots\cdots A_n] \equiv \overset{n}{[}A_1\cdots\cdot A_{n-r-1}\cdot(A_n(A_{n-1}\cdots A_{n-r}))],$$

d. h. das Enflach bleibt ſich ſelbst deckend, wenn man die letzten Fache in beliebiger Anzahl (r) mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliest. Hiernach wird nun auch

$$\overset{n}{[}A_1A_2\cdots\cdot A_n] \equiv \overset{n}{[}A_1\cdot(A_n(A_{n-1}\cdots\cdot A_2))],$$

ſomit nach 89

$$\equiv \overset{n}{[}A_n(A_{n-1}\cdots(A_2A_1))],$$

alſo ist auch der erste Teil des Satzes bewieſen.

12. Die Zurückleitung auf ein niederes Gebiet.

Erklärung. Wenn C im Hauptgebiete nter Stufe eine Viel- 179.
fachenſumme der Geschiedsflache (multiplikativen Komplexionen) zu irgend einer Klasse, $A_1\cdots A_u$, aus den n freien Grösen erster bez. (n — 1)ter Klasse, $a_1, \cdots a_n$ ist, d. h. wenn

$$C = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \cdots + \alpha_uA_u$$

und wenn C_1 die entsprechende Vielfachenſumme der Geschiedsflache zu derſelben Klasse $A_1\cdots A_r$ aus m derſelben freien Grösen, etwa aus $a_1, \cdots a_m$ ist, d. h. wenn

$$C_1 = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \cdots + \alpha_rA_r,$$

ſo heist C_1 die Zurückleitung der Gröse C auf das Gebiet $\overset{n}{[}a_1\cdots a_m]$ unter Ausschluss des Gebietes $\overset{n}{[}a_{m+1}\cdots a_n]$.

Die Zurückleitung heist eine fortschreitende, wenn die Grösen $a_1\cdots a_n$ erster Klasse, ſie heist eine rückschreitende, wenn die Grösen $a_1\cdots a_n$ Grösen (n — 1)ter Klasse ſind.

Die Zurückleitungen mehrer Grösen heisen in demſelben Sinne genommen, wenn ſie auf dasſelbe Gebiet und unter Ausschluss desſelben Gebietes zurückgeleitet ſind.

Als Beispiel für dieſe Zurückleitungen nehmen wir den Raum, der, wie wir ſahen, wenn wir von Punkten ausgehen, ein Hauptgebiet vierter Stufe ist. Es ſeien a, b, c, d vier gegenſeitig freie Grösen erster Stufe, d. h. vier nicht in ein und derſelben Ebene liegende Punkte, ſo ist $C_1 = \overset{4}{[bc]} + \overset{4}{[ca]} + \overset{4}{[ab]}$ die fortschreitende Zurückleitung von $C = \overset{4}{[bc]} + \overset{4}{[ca]} + \overset{4}{[ab]} + \overset{4}{[ad]} + \overset{4}{[bd]} + \overset{4}{[cd]}$ auf das Gebiet oder auf die Ebene $\overset{4}{[abc]}$, unter Ausschluss des Gebietes d. Bezeichnen wir ferner $\overset{4}{[bcd]}$ mit a′, $\overset{4}{[cad]}$ mit b′, $\overset{4}{[abd]}$ mit c′ und $\overset{4}{[acb]}$ mit d′, ſo ſind a′, b′, c′, d′ Grösen (n — 1)ter Stufe, da n = 4 ist und ſetzen wir noch $\overset{4}{[abcd]} = 1$, ſo ist $\overset{4}{[b'c']} = \overset{4}{[cad \cdot abd]} = \overset{4}{[abcd]}\overset{4}{[ad]} = \overset{4}{[ad]}$, $\overset{4}{[c'a']} = \overset{4}{[bd]}$, $\overset{4}{[a'b']} = \overset{4}{[cd]}$, $\overset{4}{[a'd']} = \overset{4}{[bc]}$, $\overset{4}{[b'd']} = \overset{4}{[ca]}$, $\overset{4}{[c'd']} = \overset{4}{[ab]}$, und es wird

$$C = \overset{4}{[a'd']} + \overset{4}{[b'd']} + \overset{4}{[c'd']} + \overset{4}{[b'c']} + \overset{4}{[c'a']} + \overset{4}{[a'b']}.$$

Dann wird, wenn

$$C' = \overset{4}{[b'c']} + \overset{4}{[c'a']} + \overset{4}{[a'b']}$$

ist, C′ die rückschreitende Zurückleitung von C auf das Gebiet $\overset{4}{[a'b'c']}$, unter Ausschluss des Gebietes d′, ſein, d. h., da $\overset{4}{[a'b'c']} = \overset{4}{[cd \cdot abd]} \equiv d$, und $d' \equiv \overset{4}{[abc]}$ ist, dann ist C′ die Zurückleitung von C auf das Gebiet d, unter Ausschluss des Gebietes $\overset{4}{[abc]}$, d. h. es ist C′ im Raume die Zurückleitung einer Linie auf einen Punkt als rückschreitende Zurückleitung. Die Zurückleitung ſelbst ist in der Raumlehre gleichbedeutend mit der Beschattung oder Projektion im weitesten und eigentlichsten Sinne des Wortes.

180. **Satz. Wenn die Stufe m des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, gröser ist, als die Klasse p der zurückgeleiteten Gröse, ſo ist die Zurückleitung fortschreitend, wenn dagegen die erstere Stufe m kleiner ist als p, ſo ist die Zurückleitung rückschreitend; wenn die Stufe und die Klasse gleich ſind, ſo kann die Zurückleitung ſowohl fortschreitend als rückschreitend ſein.**

Beweis. Es ſeien $a_1 \cdots a_n$ gegenſeitig freie Grösen erster Klasse und ſeien $A_1, \cdots A_u$ die Geschiedsflache aus $a_1 \cdots a_n$ zur p ten Klasse, und $A_1, \cdots A_r$ die Geschiedsflache zur p ten Klasse aus $a_1 \cdots a_m$ und ſei

$$C = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u$$

$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r,$$

alſo nach 179 ſei C_1 die fortschreitende Zurückleitung der Gröse C auf das Gebiet $\overset{n}{[a_1 \cdots a_m]}$, unter Ausschluss des Gebietes $\overset{n}{[a_{m+1} \cdots a_n]}$, ſo würde es, wenn $m < p$ wäre, gar keine Geschiedsflache aus $a_1 \cdots a_m$ zur p ten Klasse geben, alſo auch keine fortschreitende Zurückleitung. Es muss alſo für die fortschreitende Zurückleitung

$m \geqq p$ ſein, d. h. es muss die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenſo gros oder gröser ſein als die Klasse der zurückgeleiteten Gröse.

Macht man dieſelben Annahmen wie vorher, mit dem einzigen Unterschiede, dass $a_1, \cdots a_n$ in dem Hauptgebiete nter Stufe Grösen $(n - 1)$ter Klasse ſind, ſo ist die Zurückleitung eine rückschreitende; und auch hier muss, aus gleichem Grunde wie vorher, $m \geqq p$ ſein. Aber hier ist nach 130 die Stufenzahl von $\overset{n}{[}a_1 \cdots a_m]$ gleich $n - m$ und die von C gleich $n - p$, ſomit muss, da $m \geqq p$ ist, auch $n - m \leqq n - p$ ſein, d. h. die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, wird ebenſo gros oder kleiner als die Klasse der zurückgeleiteten Gröse, d. h. es gilt der Satz.

Satz. Die Zurückleitung A' einer Gröse A auf ein Gebiet B, 181.
unter Ausschluss des Gebietes C, ist

$$A' = \frac{\overset{n}{[}B(AC)]}{\overset{n}{[}BC]}, \text{ und es ist } A' = \overset{n}{[}B(AC)], \text{ wenn } \overset{n}{[}BC] = 1 \text{ ist.}$$

Beweis. Es ſeien $a_1 \cdots a_n$ n gegenſeitig freie Grösen erster oder $(n - 1)$ter Klasse, und $A_1 \cdots A_u$ die Geschiedsflache aus $a_1 \cdots a_n$, und $A_1 \cdots A_r$ die aus $a_1 \cdots a_m$ und $A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_u A_u$, mithin $A' = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r$, und ſei $\overset{n}{[}a_1 \cdots a_m] = B$, $\overset{n}{[}a_{m+1} \cdots a_n] = C$, ſo ist

$\overset{n}{[}AC] = \overset{n}{[}(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r + \alpha_{r+1} A_{r+1} + \cdots + \alpha_u A_u)C]$; aber da $A_1, \cdots A_r$ die Geschiedsflache aus $a_1 \cdots a_m$ ſind, und da $A_{r+1}, \cdots A_u$ diejenigen Geschiedsflache aus $a_1 \cdots a_n$ ſind, welche nicht zugleich Geschiedsflache aus $a_1 \cdots a_m$ ſind, ſo muss jede der Grösen $A_{r+1}, \cdots A_u$ mindestens eins der Fache oder Faktoren $a_{m+1} \cdots a_n$ enthalten, alſo mindestens ein Fach mit $C = \overset{n}{[}a_{m+1} \cdots a_n]$ gemein haben. Die Flache $\overset{n}{[}A_{r+1}C], \cdots \overset{n}{[}A_u C]$ ſind aber in Bezug auf die Fache $a_1 \cdots a_n$ nach 164 reine, mithin null, da ſie gleiche Fache oder Faktoren enthalten, alſo wird

$$\overset{n}{[}AC] = \overset{n}{[}(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r)C] = \alpha_1 \overset{n}{[}A_1 C] + \cdots + \alpha_r \overset{n}{[}A_r C].$$

Alſo ist

$$\overset{n}{[}B(AC)] = \alpha_1 \overset{n}{[}B(A_1 C)] + \cdots + \alpha_r \overset{n}{[}B(A_r C)].$$

Da nun jede der Grösen $A_1, \cdots A_r$ aus Fachen oder Faktoren besteht, die in B enthalten ſind, ſo ist jede derſelben dem B unter-

geordnet, folglich, da auch die Summe der Klassen von B und C n beträgt, so ist $\overset{n}{[}BC]$ eine Zahl und ist nach 157

$$\overset{n}{[}B(A_1C)] = \overset{n}{[}BCA_1], \cdots, \overset{n}{[}B(A_rC)] = \overset{n}{[}BCA_r],$$

also

$$\overset{n}{[}B(AC)] = \overset{n}{[}BC(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r)] = \overset{n}{[}BCA'].$$

Also, da $\overset{n}{[}BC]$ eine Zahl ist, so ist nach 4

$$A' = \frac{\overset{n}{[}B(AC)]}{\overset{n}{[}BC]}.$$

182. **Satz. Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache je einer Gröse mter Klasse sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller dieser Grösen ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt; oder**

Wenn $P = \alpha A + \beta B + \cdots$ ist, wo $\alpha, \beta \cdots$ Zahlen sind und $P', A', B', \cdots$ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von $P, A, B, \cdots$ sind, so ist auch $P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots$.

Beweis. Es sei L das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, und M das ausgeschlossene Gebiet und $\overset{n}{[}LM] = 1$, so erhält man aus der Gleichung

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots,$$

wenn man sie mit M modelt

$$\overset{n}{[}PM] = \alpha \overset{n}{[}AM] + \beta \overset{n}{[}BM] + \cdots$$

und wenn man diese mit L flacht

$$\overset{n}{[}L(PM)] = \alpha \overset{n}{[}L(AM)] + \beta \overset{n}{[}L(BM)] + \cdots,$$

d. h. nach 181

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

183. **Satz. Die fortschreitende Zurückleitung eines rein fortschreitenden und die rückschreitende eines rein rückschreitenden Enflaches ist gleich dem Enflache der in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen der Fache oder Faktoren jenes Flaches, oder**

Wenn das reine Enflach $P = \overset{n}{[}AB \cdots E]$ ist, und $P', A', B', \cdots E'$ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von $P, A, B, \cdots E$ sind (und zwar fortschreitende bezüglich rückschreitende, je nachdem das Flach fortschreitend oder rückschreitend ist), so ist auch

$$P' = \overset{n}{[}A'B' \cdots E'].$$

Beweis. Es sei $A = \overset{n}{[}a_1 \cdots\cdots a_h]$, $B = \overset{n}{[}a_{h+1} \cdots\cdots a_i]$, $\cdots$ $E = \overset{n}{[}a_{t+1} \cdots\cdots a_v]$, wo $a_1 \cdots\cdots a_v$ Grösen erster bezüglich $(n-1)$ter

Klasse ſind, je nachdem das Enflach $\overset{n}{[}AB\cdots E]$ ein fortschreitendes oder rückschreitendes ist. Dann ist

$$P = \overset{n}{[}a_1\cdot\cdots\cdot a_v]$$

ein reines Enflach von Grösen erster oder $(n-1)$ter Klasse. Ferner ſei $L = \overset{n}{[}u_1\cdots\cdot u_l]$ das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, $M = \overset{n}{[}u_{l+1}\cdots u_n]$ das ausgeschlossene Gebiet und $\overset{n}{[}LM] = 1$, wobei $u_1\cdots\cdot u_n$ Grösen erster oder $(n-1)$ter Klasse ſind, je nachdem $a_1\cdots a_v$ es ſind. Nun ist nach 181

$$P' = \overset{n}{[}L(PM)]$$
$$= \overset{n}{[}u_1\cdots\cdot u_l(a_1\cdots\cdot a_v\cdot u_{l+1}\cdots\cdot u_n)].$$

Wenn nun das ursprüngliche Enflach $\overset{n}{[}AB\cdots E]$ ein fortschreitendes ist, ſo ſoll auch die Zurückleitung eine fortschreitende ſein, mithin nach 180 die Stufe von L eben ſo gros oder gröser als die Klasse von P ſein, d. h. $m \geqq v$, folglich $v + n - m < n$, d. h. das Enflach $\overset{n}{[}a_1\cdots a_v\cdot u_{l+1}\cdots\cdot u_n]$ ein rein fortschreitendes, alſo auch $= \overset{n}{[}a_1\cdot\cdots\cdot a_v u_{l+1}\cdots\cdot u_n]$, und da alle Fache oder Faktoren von erster Klasse ſind, nach 133 und 115 ein Einheitsflach. Die Grösen $a_1\cdots a_v$ ſeien nun Vielfachenſummen von $u_1\cdots u_m$ und ſei $a_r = {}^r\alpha_1 u_1 + \cdots + {}^r\alpha_l u_l$, ſo können wir in dem Enflache $\overset{n}{[}a_1\cdots a_v u_{l+1}\cdots\cdot u_n]$ statt $a_r = {}^r\alpha_1 u_1\cdots\cdot {}^r\alpha_l u_l$ die Zurückleitung von a_r auf das Gebiet $L = \overset{n}{[}u_1\cdots u_l]$, mit Ausschluss des Gebietes $M = \overset{n}{[}u_{l+1}\cdots u_n]$, d. h. $a'_r = {}^r\alpha_1 u_1 + \cdots + {}^r\alpha_l u_l$ ſetzen, da $u_{l+1}\cdots u_n$ bereits als Fache oder Faktoren in jenem Flache vorkommen und $u_{l+1}\cdot u_{l+1} = u_n\cdot u_n = 0$ ist. Mithin wird

$$P' = \overset{n}{[}u_1\cdots u_l\cdot a'_1\cdots a'_v u_{l+1}\cdots u_n].$$

Hier ist $a'_1\cdots\cdot a'_v$ dem $u_1\cdots u_l$ untergeordnet, alſo nach 157

$$P' = \overset{n}{[}u_1\cdots u_n]\cdot\overset{n}{[}a'_1\cdots a'_v] = \overset{n}{[}a'_1\cdots\cdot a'_v].$$

Aus gleichem Grunde ist

$$A' = \overset{n}{[}a'_1\cdots\cdot a'_h],\ B' = \overset{n}{[}a'_{h+1}\cdots\cdot a'_i],\cdots$$
$$E' = \overset{n}{[}a'_{t+1}\cdots\cdot a'_v].$$

Mithin ist

$$P' = \overset{n}{[}A'B'\cdots\cdot E'].$$

2. Wenn das ursprüngliche Enflach $\overset{n}{[}AB\cdots E]$ ein rückschreitendes ist, und ebenſo auch die Zurückleitung von P auf L, unter Ausschluss

von M, eine rückschreitende, fo ist die Klasse von P kleiner oder ebenfogros als die Stufe von L, mithin kehrt fich das rückschreitende Flach und ebenfo die rückschreitende Zurückleitung, wenn wir statt der Grösen ihre Ergänzungen nehmen, nach 165 und 131 in das fortschreitende Flach und in die fortschreitende Zurückleitung um. Seien daher P_1, Q_1, R_1, A_1, $B_1, \cdots E_1$ die Ergänzungen von P, Q, R, A, $B, \cdots E$, und feien P'_1, A'_1, $B'_1, \cdots E'_1$ die Zurückleitungen von P_1, A_1, $B_1, \cdots E_1$ auf Q_1, unter Ausschluss von R_1, fo ist nach 151

$$P_1 = \overset{n}{[}A_1B_1 \cdots E_1],$$

und nach Beweis 1

$$P'_1 = \overset{n}{[}A'_1B'_1 \cdots E'_1]. \qquad (a)$$

Ferner ist nach 181

$$P' = \overset{n}{[}L(PM)],\ P'_1 = \overset{n}{[}L_1(P_1M_1)] = \overline{\overset{n}{[}L(PM)]} \qquad \text{(nach 148)},$$

alfo $P'_1 = \overline{P'}$ und ebenfo $A'_1 = \overline{A'}$, $B'_1 = \overline{B'} \cdots$, alfo (nach a)

$$\overline{P'} = \overset{n}{[}\overline{A'}\,\overline{B'} \cdots \overline{E'}],\ \text{mithin nach 151}$$

$$P' = \overset{n}{[}A'B' \cdots E'].$$

3. Seien endlich A, $B, \cdots E$ zufammengefetzte Grösen und zwar

$$A = S\alpha_r A_r,\ B = S\beta_s B_s, \cdots E = S\varepsilon_v E_v,$$

wo A_r, $B_s, \cdots E_v$ einfache Grösen find und feien A'_r, $B'_s, \cdots E'_v$ die Zurückleitungen von A_r, $B_s, \cdots E_v$, fo ist

$$P = \overset{n}{[}S\alpha_r A_r \cdot S\beta_s B_s \cdots S\varepsilon_v E_v] = S\alpha_r\beta_s \cdots \varepsilon_v \overset{n}{[}A_rB_s \cdots E_v]$$

$$= S\alpha_r\beta_s \cdots \varepsilon_v P_{r,s,\ldots v},\ \text{wenn}\ P_{r,s,\ldots v} = \overset{n}{[}A_rB_s \cdots E_v]\ \text{ist.}$$

Alfo nach 182

$$P' = S\alpha_r\beta_s \cdots \varepsilon_v P'_{r,s,\ldots v} = S\alpha_r\beta_s \cdots \varepsilon_v \overset{n}{[}A'_rB'_s \cdots E'_v]$$

nach Beweis 1 und 2; und alfo nach 75

$$P' = \overset{n}{[}S\alpha_r A'_r S\beta_s B'_s \cdots S\varepsilon_v E'_v],\ \text{mithin nach 182}$$

$$= \overset{n}{[}A'B' \cdots E'].$$

184. **Satz. Das reine Enflach von Grösen erster Klasse oder von Grösen (n — 1)ter Klasse in einem Hauptgebiete nter Stufe ist ein Einheitsflach diefer Grösen.**

Beweis. Das reine Enflach von Grösen erster Klasse ist nach 164 und 133 ein fortschreitendes, alfo nach 133 und nach 115 auch ein Einheitsflach, mithin ist auch das reine Enflach von beliebigen Grösen erster Klasse ein Einheitsflach diefer Grösen. Ebenfo ist auch das reine Enflach von Grösen (n — 1)ter Klasse ein Einheitsflach diefer

Grösen, denn nach 151 ist es genau denſelben Geſetzen unterworfen wie das Flach von Grösen erster Klasse.

Satz. Eine Gleichung, deren Glieder Grösen m ter Klasse ſind, wird, wenn n die Stufe des Hauptgebietes ist, durch ſo viel Zahlgleichungen erſetzt, als es Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung) aus n Einfachen oder Elementen zur m ten Klasse giebt, und zwar erhält man einen erſetzenden Verein von Gleichungen, indem man die gegebene Gleichung nach und nach mit den Geschiedsflachen (multiplikativen Kombinationen) zur (n — m) ten Klasse aus einer beliebigen Schar von n Grösen erster Klasse, deren Enflach 1 ist, flacht. 185.

Beweis. Die gegebene Gleichung ſei

$$P = A + B + \cdots$$

wo $P, A, B, \cdots$ Grösen m ter Klasse; es ſeien ferner $e_1, \cdots e_n$ Grösen erster Klasse, deren Enflach $\overset{n}{[}e_1 \cdots\cdot e_n] = 1$ ist, und ſeien $E_1, E_2, \cdots E_v$ die Geschiedsflache zur m ten Klasse aus $e_1, \cdots e_n$, und $F_1, F_2, \cdots F_v$ die ergänzenden Geschiedsflache, d. h. die Geschiedsflache aus denſelben Einheiten zur (n — m) ten Klasse und zwar ſo geordnet, dass $\overset{n}{[}E_1F_1] = \overset{n}{[}E_2F_2] = \cdots = \overset{n}{[}E_vF_v] = 1$ ſei, ſo muss bewieſen werden, dass die obige Gleichung durch den Verein von Gleichungen erſetzt wird.

$$\overset{n}{[}PF_{\mathfrak{r}}] = \overset{n}{[}AF_{\mathfrak{r}}] + \overset{n}{[}BF_{\mathfrak{r}}] + \cdots$$

wo $\mathfrak{r}$ die Werte von 1 bis v erhält. Nach 108 ſind die Grösen $P, A, B, \cdots$ Vielfachenſummen von $E_1 \cdots E_v$. Nun ſei

$$P = \pi_1E_1 + \cdots + \pi_vE_v,\quad A = \alpha_1E_1 + \cdots + \alpha_vE_v,$$
$$B = \beta_1E_1 + \cdots + \beta_vE_v, \cdots$$

ſo ist

$$\overset{n}{[}PF_{\mathfrak{r}}] = \overset{n}{[}S\pi_{\mathfrak{s}}E_{\mathfrak{s}}F_{\mathfrak{r}}] = S\pi_{\mathfrak{s}}\overset{n}{[}E_{\mathfrak{s}}F_{\mathfrak{r}}].$$

Aber da $E_{\mathfrak{s}}$ und $F_{\mathfrak{r}}$, wenn $\mathfrak{s} \gtrless \mathfrak{r}$ ist, notwendig gleiche Einheiten $(e_1, \cdots e_n)$ als Fache oder Faktoren enthalten, ſo ist für dieſen Fall $\overset{n}{[}E_{\mathfrak{s}}F_{\mathfrak{r}}] = 0$, alſo

$$\overset{n}{[}PF_{\mathfrak{r}}] = \pi_{\mathfrak{r}}\overset{n}{[}E_{\mathfrak{r}}F_{\mathfrak{r}}] = \pi_{\mathfrak{r}}$$

Aus gleichem Grunde ist

$$\overset{n}{[}AF_{\mathfrak{r}}] = \alpha_{\mathfrak{r}},\quad \overset{n}{[}BF_{\mathfrak{r}}] = \beta_{\mathfrak{r}}, \cdots.$$

Gilt nun die Gleichung $P = A + B + \cdots$, ſo gilt auch die aus ihr durch Modlung hervorgegangene Gleichungsgruppe

$$\overset{n}{[}PF_{\mathfrak{r}}] = \overset{n}{[}AF_{\mathfrak{r}}] + \overset{n}{[}BF_{\mathfrak{r}}] + \cdots.$$

Gilt umgekehrt die letztere, ſo hat man für jedes a von $1 \cdots v$, wenn man für $\overset{n}{[}\mathrm{PF}_a]$, $\overset{n}{[}\mathrm{AF}_a]$, $\overset{n}{[}\mathrm{BF}_a], \cdots$ die gefundenen Werte ſetzt,

$$\pi_a = \alpha_a + \beta_a + \cdots, \text{ alſo auch } \pi_a \mathrm{E}_a = \alpha_a \mathrm{E}_a + \beta_a \mathrm{E}_a + \cdots$$

für jedes a von 1 bis v. Addirt man dieſe ſämmtlichen Gleichungen, ſo erhält man

$$\mathrm{S}\pi_a \mathrm{E}_a = \mathrm{S}\alpha_a \mathrm{E}_a + \mathrm{S}\beta_a \mathrm{E}_a + \cdots,$$

d. h.

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \cdots.$$

Somit erſetzen ſich die Gleichung $\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \cdots$ und der Gleichungsverein $\overset{n}{[}\mathrm{PF}_a] = \overset{n}{[}\mathrm{AF}_a] + \overset{n}{[}\mathrm{BF}_a] + \cdots$ gegenſeitig und ist der Satz alſo bewieſen.

Beſonders ist der Fall hervorzuheben, wenn $\mathrm{A} = \alpha_1 \mathrm{E}_1 + \alpha_2 \mathrm{E}_2 + \cdots$ ist, dann ist

$$\overset{n}{[}\mathrm{AF}_r] = \alpha_r,$$

d. h. $\overset{n}{[}\mathrm{AF}_1] = \alpha_1, \overset{n}{[}\mathrm{AF}_2] = \alpha_2, \cdots.$

Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

Einleitung. Wir haben in Satz 77 die innere Webung die Art der Webung oder Multiplikation genannt, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedenen Einheiten null, das Zeug oder Produkt zweier gleichen Einheiten eins ist, d. h. für welche

$$E_{\mathfrak{a}} \cdot E_{\mathfrak{b}} = 0 \qquad \text{und } E_{\mathfrak{a}} \cdot E_{\mathfrak{a}} = E_{\mathfrak{b}} \cdot E_{\mathfrak{b}} = 1 \qquad \text{ist.}$$

Dieſelben Formeln gelten aber auch, wenn man, statt zwei Einheiten innerlich zu verweben, das Enflach aus einer Einheit und der Ergänzung einer Einheit nimmt; denn wie wir in Satz 186 ſehen werden, gelten für die Enflache von Einheiten gleicher Klasse die Formeln

$${}^{n}[E_{\mathfrak{a}}\overline{E}_{\mathfrak{b}}] = 0 \qquad \text{und nach 128 auch } {}^{n}[E_{\mathfrak{a}}\overline{E}_{\mathfrak{a}}] = {}^{n}[E_{\mathfrak{b}}\overline{E}_{\mathfrak{b}}] = 1$$

Wir werden alſo die innere Webung ſo erklären können, dass das innere Zeug oder Produkt zweier Einheiten auf das Enflach einer Einheit in die Ergänzung der andern zurückgeführt wird und gelten dann für die innere Webung alle über die Enflache gewonnenen Sätze.

13. Die Grundgeſetze der Innungslehre.

Erklärung. Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier Einheiten beliebiger Klassen ist das Enflach der ersten in die Ergänzung der zweiten, oder 186.

Wenn E und F Einheiten beliebiger Klassen ſind, ſo ist

${}^{n}[E\overline{F}]$ das Innenzeug oder das innere Produkt der Einheiten E und F. Das Zeichen des Innenzeuges ist ein liegendes Kreuz, z. B. $E \times F$ geleſen Innenzeug EF.

Ich habe das innere Produkt ein Innenzeug genannt, weil es ganz eigentümliche, keinem andern Zeuge oder Produkte zukommende Eigenschaften beſitzt

und daher auch einer eigenen Benennung bedarf, welche im Deutschen nicht durch ein vorgeſetztes Adjektiv gewonnen werden kann.

Da dieſe Art der Multiplikation ganz eigentümliche Geſetze hat, ſo muss ſie auch, wenn man vor Verwechſelungen ſicher ſein ſoll, ihr eigentümliches Zeichen haben, welches ich hiermit einführe.

187. **Satz. Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier gleichen Einheiten ist eins, das zweier verschiedenen Einheiten gleicher Klasse ist null, oder** $\overset{n}{[}E_r\overline{E}_r] = 1$, $\overset{n}{[}E_r\overline{E}_s] = 0$.

Beweis. Nach 128 ist $\overset{n}{[}E_r\overline{E}_r] = 1$. Nach 127 aber ist $\overline{E}_s$ dem Flache aller in dem Flache E_s nicht vorkommenden Einheiten erster Klasse gleich; da nun E_r von E_s verschieden ist und zugleich beide Flache von einer gleichen Anzahl ursprünglicher Einheiten ſind, ſo enthält E_r notwendig ſolche Einheiten als Fache oder Faktoren, welche in E_s fehlen, mithin in $\overline{E}_s$ vorkommen; alſo ist $\overset{n}{[}E_r\overline{E}_s]$ nach 92 gleich Null.

188. **Satz. Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier Einheiten E und F ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die eine der andern untergeordnet ist, oder**

Es ist $\overset{n}{[}E\overline{F}] = 0$, **wenn von E und F nicht eine der andern untergeordnet; dagegen ist** $\overset{n}{[}E\overline{F}] \gtrless 0$, **wenn von E und F eine der andern untergeordnet ist.**

Beweis. Der Satz ist für Einheiten gleicher Klasse in 187 bewieſen. Wenn ferner E und F zwei Einheiten verschiedener Klasse ſind, und zwar E von höherer Klasse als F ist, ſo ſetzen wir $F = \overset{n}{[}E_1 G]$, wo E_1 dem E untergeordnet ist, aber das Gebiet G keine Gröse erster Klasse mit E gemein hat. Dann ist F dem E untergeordnet, ſofern G von nullter Klasse, d. h. eine Zahl ist. Dagegen nicht dem E untergeordnet, wenn G von erster oder höherer Klasse ist. Es ſei ferner $E = \overset{n}{[}E_1E_2]$ und ſei $\overset{n}{[}E_1GE_2H] = 1$ das Zeug aller n ursprünglichen Einheiten. Dann ist nach 139 das Flach $\overset{n}{[}E_2H]$ die Ergänzung von $F = \overset{n}{[}E_1G]$, d. h. $\overline{F} = \overline{\overset{n}{[}E_1G]} = \overset{n}{[}E_2H]$, alſo

$$\overset{n}{[}E\overline{F}] = \overset{n}{[}E_1E_2\overline{(E_1G)}] = \overset{n}{[}E_1E_2(E_2H)].$$

Wenn nun F dem E untergeordnet ist, ſo ist, wie oben gezeigt, G von nullter Klasse, mithin da $\overset{n}{[}E_1GE_2H] = 1$ auch $\overset{n}{[}E_1E_2H]$ von nullter Klasse, alſo nach $156_{,3}$ der Ausdruck $\overset{n}{[}E\overline{F}] = \overset{n}{[}E_1E_2(E_2H)]$

$= \overset{n}{[}E_1E_2H\cdot E_2]$, wo E_2 und $\overset{n}{[}E_1E_2H]$ von Null verschieden ſind, alſo auch das Zeug oder Produkt, d. h. $\overset{n}{[}E\bar{F}] \gtrless 0$.

Wenn dagegen F dem E nicht untergeordnet ist, ſo ist G von erster oder höherer Klasse, und dann ist die Summe der Klassen von E_1, E_2 und H geringer als die Summe der Klassen von E_1, G, E_2, H, d. h. kleiner als n, alſo nach 158 $\overset{n}{[}E\bar{F}] = \overset{n}{[}E_1E_2\cdot E_2H] = 0$.

Satz. Wenn E und F Einheiten ſind und $\overset{n}{[}EF] \gtrless 0$, ſo ist 189.

$$\overset{n}{[}EF\bar{E}] = F \text{ und } \overset{n}{[}F\overline{(EF)}] = \bar{E}.$$

Beweis. Es ſei $\overset{n}{[}EFG] = 1$ das Enflach aller Einheiten erster Klasse, ſo ist $\bar{E} = \overset{n}{[}FG]$, mithin nach $156_{,2}$

$$\overset{n}{[}EF\bar{E}] = \overset{n}{[}EF(FG)] = \overset{n}{[}EFGF]$$
$$= F.$$

Ferner ist dann, da $\overset{n}{[}EFG] = 1$ auch $\overline{\overset{n}{[}EF]} = G$, mithin $\overset{n}{[}F\overline{(EF)}] = \overset{n}{[}FG] = \bar{E}$.

Satz. Wenn E, F, G Einheiten ſind, und weder $\overset{n}{[}EF]$ noch 190.
$\overset{n}{[}EG]$ null ist, ſo ist, wenn F von höherer Klasse ist als G

$$\overset{n}{[}EF\overline{(EG)}] = \overset{n}{[}F\bar{G}],$$

wenn dagegen G von höherer Klasse ist als F, ſo ist $\overset{n}{[}FE\overline{(GE)}] = \overset{n}{[}F\bar{G}]$.

Sind F und G von gleicher Klasse, ſo ſind beide Formeln gültig.

Beweis. Wenn von F und G nicht eine der andern untergeordnet ist, ſo ſind auch $\overset{n}{[}EF]$ und $\overset{n}{[}EG]$ nicht eine der andern untergeordnet, alſo ſind dann nach 188 beide Seiten der zu erweiſenden Gleichung null.

1. Wenn G dem F untergeordnet ist, ſo ſei $F = \overset{n}{[}GH]$. Dann ist

$$\overset{n}{[}EF\overline{(EG)}] = \overset{n}{[}EGH\overline{(EG)}] = H \qquad (189)$$
$$= \overset{n}{[}GH\bar{G}] \qquad (189)$$
$$= \overset{n}{[}F\bar{G}].$$

2. Wenn F dem G untergeordnet ist, ſo ſei $G = \overset{n}{[}HF]$. Dann ist

$$\overset{n}{[}FE\overline{(GE)}] = \overset{n}{[}FE\overline{(HFE)}] = \bar{H} \qquad (189)$$
$$= \overset{n}{[}F\overline{(HF)}] \qquad (189)$$
$$= \overset{n}{[}F\bar{G}].$$

Wenn F und G von gleicher Klasse ſind, und wenn dabei jede der andern untergeordnet ist, ſo müssen beide zuſammenfallen, mithin ist nach 107 ſowohl G dem F, als F dem G untergeordnet, und es gelten mithin beide Formeln.

191. **Satz. Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier beliebigen Grösen ist gleich dem Enflache der ersten in die Ergänzung der zweiten, oder**

Es ist $\mathbf{A \times B = \overset{n}{[}A\overline{B}]}$.

Beweis. Es ſeien $A_1, \cdots A_n$ die Einheiten, deren Vielfachenſumme A, und ſeien $B_1, \cdots B_m$ die Einheiten, deren Vielfachenſumme B.

Es ſei $A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$ und $B = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_m B_m$, wo $A_1 \cdots A_n$ die Einheiten, deren Vielfachenſumme A ist und ebenſo $B_1 \cdots B_m$ die Einheiten, deren Vielfachenſumme B ist und bezeichne $A \times B$ in dieſem Satze das Innenzeug oder das innere Produkt, ſo ist $A \times B = (\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) \times (\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_m B_m) = S\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}(A_{\mathfrak{a}} \times B_{\mathfrak{b}})$ (74). wo ſich die Summe auf die Werte $1, \cdots n$ für $\mathfrak{a}$ und auf $1, \cdots m$ für $\mathfrak{b}$ bezieht. Da nun $A_{\mathfrak{a}}$ und $B_{\mathfrak{a}}$ Einheiten ſind, ſo ist nach 186 $A_{\mathfrak{a}} \times B_{\mathfrak{b}} = \overset{n}{[}A_{\mathfrak{a}}\overline{B}_{\mathfrak{b}}]$, mithin ist

$$A \times B = S\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\overset{n}{[}A_{\mathfrak{a}}\overline{B}_{\mathfrak{b}}] = \overset{n}{[}S\alpha_{\mathfrak{a}}A_{\mathfrak{a}}S\beta_{\mathfrak{b}}\overline{B}_{\mathfrak{b}}] \qquad (74)$$

$$= \overset{n}{[}AS\beta_{\mathfrak{b}}\overline{B}_{\mathfrak{b}}] = \overset{n}{[}A\overline{(S\beta_{\mathfrak{b}}B_{\mathfrak{b}})}] \qquad (150)$$

$$= \overset{n}{[}A\overline{B}].$$

192. **Satz. Wenn** α **und** β **die Klassen von A und B ſind und** $\alpha < \beta$ **ist, ſo ist**

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] = (-1)^{\alpha(\beta-1)}\,\overline{\overset{n}{[}B\overline{A}]}, \text{ oder}$$

Es ist $\overset{n}{[}A\overline{B}]$ **der Ergänzung von** $\overset{n}{[}B\overline{A}]$ **gleich, nur wenn die Klasse von A ungerade und zugleich die von B gerade ist, dann ist** $\overset{n}{[}A\overline{B}]$ **der Ergänzung von** $\overset{n}{[}B\overline{A}]$ **entgegengeſetzt.**

Beweis. Es ist

$$\overline{\overset{n}{[}B\overline{A}]} = \overset{n}{[}\overline{B}\overline{\overline{A}}] \qquad (147)$$

$$= (-1)^{\alpha(n-\alpha)}\overset{n}{[}\overline{B} \cdot A] \qquad (132)$$

$$= (-1)^{\alpha(n-\alpha)}(-1)^{\alpha(n-\beta)}\overset{n}{[}A\overline{B}] \qquad (89)$$

$$= (-1)^{\alpha(2n-\alpha-\beta)}\overset{n}{[}A\overline{B}].$$

Es ist aber $\overset{n}{(}2n - \alpha - \beta)$ deckend mit $\alpha(\beta - \alpha)$ oder deckend mit $\alpha(\beta - 1)$, da α^2 mit α gleichzeitig gerade oder ungerade ist, mithin ist

$${}^{\overline{n}}[B\bar{A}] = (-1)^{\alpha(\beta-1)}\,{}^{n}[A\bar{B}], \text{ oder auch}$$
$${}^{n}[A\bar{B}] = (-1)^{\alpha(\beta-1)}\,{}^{\overline{n}}[B\bar{A}].$$

Durch den so eben erwiesenen Satz kann man den Fall, wo das zweite Fach eines inneren Zeuges oder Produktes von höherer Klasse ist als das erste, immer auf den andern Fall zurückführen, wo das erste Fach von höherer Klasse ist als das zweite. Diesen letztern Fall legen wir daher in der Regel der Betrachtung zu Grunde.

Satz. Die Klasse des Innenzeuges oder innern Produktes, dessen 193.
beide Fache oder Faktoren nach der Reihe die Klassen α und β haben, während die Stufe des Hauptgebietes n beträgt, ist, wenn $\beta > \alpha$ ist, gleich $\alpha + n - \beta$, dagegen, wenn $\beta \leqq \alpha$ ist, gleich $\alpha - \beta$.

Beweis. Es seien A und B die beiden Fache oder Faktoren, deren Klassen beziehlich α und β sind, so ist die Klasse von $\bar{B}$ gleich $n - \beta$.

Wenn demnach $\beta > \alpha$ ist, so ist auch n gröser als $\alpha + n - \beta$; d. h. die Summe der Klassen von A und $\bar{B}$ ist kleiner als die Stufe des Hauptgebietes, also ist nach 133 die Klasse des Flaches ${}^{n}[A\bar{B}]$ gleich jener Summe, d. h. gleich $\alpha + n - \beta$.

Wenn dagegen $\beta \leqq \alpha$ ist, so ist auch n eben so gros oder kleiner als $\alpha + n - \beta$, d. h. die Summe der Klassen von A und $\bar{B}$ ist eben so gros oder gröser als n, also nach 145 die Klasse des Flaches ${}^{n}[A\bar{B}]$ um n kleiner als jene Summe, d. h. gleich $\alpha - \beta$.

Satz. Die Anzahl der Einheiten, deren Vielfachensumme ein 194.
Innenzeug oder inneres Produkt ist, ist gleich der Anzahl der Geschiede aus so viel Einheiten, als die Stufenzahl des Hauptgebietes, und zur so vielten Klasse, als der Unterschied der Klassen der beiden Fache oder Faktoren beträgt.

Beweis. Nach 193 ist die Klasse des innern Zeuges oder Produktes entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem β gröser als α ist, oder nicht. Die Einheiten von gleicher Klasse sind im ersten Falle die Geschiedsflache aus den n Einheiten erster Klasse zur $(n + \alpha - \beta)$ten, im zweiten zur $(\alpha - \beta)$ten Klasse. Aber die Anzahl der Geschiede aus n Einfachen zur $(n + \alpha - \beta)$ten Klasse ist nach Zahlenlehre 390 gleich der Anzahl der Geschiede aus n Einfachen zur $(\beta - \alpha)$ten Klasse.*) Die Klassenzahl ist dann im ersten

*) Nach Zahlenlehre 390 ist $p^{\cdot m} = \frac{p!}{m!(p-m)!} = p^{\cdot p - m}$.

Falle $\beta - \alpha$, im zweiten Falle iſt ſie $\alpha - \beta$, in beiden Fällen alſo den Unterschieden von α und β gleich.

195. **Satz. Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Grösen gleicher Klasse ist eine Zahl und zwar**

Wenn $E_1 \cdots E_m$ ſämmtlich Einheiten von a ter Klasse ſind, ſo ist

$$\overset{n}{[}(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)\overline{(\beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m)}] = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m.$$

Beweis. Der Unterschied der Klassen ist in dieſem Falle null, alſo das Zeug nach 194 nullter Klasse, d. h. eine Zahl. Und zwar, wenn wir

$\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m = \mathop{S}\limits_{1,m} \alpha_a E_a$ und $\beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m = \mathop{S}\limits_{1,m} \beta_b E_b$ ſetzen, ſo ist

$$\overset{n}{\Big[}\Big(\mathop{S}\limits_{1,n} \alpha_a E_a\Big)\overline{(S\beta_b E_b)}\Big] = S\alpha_a\beta_b \overset{n}{[}E_a \overline{E_b}] \qquad \text{(nach 74).}$$

Nun ist nach 187 das Zeug $\overset{n}{[}E_a\overline{E_b}]$, wenn a und b verschieden ſind. gleich null, und wenn a und b gleich ist, gleich 1, mithin wird das obige Zeug $= S\alpha_a\beta_a = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m$.

196. **Satz. Wenn $E_1, \cdots E_m$ Einheiten von beliebiger, aber von gleicher Klasse ſind, ſo ist**

$$\overset{n}{[}(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)\overline{(\beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m)}] = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m.$$

Beweis. Es ſei $\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m$ mit $S\alpha_r E_r$, und $\beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m$ mit $S\beta_s E_s$ bezeichnet, ſo ist

$$\overset{n}{[}(S\alpha_r E_r)\overline{(S\beta_s E_s)}] = S\alpha_r\beta_s \overset{n}{[}E_r\overline{E_s}] \qquad (74).$$

Nun ist nach 187 das Zeug $\overset{n}{[}E_r\overline{E_s}]$ gleich null, wenn E_r und E_s verschiedene Einheiten ſind und gleich eins, wenn r gleich s ist, ſomit wird der gewonnene Ausdruck

$$= S\alpha_r\beta_r = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m.$$

197. **Satz. Die beiden Fache eines Innenzeuges (die beiden Faktoren eines inneren Produktes) ſind vertauschbar, wenn ſie von gleicher Klasse ſind, oder**

$\overset{n}{[}A\overline{B}] = \overset{n}{[}B\overline{A}]$, wenn A und B von gleicher Klasse ſind.

Beweis. Es mögen $E_1, \cdots E_m$ die Einheiten darstellen, welche mit A und B von gleicher Klasse ſind und ſei $A = S\alpha_a E_a$, $B = S\beta_b E_b$, ſo ist nach 195

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] = S\alpha_a\beta_a = S\beta_a\alpha_a = \overset{n}{[}B\overline{A}].$$

198. **Erklärung. Das Innenquader oder das innere Quadrat einer Gröse A heist das Enflach $\overset{n}{[}A\overline{A}]$.**

Das Zeichen des Innenquaders von A ist $A^{\underline{2}}$ gelesen Innenquader von A.

Satz. Das Innenquader jeder Gröse ist eine Zahl und zwar ist 199.

$$(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)^{\underline{2}} = \alpha_1^2 + \cdots\cdot + \alpha_m^2.$$

Beweis. $(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)^{\underline{2}}$

$$= \overset{n}{[}(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)\overline{(}\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)] \quad (198)$$

$$= \alpha_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_m\alpha_m \quad (197).$$

Erklärung. Der Zahlwert (numerische Wert) einer Gröse A 200.
heist die 2te Tiefe (die positive Quaderwurzel) aus dem Innenquader dieser Gröse. Zahlwertig gleich (numerisch gleich) heisen zwei Grösen von gleichem Zahlwerte, d. h. deren Innenquader gleich sind.

Diese Erklärung stimmt mit den in der Zahlenlehre bei den Zahlen und bei den Winkelgrösen (imaginären Grösen) gegebenen Erklärungen; denn der Zahlwert von $+a$ und $-a$ ist dort als $(\pm a^2)^{1/2} = a$ und der von $a + ib$ als $(a^2 + b^2)^{1/2}$ erklärt. In der Raumlehre ist entsprechend der Zahlwert einer Linie die Länge derselben gemessen durch die Längeneinheit, u. s. w.

14. Normverein und Kreiseländerung.

Erklärung. Normig zu einander heisen zwei von Null 201.
verschiedene Grösen, deren Innenzeug oder inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heisen normig zu einander, wenn ihre Teile es sind.

Allseitig normig zu einander heisen zwei Gebiete, wenn jede Gröse erster Klasse, die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normig ist; und allseitig normig zu einander heisen zwei Grösen, wenn ihre Gebiete es sind.

Nimmt man in dem Raume die ursprünglichen Einheiten als gleich lange zu einander senkrechte Strecken an, wie dies stets geschehen muss, so zeigt sich leicht, dass das innere Zeug oder Produkt zweier Strecken dann und nur dann null ist, wenn diese Strecken senkrecht zu einander sind.

Erklärung. Ein Normverein (ein Normalsystem) n ter 202.
Stufe heist ein Verein von n zahlwertig gleichen (von Null verschiedenen) Grösen erster Klasse, von denen jede zu jeder normig ist.

Ein vollständiger Normverein heist er, wenn n zugleich die Stufe des Hauptgebietes ist. Der Zahlwert jener n Grösen heist zugleich der Zahlwert des Normvereins.

Einfach heist der Normverein, dessen Zahlwert 1 ist.

Im Raume bilden z. B. drei gleichlange und gegen einander senkrechte Strecken einen Normverein.

203. **Satz. Der Verein der ursprünglichen Einheiten erster Klasse ist ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte 1.**

Beweis. Es ſeien $e_1, \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, ſo ist nach 187

$$1 = e_1^{\underline{2}} = \cdots = e_n^{\underline{2}}$$

$$0 = \overset{n}{[}e_1\overline{e_2}] = \cdots\cdot.$$

204. **Erklärung. Eine Kreiſeländerung heist jede Umgestaltung eines Vereins, durch welche 2 Grösen a und b des Vereins ſich beziehlich in $xa + yb$ und in $\pm(xb - ya)$ verwandeln, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist.**

Die Kreiſeländerung heist eine Plusänderung (eine poſitive), wenn a und b ſich in $xa + yb$ und $+(xb - ya)$ verwandeln, eine Strichänderung (eine negative), wenn a und b ſich in $xa + yb$ und $-(xb - ya)$ verwandeln.

Wenn hierbei $x = \cos\alpha$ und $y = \sin\alpha$ ist, und a und b zahlwertig gleich und zu einander normig ſind, ſo ſagt man, der Verein habe ſich von a nach b hin um den Winkel α geändert.

Wenn im Raume a und b zwei gleichlange und zu einander ſenkrechte Strecken darstellen, ſo ſieht man leicht, dass durch die Kreiſeländerung, durch welche a in $a_1 = a\cos\alpha + b\sin\alpha$, b in $b_1 = b\cos\alpha - a\sin\alpha$ übergeht, a_1 und b_1 von derſelben Länge ſind wie a und b und gegen einander ſenkrecht bleiben. Es bleiben alſo a und b bei jener Aenderung normige oder ſenkrechte Halbmesser eines festen Kreiſes. Und ist der Winkel von a bis a_1 gleich α. Sind dagegen a und b beliebige Strecken, ſo werden a_1 und b_1 normige Halbmesser einer bestimmten Ellipse, in welcher auch a und b normige Halbmesser ſind.

205. **Satz. Jeder Normverein geht durch Kreiſeländerung in einen zahlwertig gleichen Normverein über.**

Beweis. Es ſeien a, b, c, $\cdots$ die Grösen eines Normvereins. d. h. nach 201, es ſei $a^{\underline{2}} = b^{\underline{2}} = c^{\underline{2}} = \cdots$ und ſei $0 = \overset{n}{[}a\overline{b}] = \overset{n}{[}a\overline{c}] = \overset{n}{[}b\overline{c}] = \cdots$. Nun ändere ſich durch Kreiſeländerung a in $a_1 = xa + yb$ und b in $b_1 = xb - ya$, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist, ſo ist zu zeigen, dass $a_1, b_1, c, \cdots$ einen Normverein bilden, in welchem $a_1^{\underline{2}} = a^{\underline{2}}$ ist. Es ist, da $\overset{n}{[}a\overline{b}] = 0$ ist,

$$\begin{aligned} a_1^{\underline{2}} = (xa + yb)^{\underline{2}} &= x^2a^{\underline{2}} + y^2b^{\underline{2}}, \text{ d. h. da } b^{\underline{2}} = a^{\underline{2}} \\ &= (x^2 + y^2)a^{\underline{2}}, \text{ d. h. da } x^2 + y^2 = 1 \\ &= a^{\underline{2}}. \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde ist $b_1^{\underline{2}} = a^{\underline{2}}$. Ferner ist, da $\overset{n}{[}a\overline{b}] = 0$

$$\begin{aligned} \overset{n}{[}a_1\overline{b_1}] = \overset{n}{[}(xa + yb)\overline{(xb - ya)}] &= xy(b^{\underline{2}} - a^{\underline{2}}), \\ &\qquad \text{d. h. da } b^{\underline{2}} = a^{\underline{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Endlich iſt

$$\overset{n}{[}a_1\bar{c}] = \overset{n}{[}(xa + yb)\bar{c}] = x\overset{n}{[}a\bar{c}] + y\overset{n}{[}b\bar{c}],$$

und dies gleich Null, weil $\overset{n}{[}a\bar{c}]$ und $\overset{n}{[}b\bar{c}] = 0$ ſind. Aus gleichem Grunde iſt $\overset{n}{[}b_1\bar{c}] = 0$ u. ſ. w. Folglich iſt der Verein $a_1, b_1, c, \cdots$ ein Normverein, deſſen Zahlwert gleich dem des gegebenen iſt, da $a_1{}^2 = a^2$.

Satz. Das Enflach der Grösen eines Normvereins bleibt bei der Kreiſeländerung des Vereins unverändert, wenn die Aenderung eine Plusänderung (poſitiv) iſt, erhält dagegen den entgegengeſetzten Wert, wenn die Aenderung eine Strichänderung (negativ) iſt. 206.

Beweis. Es gehe a durch Kreiſeländerung in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über, wo $x^2 + y^2 = 1$ iſt; ſo wird

$\overset{n}{[}a_1b_1] = \overset{n}{[}(xa + yb)(xb - ya)]$ und dies, da $\overset{n}{[}aa]$, $\overset{n}{[}bb]$ nach 92 null ſind,

$= x^2\overset{n}{[}ab] - y^2\overset{n}{[}ba]$ und dies, da $\overset{n}{[}ba] = -\overset{n}{[}ab]$

$= (x^2 + y^2)\overset{n}{[}ab]$ (nach 88)

$= \overset{n}{[}ab]$, da $x^2 + y^2 = 1$.

Alſo $\overset{n}{[}a_1b_1] = \overset{n}{[}ab]$. Kommen nun zu den gleichen Flachen $\overset{n}{[}ab]$ und $\overset{n}{[}a_1b_1]$ noch an den entſprechenden Stellen gleiche Fache oder Faktoren hinzu, ſo bleiben die Flache gleich.

Bei der Strichänderung wird

$\overset{n}{[}a_1b_1] = -\overset{n}{[}(xa + yb)(xb - ya)]$, mithin $= -\overset{n}{[}ab]$ und wird alſo das Flach entgegengeſetzt, mithin bewieſen.

Satz. Die Grösen eines Normvereins ſind gegenſeitig frei und jede Gröse erster Klasse lässt ſich als Vielfachenſumme der Grösen eines beliebigen vollständigen Normvereins darstellen. 207.

Beweis. 1. Es ſeien $a, b, c, \cdots$ Grösen eines Normvereins. Geſetzt nun, es ſeien dieſelben nicht gegenſeitig frei, ſondern laſſe ſich die eine als Vielfachenſumme der andern darſtellen, etwa

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots,$$

ſo webe oder multiplizire man beide Seiten innerlich mit a, ſo wird

$$a^2 = \beta\overset{n}{[}b\bar{a}] + \gamma\overset{n}{[}c\bar{a}] + \cdots.$$

Hier iſt $\overset{n}{[}b\bar{a}]$, $\overset{n}{[}c\bar{a}], \cdots$ null nach 201. Alſo wäre $a^2 = 0$, im Widerſpruche mit 202. Es lässt ſich alſo keine der Grösen $a, b, c, \cdots$ als Vielfachenſumme der übrigen darſtellen, d. h. nach 9 ſie ſind gegenſeitig frei.

2. Ein vollständiger Normverein in einem Hauptgebiete n ter Stufe besteht nach 202 aus n Grösen, und da diefe nach Beweis 1 gegenfeitig frei find, fo kann nach 20 jede Gröse erster Stufe, da fie immer dem Hauptgebiete angehören muss, als Vielfachenfumme der n Grösen dargestellt werden.

208. **Satz. Wenn eine Gröse A zu mehren Grösen gleicher Stufe B, C,·· normig ist, fo ist fie auch zu jeder Gröse normig, welche eine Vielfachenfumme derfelben ist.**

Beweis. Wenn A zu B, C,··· normig ist, fo ist nach 201

$$0 = \overset{n}{[}A\bar{B}] = \overset{n}{[}A\bar{C}] = \cdots.$$

Alfo ist auch

$$\overset{n}{[}A\overline{(\beta B + \gamma C + \cdot\cdot)}] = \beta\overset{n}{[}A\bar{B}] + \gamma\overset{n}{[}A\bar{C}] + \cdots \qquad (74)$$
$$= 0.$$

209. **Satz. Alle Grösen erster Klasse, welche zu m Grösen eines vollständigen Normvereins n ter Stufe normig find, gehören dem Gebiete der n — m übrigen Grösen des Vereines an.**

Beweis. Es fei der Verein $a_1, \cdots\cdots a_n$ ein vollständiger Normverein, und feien m feiner Grösen, etwa $a_1, \cdots a_m$ zu irgend einer Gröse erster Klasse c normig, fo ist zu zeigen, dass c dem Gebiete $a_{m+1}, \cdots a_n$ angehört. Nach 207 lässt sich c als eine Vielfachenfumme der Grösen des vollständigen Normvereins $a_1, \cdots a_n$ darstellen.

$$c = \alpha_1 a_1 + \cdots\cdot + \alpha_n a_n.$$

Hier ist, da c zu a_1 normig ist, nach 201

$$0 = \overset{n}{[}a_1\bar{c}] = \alpha_1 a_1{}^{\underline{2}} + \alpha_2\overset{n}{[}a_1\bar{a}_2] + \cdots + \alpha_n\overset{n}{[}a_1\bar{a}_n]$$
$$= \alpha_1 a_1{}^{\underline{2}}.$$

Da nun $a_1{}^{\underline{2}}$ nach 202 nicht null ist, fo folgt aus der Gleichung $\alpha_1 a_1{}^{\underline{2}} = 0$, dass $\alpha_1 = 0$ ist. Auf gleiche Weife folgt, dass auch $\alpha_2, \cdots\cdot \alpha_m$ null find. Folglich ist

$$c = \alpha_{m+1} a_{m+1} + \cdots\cdot + \alpha_n a_n,$$

d. h. c gehört dem Gebiete $a_{m+1} \cdots\cdot a_n$ an.

210. **Satz. Jeder Normverein kann durch fortgefetzte Kreifeländerung fo umgewandelt werden, dass eine feiner Grösen einer beliebig gegebenen Gröse erster Klasse aus dem Gebiete des Vereines gleich wird, fofern der Zahlwert der Gröse dem des Normvereins gleich ist.**

Beweis. Es feien $a_1, \cdots\cdot a_n$ die Grösen des gegebenen Normvereins, und fei c die gegebene Gröse, deren Zahlwert gleich a_1 ist, auch fei

$$c = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Man wandle nun a_1 und a_2 durch Kreiſeländerung nach 204 ſo um, dass a_1 in

$$c_2 = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}}$$

übergeht. Dann ist $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2$, alſo

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Darauf wandle man c_2 und a_3 durch Kreiſeländerung ſo um, dass c_2 in

$$c_3 = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2 + \alpha_3 a_3}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}}$$

übergeht. Dann ist

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} c_3 + \alpha_4 a_4 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

In dieſer Weiſe fahre man fort, bis

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{1/2} c_n \text{ wird.}$$

Nun ist nach der Bedingung des Satzes c zahlwertig gleich mit a_1, alſo nach 200

$$a_1^{\underline{2}} = c^{\underline{2}} = (\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)^{\underline{2}}$$

und da $\overset{n}{[}a_1\overline{a_2}]$, $\overset{n}{[}a_1\overline{a_3}]$ u. ſ. w. nach 187 gleich Null ſind,

$$a_1^{\underline{2}} = \alpha_1^2 a_1^{\underline{2}} + \cdots + \alpha_n^2 a_n^{\underline{2}}$$

und da nach 201 auch $a_1^{\underline{2}} = a_2^{\underline{2}} = \cdots = a_n^{\underline{2}}$ ist, ſo wird

$$a_1^{\underline{2}} = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2) a_1^{\underline{2}} \qquad \text{oder } \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1,$$

mithin $c = c_n$,

d. h. es ist durch fortgeſetzte Kreiſeländerung a_1 in $c_1, c_2, \cdots c_n = c$ verwandelt.

Satz. Zwei Normvereine gleichen Zahlwertes, deren Gebiete eines dem andern gleich oder untergeordnet ist, können durch fortgeſetzte Kreiſeländerung ſo umgewandelt werden, dass, wenn ſie von gleicher Stufe ſind, das eine in das andere übergeht, wenn ſie von ungleicher Stufe ſind, das höherer Stufe die Grösen des andern enthält. 211.

Beweis. Es ſeien $a_1, a_2, a_3, \cdots$ und $b_1, b_2, b_3, \cdots$ zwei Normvereine gleichen Zahlwertes, auch ſei das Gebiet $b_1, b_2, b_3, \cdots$ entweder von gleicher oder höherer Stufe als das von $a_1, a_2, a_3, \cdots$, ſo müssen nach 52 alle Grösen $a_1, a_2, a_3, \cdots$ dem Gebiete $b_1, b_2, b_3, \cdots$ angehören. Somit kann man nach 210 den Normverein $b_1, b_2, b_3, \cdots$ durch Kreiſeländerung ſo umwandeln, dass eine ſeiner Grösen $= a_1$ wird. Der hierdurch erzeugte Normverein beſtehe aus den Grösen $a_1, c_2, c_3, \cdots$.

Da nun $a_2, a_3, \cdots$, als Grösen des Normvereins $a_1, a_2, a_3, \cdots$, zu a_1, alſo zu einer Gröse des Normvereins $a_1, c_2, c_3, \cdots$ normig ſind, ſo müssen ſie nach 209 dem Gebiete der übrigen Grösen dieſes Vereines, d. h. dem Gebiete $c_2, c_3, \cdots$ angehören. Demnach kann man wieder den Verein $c_2, c_3, \cdots$ durch Kreiſeländerung ſo umwandeln, dass eine ſeiner Grösen $= a_2$ wird. Der hierdurch erzeugte Normverein bestehe aus den Grösen $a_2, d_3, d_4, \cdots$, ſo müssen wieder aus demſelben Grunde, wie vorher, $a_3, a_4, \cdots$ dem Gebiete $d_3, d_4, \cdots$ angehören. Der Normverein $b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots$ ist dann durch Kreiſeländerungen übergegangen in $a_1, a_2, d_3, d_4, \cdots$. So kann man, wenn der Verein $b_1, b_2, \cdots$ von höherer Stufe ist als $a_1, a_2, \cdots$, fortfahren, bis der zuletzt hervorgehende Verein alle Grösen des gegebenen Vereines $a_1, a_2, a_3, \cdots$ enthält. Sind beide Vereine von gleicher Stufe, ſo kann man fortfahren, bis der Verein alle Grösen des Vereins $a_1, a_2, a_3, \cdots$, mit Ausnahme des letzten, enthält. Dieſe letzte Gröse ſei a_n, und ſei der ſo hervorgehende Normverein $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, q$, ſo muss nach der angewandten Schlussfolge a_n dem Gebiete q angehören, d. h. beide müssen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist nun $q = \beta a_n$, wo β eine Zahl ist, ſo ist, da beide im Zahlwerte einander gleich ſind, $q^2 = a_n^2$, alſo $\beta^2 = 1$, ſomit $q = \mp a_n$. Wenn nun $q = - a_n$ ist, ſo hat man nur statt der letzten Kreiſeländerung die entgegengeſetzte zu nehmen, ſo ist dann auch $q = a_n$, mithin ist dann der eine der gegebenen Normvereine in den andern durch Kreiſeländerung übergegangen.

212. **Satz. In jedem Gebiete mter Stufe kann man einen Normverein gleicher Stufe von beliebigem Zahlwerte aufstellen und zwar ſo, dass dieſer Verein Teil eines vollständigen Normvereins ist.**

Beweis. Das Gebiet der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ ſei das Hauptgebiet. Der Verein dieſer Einheiten ist nach 203 ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte 1. In dem Gebiete mter Stufe A innerhalb des Hauptgebietes ſei nun a_1 eine Gröse erster Klasse vom Zahlwerte 1. Nach 210 kann nun jener vollständige Normverein durch Kreiſeländerung ſo umgewandelt werden, dass a_1 eine der Grösen des hervorgehenden Normvereins wird. Dann ist a_1 zu den $n-1$ übrigen Grösen dieſes Normvereins, alſo nach 208 auch zu jeder Gröse ihres Gebietes A_1 normig. Dies Gebiet ist von $(n-1)$ter Stufe und hat alſo mit dem Gebiete mter Stufe A nach 31 ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n-1+m-n=m-1$ ist. Es ſei in dieſem gemeinschaftlichen Gebiete wieder a_2 eine Gröse

erster Klasse vom Zahlwerte 1. Da a_2 alſo auch dem Gebiete A_1 angehört, ſo ist ſie nach dem obigen zu a_1 normig, aber auch, da beide gleich 1 ſind, mit a_1 im Zahlwerte gleich, alſo bilden a_1 und a_2 einen Normverein vom Zahlwerte 1. Alſo lässt ſich nach 209 der vollständige Normverein $e_1, \cdots e_n$ in einen andern Normverein umwandeln, welcher a_1 und a_2 enthält. Das Gebiet A_2 der übrigen $n - 2$ Grösen dieſes Normvereins ist von $(n - 2)$ter Stufe, und alle Grösen erster Klasse, die dieſem Gebiete angehören, ſind normig zu a_1 und a_2. Nun haben A und A_2 ein Gebiet $m - 2$ter Stufe gemein; in ihm ſei a_3 eine beliebige Gröse erster Klasse vom Zahlwerte 1, ſo hat man schon einen Normverein von drei Grösen a_1, a_2, a_3 in A, und ſo kann man fortfahren. Hat man ſo in A einen Normverein von $(m - 1)$ Grösen $a_1, \cdots a_{m-1}$ erhalten, ſo enthält der vollständige Normverein, zu dem er gehört, auserdem noch $n - m + 1$ Grösen, d. h. ihr Gebiet, welches A_{m-1} heise, ist von $(n - m + 1)$ter Stufe, hat alſo mit dem Gebiete $m$ter Stufe A noch ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n - m + 1 + m - n = 1$ ist. Es ſei a_m eine Gröse erster Klasse dieſes Gebietes vom Zahlwerte 1, ſo ist a_m, da es in A_{m-1} liegt, zu $a_1, \cdots a_{m-1}$ normig und $a_1, \cdots a_m$ bilden alſo einen Normverein $m$ter Stufe in dem Gebiete $m$ter Stufe A. Dieſem Normvereine kann man dadurch, dass man alle ſeine Grösen mit einer und derſelben beliebigen Zahl vervielfacht, jeden beliebigen Zahlwert geben.

15. Die normige Zurückleitung.

Erklärung. Die normige Zurückleitung A' einer Gröse A 213.
auf ein Gebiet B heist die Zurückleitung der Gröse A auf das Gebiet B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes (Vergl. 28 und 179).

In der Raumlehre ist die ſenkrechte Abschattung oder Projektion die normige Zurückleitung. Sei z. B. a, b, c ein vollständiger Normverein und $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$ eine beliebige Gröse des Hauptgebietes, ſo ist die normige Zurückleitung der Gröse p auf das Gebiet bc gleich $\beta b + \gamma c$, die auf das Gebiet c gleich γc.

Satz. Die normige Zurückleitung A' einer Gröse A auf ein 214.
Gebiet B ist

$$A' = \frac{\overset{n}{[}B \cdot (A\bar{B})]}{B^{\underline{2}}}, \text{ und ſie ist } A' = \overset{n}{[}B \cdot (A\bar{B})], \text{ wenn } B^{\underline{2}} = 1.$$

Beweis. Nach 213 ist A' die Zurückleitung von A auf B, unter

Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes, d. h. des Gebietes $\overline{B}$. Wird $\overline{B}$ mit C bezeichnet, ſo ist nach 181

$$A' = \frac{\overset{n}{[}B(AC)]}{\overset{n}{[}BC]}, \text{ alſo } = \frac{\overset{n}{[}B\cdot(A\overline{B})]}{\overset{n}{[}B\overline{B}]} = \frac{\overset{n}{[}B\cdot(A\overline{B})]}{B^2}.$$

215. **Satz. Wenn die Klasse von A gleich der von B ist, ſo ist die Zurückleitung**

$$A' = \frac{\overset{n}{[}A\overline{B}B]}{B^2}, \text{ und ſie ist } A' = \overset{n}{[}A\overline{B}B], \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Wenn A und B gleicher Klasse ſind, ſo ist nach 167 $\overset{n}{[}A\overline{B}]$ eine Zahl und kann alſo statt $\overset{n}{[}B\cdot(A\overline{B})]$ geschrieben werden $\overset{n}{[}A\overline{B}B]$.

216. **Satz. Die Ergänzung des Enflaches A von m Grösen eines vollständigen Normvereins vom Zahlwerte eins ist, wenn die n einfachen Fache (Faktoren) von $\overset{n}{[}AB]$ die n Grösen des Normvereins ſind, dem Enflache der (n — m) übrigen Grösen des Vereins gleich oder entgegengeſetzt, je nachdem $\overset{n}{[}AB] = +1$ oder $= -1$ ist, d. h. es ist**

$$\overline{A} = \overset{n}{[}ABB].$$

Beweis. 1. Für den Verein der ursprünglichen Einheiten ist dieſe Formel in 138 als Erklärung festgeſetzt.

2. Es ist nun noch zu beweiſen, dass, wenn dieſe Formel für irgend einen Normverein a, b, c,··· gilt, ſo dass $\overline{A} = \overset{n}{[}ABB]$, ſie auch für jeden aus ihm durch Kreiſeländerung hervorgehenden Normverein gilt. Es gehe nun durch Kreiſeländerung a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über und verwandle ſich A in A_1, B in B_1; ſo ist zu zeigen, dass auch $\overline{A}_1 = \overset{n}{[}A_1B_1B_1]$ ſei. Da nun A und B nach dem Satze zuſammen alle Grösen a, b,··· des Normvereins und zwar ſowohl A als B jede dieſer Grösen nur einmal enthalten ſollen, ſo kommen a und b entweder beide in A, oder beide in B, oder eine in A und die andere in B vor. Wir haben nun schon in 206 bewieſen, dass das Enflach $\overset{n}{[}a_1b_1]$ bei dieſer Aenderung gleich $\overset{n}{[}ab]$ bleibt; ſomit bleibt in den beiden ersten Fällen ſowohl A als B unverändert, alſo bleibt dann auch die obige Gleichung, die nur A und B enthält, bestehen.

Im dritten Falle ſei a in A enthalten, b in B, und ſei A′ die Gröse, die aus A hervorgeht, wenn man darin b statt a ſetzt, und B′ die Gröse, welche aus B hervorgeht, wenn man darin a statt b ſetzt.

Dann unterscheiden ſich die Flache $\overset{n}{[}A'B']$ und $\overset{n}{[}AB]$ nur durch gegenſeitige Vertauschung der beiden einfachen Fache a und b, folglich ist dann nach 88 $\overset{n}{[}A'B'] = -\overset{n}{[}AB]$. Ferner ist dann

$$A_1 = xA + yA', \quad B_1 = xB - yB',$$

folglich nach 151

$$\overline{A}_1 = x\overline{A} + y\overline{A}'$$

Da nun A und A' nur Grösen des Normvereins a, b, ⋯ als einfache Fache oder Faktoren enthalten, und B und B' die jedesmal übrigen, ſo gilt (nach der Annahme) für ſie die obige Gleichung, d. h. es ist

$$\overline{A} = \overset{n}{[}ABB], \quad \overline{A}' = \overset{n}{[}A'B'B'],$$

und da $\overset{n}{[}A'B'] = -\overset{n}{[}AB]$, auch $\overline{A}' = -\overset{n}{[}ABB']$, mithin

$$\overline{A}_1 = x\overset{n}{[}ABB] - y\overset{n}{[}ABB'] = \overset{n}{[}AB(xB - yB')] = \overset{n}{[}ABB_1].$$

Endlich ist nach 206 $\overset{n}{[}A_1B_1] = \overset{n}{[}AB]$, indem die einfachen Fache von $\overset{n}{[}A_1B_1]$ aus denen von $\overset{n}{[}AB]$ durch poſitive Kreiſeländerung hervorgehen. Alſo ist

$$\overline{A}_1 = \overset{n}{[}A_1B_1B_1],$$

d. h. wenn die Gleichung für irgend einen Normverein gilt, ſo gilt ſie auch für jeden daraus durch poſitive Kreiſeländerung hervorgehenden, und ebenſo auch für jeden daraus durch negative Aenderung hervorgehenden. Denn nach 204 wird die poſitive Kreiſeländerung in eine negative verwandelt, wenn man das Vorzeichen von b_1 ändert, dann ändert ſich auch das Vorzeichen von B_1, wobei die gefundene Gleichung bestehen bleibt. Alſo bleibt die Gleichung überhaupt bei jeder Kreiſeländerung des Normvereins bestehen, wenn ſie für irgend einen Normverein gilt. Nach Beweis 1 gilt ſie aber für den Normverein der ursprünglichen Einheiten, alſo nun auch für jeden daraus durch Kreiſeländerung abgeleiteten Verein. Nach 211 kann man aber jeden Normverein des Zahlwertes 1 aus jenem ableiten, alſo gilt die Gleichung für jeden Normverein vom Zahlwerte 1.

Satz. Alle bisher aufgestellten Sätze behalten ihre Geltung, wenn man statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten einen beliebigen vollständigen Normverein mit dem Zahlwerte Eins ſetzt. 217.

Beweis. Alle in den ersten beiden Abschnitten entwickelten Rechnungsgeſetze gelten nach 160 auch dann noch, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige n Grösen ſetzt, welche Viel-

fachenſummen derſelben ſind und deren Flach 1 ist, alſo auch, wenn man die Grösen eines vollständigen Normvereins einſetzt. Ferner gilt nach 216 der Begriff der Ergänzung wie er in 128 in Bezug auf den Verein der ursprünglichen Einheiten aufgestellt ist, auch in Bezug auf jeden Normverein mit dem Zahlwerte Eins. Aber auf dieſem Begriff der Ergänzung und den in den ersten beiden Abschnitten entwickelten Rechnungsgeſetzen beruhen alle Sätze der Innungslehre, wie ſie bisher entwickelt worden ſind. Alſo gelten dieſe Sätze noch, wenn man statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten einen Normverein mit dem Zahlwerte eins ſetzt.

Der Begriff des Innenzeuges ist alſo nicht mehr an den Verein der ursprünglichen Einheiten geknüpft, man kann vielmehr statt jenes Vereins einen beliebigen Normverein vom Zahlwerte eins ſetzen, ohne dass irgend einer der bisher aufgestellten Sätze eine Aenderung erleidet. Es ist alſo der Begriff des Innenzeuges oder des inneren Produktes nur noch an den Begriff des Normvereins geknüpft, und dieſer tritt daher in den später folgenden Entwickelungen statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten hervor.

218. **Satz. Die Bedingungsgleichungen für die innere Webung zweier Grösen erster Klasse ſind**

$$\overset{n}{[}e_r\overline{e_s}] = 0, \text{ wenn } r \gtrless s, \text{ und } \overset{n}{[}e_r\overline{e_r}] = \overset{n}{[}e_s\overline{e_s}] = \cdots = 1,$$

und zwar gelten dieſelben auch, wenn man statt der Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ einen beliebigen vollständigen Normverein ſetzt.

Beweis. Die Geltung der beiden Gleichungsgruppen für die Einheiten ist in 187 bewieſen. Alſo gelten ſie nach 217 auch für jeden einfachen vollständigen Normverein von dem Zahlwerte eins. Sie gelten aber auch für jeden beliebigen vollständigen Normverein vom Zahlwerte λ. Denn ſind a, b, zwei Grösen desſelben und ist λ der Zahlwert des Normvereins, ſo dass $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ geſetzt werden kann, wo a' und b' den Zahlwert 1 haben, ſo ist $\overset{n}{[}a'\overline{b'}] = 0$, alſo auch $\overset{n}{[}\lambda a'\lambda\overline{b'}] = 0$, d. h. $\overset{n}{[}a\overline{b}] = 0$ und $\overset{n}{[}a'\overline{a'}] = 1$, alſo $\overset{n}{[}a\overline{a}] = \overset{n}{[}\lambda a'\lambda\overline{a'}] = \lambda^2\overset{n}{[}a'\overline{a'}] = \lambda^2$. Ebenſo $\overset{n}{[}b\overline{b}] = \lambda^2$, alſo $\overset{n}{[}a\overline{a}] = \overset{n}{[}b\overline{b}]$. Die beiden obigen Gruppen von Gleichungen enthalten aber auch die vollständigen Bestimmungsgleichungen, d. h. es herrscht zwischen den Zeugen oder Produkten $\overset{n}{[}e_r\overline{e_s}]$ keine andere Zahlbeziehung, als eine aus jenen beiden Gruppen ableitbare. Es lassen ſich nämlich vermöge der beiden Gruppen alle Zeuge oder Produkte $\overset{n}{[}e_r\overline{e_s}]$, ſofern r gleich s ist, gleich $\overset{n}{[}e_1\overline{e_1}]$ ſetzen, während ſie verschwinden, ſobald r von s verschieden ist. Hat man alſo irgend eine Bedingungsgleichung

$$S\alpha_{r,s}\overset{n}{[}e_r\bar{e}_s] = 0,$$

ſo verwandelt ſie ſich in

$$S\alpha_{r,r}\overset{n}{[}e_1\bar{e}_1] = 0,$$

alſo, da $\overset{n}{[}e_1\bar{e}_1]$ gleich 1 ist, in

$$S\alpha_{r,r} = 0.$$

Ist aber letzteres der Fall, ſo geht die Gleichung

$$S\alpha_{r,s}\overset{n}{[}e_r\bar{e}_s] = 0$$

schon aus den obigen beiden Gruppen hervor, ſomit enthalten jene beiden Gruppen die vollständigen Bestimmungsgleichungen.

Für die innere Webung oder Multiplikation zweier beliebiger Grösen von den Stufen p und q ($q \geqq p$) ſind die Bestimmungsgleichungen in den beiden Gleichungsgruppen enthalten:

$\overset{n}{[}E\bar{F}] = 0$, wenn E und F eine der andern nicht gleich oder untergeordnet

$\overset{n}{[}E\bar{E}G] = \overset{n}{[}E'\bar{E}'G]$, wo E, F, G, E′ Flache der ursprünglichen Einheiten ſind, E, E′ von p ter, F, $\overset{n}{[}EG]$ und $\overset{n}{[}E'G]$ von q ter Klasse ungleich null ſind.

Satz. $\overset{n}{[}a\bar{b}] = \overset{n}{[}b\bar{a}]$. 219.

Beweis. Unmittelbar aus 197.

Satz. $\overset{n}{[}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)\overline{(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)}]$ 220.

$$= \alpha_1\beta_1 a_1{}^{\underline{2}} + \alpha_2\beta_2 a_2{}^{\underline{2}} \cdots,$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ zu einander normig ſind.

Beweis. Es ist $\overset{n}{[}\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)\overline{(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)}]$

$$= \overset{n}{[}\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)(\beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \cdots)] = \overset{n}{[}(S\alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}})(S\beta_{\mathfrak{b}}\bar{a}_{\mathfrak{b}})]$$

$$= S\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\overset{n}{[}a_{\mathfrak{a}}\bar{a}_{\mathfrak{b}}] \qquad (74)$$

$$= S\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{a}}\overset{n}{[}a_{\mathfrak{a}}\bar{a}_{\mathfrak{a}}],$$

weil $a_{\mathfrak{a}}$ und $a_{\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist, nach der Annahme zu einander normig ſind, alſo nach 218 ihr Innenzeug null ist. Der letzte Ausdruck ist aber

$$= S\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}}{}^{\underline{2}} = \alpha_1\beta_1 a_1{}^{\underline{2}} + \alpha_2\beta_2 a_2{}^{\underline{2}} + \cdots.$$

Satz. $\overset{n}{[}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)\overline{(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)}] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots$, 221.
wenn $a_1, a_2, \cdots$ ein einfacher Normverein.

Beweis. Nach 220 ist

$$\overset{n}{[}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)\overline{(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)}]$$
$$= \alpha_1\beta_1 a_1{}^{\underline{2}} + \alpha_2\beta_2 a_2{}^{\underline{2}} + \cdots.$$

Da aber $a_1, a_2, \cdots$ ein einfacher Normverein ſind, ſo ist $a_1{}^2 = a_2{}^2 = \cdots = 1$, alſo der gefundene Ausdruck

$$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots.$$

222. **Satz. Wenn $a_1, a_2, \cdots$ zu einander normig ſind, ſo ist**

$$(a_1 + a_2 + \cdots)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots.$$

Beweis. Unmittelbar aus 220.

223. **Satz.** $(a + b)^2 = a^2 + 2\overset{n}{[}a\overline{b}] + b^2$.

Beweis. Es ist

$$(a + b)^2 = \overset{n}{[}(a + b)\overline{(a + b)}]$$

$$= \overset{n}{[}a\overline{a}] + \overset{n}{[}a\overline{b}] + \overset{n}{[}b\overline{a}] + \overset{n}{[}b\overline{b}] \qquad (74),$$

alſo nach 218

$$= a^2 + 2\overset{n}{[}a\overline{b}] + b^2.$$

224. **Satz.** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\overset{n}{[}b\overline{c}] + 2\overset{n}{[}c\overline{a}] + 2\overset{n}{[}a\overline{b}]$.

Beweis wie in 223.

Die Sätze 222 bis 224 enthalten, auf den Raum bezogen, den Pythagoräischen Lehrſatz nebst ſeiner Erweiterung für die Ebene wie für den Raum.

225. **Satz. Wenn die Gebiete von A und B zu einander allſeitig normig ſind, und C eine beliebige Gröſe von niederer oder gleicher Klasse wie B ist, ſo ist**

$$\overset{n}{[}AB\overline{(AC)}] = A^2\overset{n}{[}B\overline{C}] \text{ und}$$

$$\overset{n}{[}CA\overline{(BA)}] = A^2\overset{n}{[}C\overline{B}].$$

Beweis. 1. Es ſei ein Normverein mit dem Zahlwerte 1 angenommen, deſſen Gröſen ſich auf die Gebiete A und B verteilen, und ſei derſelbe zu einem vollſtändigen Normvereine ergänzt. Dann ist C als Vielfachenſumme der Geſchiedsflache (multiplikativen Kombinationen) der Gröſen jenes Normvereins ableitbar. (106. 109).

Es ſei $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots$, ferner ſei $A = \alpha A_1$, $B = \beta B_1$, wo A_1, B_1 Geſchiedsflache (kombinatoriſche Produkte) der Gröſen des Normvereins ſind, ſo ist

$$\overset{n}{[}AB\overline{(AC)}] = \alpha^2\beta\overset{n}{[}A_1B_1\overline{(A_1(\gamma_1C_1 + \gamma_2C_2 + \cdots))}]$$

$$= \alpha^2\beta\gamma_1\overset{n}{[}A_1B_1\overline{(A_1C_1)}] + \alpha^2\beta\gamma_2\overset{n}{[}A_1B_1\overline{(A_1C_2)}] + \cdots.$$

Aber $\overset{n}{[}A_1B_1\overline{(A_1C_r)}]$ ist, wenn A_1, B_1, C_r Einheiten höherer Klasse, d. h. Geſchiedsflache der urſprünglichen Einheiten ſind, nach 190 gleich $\overset{n}{[}B_1\overline{C_r}]$. Dasſelbe findet aber nach 217 auch noch statt, wenn

jene Grösen Geschiedsflache der Grösen eines einfachen Normvereins ſind, alſo auch in dieſem Falle. Somit wird

$$\overset{n}{[}AB\overline{(AC)}] = \alpha^2\beta\gamma_1\overset{n}{[}B_1\overline{C}_1] + \alpha^2\beta\gamma_2\overset{n}{[}B_1\overline{C}_2] + \cdots$$
$$= \alpha^2\beta\overset{n}{[}B_1\overline{(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)}]$$
$$= \alpha^2\beta\overset{n}{[}B_1\overline{C}].$$

Da nun A_1 ein Geschiedsflach von Grösen eines einfachen Normvereins ist, ſo ist $A_1{}^{\underline{2}} = 1$ und ist der gefundene Ausdruck

$$= \alpha^2\beta A_1{}^{\underline{2}}\overset{n}{[}B_1\overline{C}] = (\alpha A_1)^{\underline{2}}\overset{n}{[}\beta B_1\overline{C}]$$
$$= A^{\underline{2}}\overset{n}{[}B\overline{C}].$$

2. Auf gleiche Weiſe ergiebt ſich die zweite Formel des Satzes.

Satz. Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Grösen ändert 226.
ſeinen Wert nicht, wenn man statt der einen Gröse ihre normige Zurückleitung auf das Gebiet der andern ſetzt, d. h.

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] = \overset{n}{[}A\overline{B}'] \text{ und}$$
$$\overset{n}{[}B\overline{A}] = \overset{n}{[}B'\overline{A}],$$

wenn B' die normige Zurückleitung von B auf das Gebiet A ist und alſo A von gleicher oder höherer Klasse als B ist.

Beweis. Es ſei das Hauptgebiet von $n$ter Stufe, A von $m$ter, B von $p$ter Klasse, ſo kann man nach 212 einen vollständigen Normverein $a_1, \cdots a_n$ ſo annehmen, dass m ſeiner Grösen, etwa $a_1, \cdots a_m$, in A liegen, und ſein Zahlwert 1 ſei. Die p Fache oder Faktoren von B ſind dann nach 207 als Vielfachenſummen von $a_1, \cdots a_n$ darstellbar, alſo ist B eine Vielfachenſumme der Geschiedsflache (multiplikativen Kombinationen) von $a_1, \cdots a_n$ zur $p$ten Klasse. Dieſe Geschiedsflache ſeien $B_1, B_2, \cdots B_q, B_{q+1}, \cdots B_r$, wo $B_1, \cdots B_q$ die Geschiedsflache aus $a_1, \cdots a_m$ ſeien; und ſei

$$B = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q + \beta_{q+1} B_{q+1} \cdots + \beta_r B_r,$$

ſo ſind nach 188 und 217 die Zeuge $\overset{n}{[}A\overline{B}_{q+1}], \cdots \overset{n}{[}A\overline{B}_r]$ alle gleich null, da jede der Grösen B_{q+1} bis B_r ſolche Fache oder Faktoren enthält, die in A nicht vorkommen, und dieſe Grösen alſo der Gröse A nicht gleich oder untergeordnet ſind, alſo wird

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] = \beta_1\overset{n}{[}A\overline{B}_1] + \cdots + \beta_q\overset{n}{[}A\overline{B}_q]$$
$$= \overset{n}{[}A\overline{(\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q)}].$$

Aber nach 179 ist $\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q$ die Zurückleitung von B auf das Gebiet $a_1, \cdots a_m$, mit Ausschluss des Gebietes $a_{m+1}, \cdots a_n$,

letzteres Gebiet ist aber nach 216 die Ergänzung des ersteren; alſo ist $\beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q$ die normige Zurückleitung von B auf das Gebiet $a_1, \cdots a_m$, d. h. auf das Gebiet von A, alſo gleich B′ und ſomit

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] = \overset{n}{[}A\overline{B'}].$$

Aus gleichem Grunde ist $\overset{n}{[}B\overline{A}] = \overset{n}{[}B'\overline{A}]$.

227. **Satz. Wenn man in einem Innenzeuge oder innern Produkte zweier Grösen gleicher Klasse die eine auf das Gebiet der andern normig zurückleitet, und dieſe Zurückleitung ſo wie die Gröse, auf deren Gebiet zurückgeleitet ist, durch ein und dasſelbe Mas misst, dessen Zahlwert Eins ist, ſo ist das Zeug der beiden Messungs-Brüche gleich dem gegebenen Innenzeuge oder innern Produkte, d. h. es ist**

$$\overset{n}{[}\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}] = \alpha\beta', \text{ wenn } \mathbf{A} = \alpha\mathbf{E},$$

und die normige Zurückleitung B′ von A auf B gleich β'E, wo der Zahlwert von E gleich Eins ist.

Beweis. Nach 198 ist

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] = \overset{n}{[}A\overline{B'}].$$

Es ſei E ein Gebietsteil von A mit dem Zahlwerte Eins, und ſei $A = \alpha E$, $B' = \beta' E$, ſo ist $\overset{n}{[}A\overline{B'}] = \alpha\beta'\overset{n}{[}E\overline{E}] = \alpha\beta' E^{\underline{2}} = \alpha\beta'$, da $E^{\underline{2}} = 1$ ist.

228. **Erklärung. Wenn A ein Geschiedsflach (eine multiplikative Komplexion) aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ ist, ſo heist das Geschiedsflach B, welches die ſämmtlichen in A nicht enthaltenen gegebenen Grösen erster Stufe enthält, und mit einem ſolchen Vorzeichen ($\pm$) verſehen ist, dass $\overset{n}{[}\mathbf{AB}] = \overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_n]$ ist, das zu A ergänzende Geschiedsflach.**

229. **Satz. Wenn A (Alpha) mit A von gleicher Klasse, B (Bêta) aber von gleicher oder niederer Klasse ist als B, und $\overset{n}{[}\mathbf{AB}] \gtrless 0$ ein Enflach von Grösen erster Klasse ist, auch A, $A_1, \cdots$ die Geschiedsflache (multiplikativen Komplexionen) aus den Grösen erster Klasse von $\overset{n}{[}\mathbf{AB}]$, und B, $B_1, \cdots$ die zu A, $A_1, \cdots$ ergänzenden Geschiedsflache ſind, ſo ist**

$$\text{(a)} \quad \overset{n}{[}\mathbf{AB}\overline{(\mathcal{AB})}] = \overset{n}{[}\mathbf{A}\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{B}\overline{\mathcal{B}})] + \overset{n}{[}\mathbf{A}_1\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{B}_1\overline{\mathcal{B}})] + \cdots \text{ und}$$

$$\text{(b)} \quad \overset{n}{[}\mathcal{BA}\overline{(\mathbf{BA})}] = \overset{n}{[}\mathcal{B}\overline{\mathbf{B}}(\mathcal{A}\overline{\mathbf{A}})] + \overset{n}{[}\mathcal{B}\overline{\mathbf{B}}_1(\mathcal{A}\overline{\mathbf{A}}_1)] + \cdots.$$

Beweis. 1. Es ſeien zunächst die Grösen erster Klasse in $\overset{n}{[}AB]$ alle zu einander normig. Da A von gleicher Klasse mit A ist,

ſo ist es als eine Vielfachenſumme aus den Geschiedsflachen $A, A_1, \cdots$ darstellbar. Es ſei alſo

$$\boldsymbol{A} = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots,$$

ſo ist

$$\overset{n}{[}AB\overline{(}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})] = \overset{n}{[}AB\overline{(}(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)\boldsymbol{B})]$$
$$= \alpha\overset{n}{[}AB\overline{(}A\boldsymbol{B})] + \alpha_1\overset{n}{[}AB\overline{(}A_1\boldsymbol{B}) + \cdots.$$

Da nun nach der Vorausſetzung $B, B_1, \cdots$ die ergänzenden Geschiedsflache zu $A, A_1, \cdots$ ſind, ſo ist nach 228 $\overset{n}{[}AB] = \overset{n}{[}A_1B_1] = \cdots$, und erhalten wir die Gleichung

$$\overset{n}{[}AB\overline{(}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})] = \alpha\overset{n}{[}AB\overline{(}A\boldsymbol{B})] + \alpha_1\overset{n}{[}A_1B_1\overline{(}A_1\boldsymbol{B})] + \cdots.$$

Da ferner die einfachen Grösen in $\overset{n}{[}AB]$ alle zu einander normig, auch dieſelben ſind mit denen von $\mp\overset{n}{[}A_1B_1]$ u. ſ. w. nach der Annahme, ſo ist A zu B allſeitig normig, und ebenſo A_1 zu B_1 u. ſ. w. Folglich ist nach 225 der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= \alpha A^{\underline{2}}\overset{n}{[}B\overline{\boldsymbol{B}}] + \alpha_1 A_1{}^{\underline{2}}\overset{n}{[}B_1\overline{\boldsymbol{B}}] + \cdots.$$

Nun ist aber $\overset{n}{[}A_r\overline{\boldsymbol{A}}] = \overset{n}{[}A_r\overline{(}\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)] = \alpha_r A_r{}^{\underline{2}}$, weil A_r mit den zu ihm normigen Grösen $A, A_1, \cdots$ ausgenommen A_r, innerlich gewebt oder multiplizirt, null giebt nach 188, 217. Alſo kann man in dem vorher gefundenen Ausdruck $\overset{n}{[}A_r\overline{\boldsymbol{A}}]$ statt $\alpha_r A_r{}^{\underline{2}}$ ſetzen und jener Ausdruck wird

$$= \overset{n}{[}A\overline{\boldsymbol{A}}]\overset{n}{[}B\overline{\boldsymbol{B}}] + \overset{n}{[}A_1\overline{\boldsymbol{A}}]\overset{n}{[}B_1\overline{\boldsymbol{B}}] + \cdots = \overset{n}{[}A\overline{\boldsymbol{A}}(B\overline{\boldsymbol{B}})] + \overset{n}{[}A_1\overline{\boldsymbol{A}}(B_1\overline{\boldsymbol{B}})] + \cdots,$$

d. h. die Formel (a) gilt für unſere Vorausſetzung.

2. Die Formel (a) gilt alſo, wenn die Grösen erster Klasse in $\overset{n}{[}AB]$ alle zu einander normig ſind, ſie bleibt aber auch noch bestehen, wenn man dieſe Reihe von Fachen oder Faktoren nach 110 linig ändert, d. h. statt irgend eines Faches a ſetzt $a + \beta b$, wo β eine Zahl und b einer der andern Fache ist. Hierbei behält nach 111 das Zeug oder Produkt $\overset{n}{[}AB]$, alſo auch die linke Seite unſerer Formel, denſelben Wert. Betrachtet man nun irgend ein Glied der rechten Seite, z. B. $\overset{n}{[}A_r\overline{\boldsymbol{A}}(B_r\overline{\boldsymbol{B}})]$, ſo können a und b entweder beide in A_r vorkommen, oder beide in B_r, oder eins in A_r, das andere in B_r. In den beiden ersten Fällen bleibt ſowohl der Wert von A_r als der von B_r unverändert, alſo auch das betreffende Glied. Im letzten Falle kommt dafür noch ein anderes Glied $\overset{n}{[}A_s\overline{\boldsymbol{A}}(B_s\overline{\boldsymbol{B}})]$ vor von der Art,

dass, wo das eine der Zeuge oder Produkte A_r und A_s den Fach a enthält, das andere den Fach b enthält, und dass die Zeuge B_r und B_s, da ſie die jedesmal dem A_r und A_s fehlenden Fache enthalten, in derſelben gegenſeitigen Beziehung zu einander stehen, alle die Zeuge im Uebrigen aber dieſelben Fache enthalten. Es kommt alſo a in einer der Grösen A_r und A_s vor; es mag a in A_r vorkommen. Nun ſei A' die Gröse, welche aus A_r hervorgeht, indem man darin b statt a ſetzt, und B' die Gröse, welche aus B_r hervorgeht, indem man darin a statt b ſetzt. Dann enthält alſo A' dieſelben Fache wie A_s und B' wie B_s; es ſind alſo nach 91 dann A' und B' den Grösen A_s und B_s entweder gleich oder entgegengeſetzt. Da $\overset{n}{[}A'B']$ aus $\overset{n}{[}A_rB_r]$ durch Vertauschung der beiden einfachen Fache a und b hervorgeht, ſo ist nach 88 $\overset{n}{[}A'B'] = -\overset{n}{[}A_rB_r] = -\overset{n}{[}A_sB_s]$, da $\overset{n}{[}A_sB_s] = \overset{n}{[}A_rB_r]$ nach der Annahme ist. Wenn alſo $A' = \mp A_s$ ist, ſo ist $B' = \pm B_s$. Wenn man nun die linige Aenderung von a in $a + \beta b$ einführt, ſo verwandelt ſich, da B_r und A' kein a enthalten und alſo unverändert bleiben, während A_r in $A_r + \beta A'$ und B' in $B' + \beta B_r$ ſich verwandelt, auch
$\overset{n}{[}A_r\overline{A}(B_r\overline{B})] + \overset{n}{[}A_s\overline{A}(B_s\overline{B})] = \overset{n}{[}A_r\overline{A}(B_r\overline{B})] - \overset{n}{[}A'\overline{A}(B'\overline{B})]$ in

$$\overset{n}{[}((A_r + \beta A')\overline{A})(B_r\overline{B})] - \overset{n}{[}A'\overline{A}((B' + \beta B_r)\overline{B})] = \overset{n}{[}A_r\overline{A}(B_r\overline{B})] - \overset{n}{[}A'\overline{A}(B'\overline{B})]$$
$$+ \beta\overset{n}{[}A'\overline{A}(B_r\overline{B})] - \beta\overset{n}{[}A'\overline{A}(B_r\overline{B})] = \overset{n}{[}A_r\overline{A}(B_r\overline{B})] - \overset{n}{[}A'\overline{A}(B_r'\overline{B})],$$

d. h. der Wert jener Summe bleibt ungeändert. Es bleibt ſomit die ganze rechte Seite unſerer Formel bei jener linigen Aenderung ungeändert, indem die Glieder entweder einzeln ungeändert bleiben oder, wenn ſie geändert werden, ſich zu Gliederparen gestalten, deren Summe ungeändert bleibt. Da ſomit beide Seiten der Formel bei liniger Aenderung ungeändert bleiben, ſo bleibt die Formel, wenn ſie für irgend eine Reihe von Fachen gilt, auch bei deren liniger Aenderung bestehen.

3. Die Reihe von Fachen a, b, $\cdots$ ſei endlich eine ganz beliebige, nur ſei ihr Enflach $\overset{n}{[}AB] \gtrless 0$, ſo lässt ſich nach 212 stets eine Reihe zu einander normiger Grösen erster Stufe $a_1, a_2, \cdots$ angeben, von der Art, dass $\overset{n}{[}ab\cdots] = \overset{n}{[}a_1\, a_2\cdots]$. Dann lässt ſich aber nach 113 die Grösenreihe a, b, $\cdots$ aus $a_1, a_2, \cdots$ durch linige Aenderung ableiten. Nun gilt nach Beweis 1 unſere Formel für die Reihe der zu einander normigen Fache $a_1, a_2, \cdots$, alſo nach Beweis 2 auch für die durch fortgeſetzte linige Aenderung daraus hervorgehende Reihe von Fachen, alſo auch für a, b, $\cdots$, d. h. allgemein.

Erklärung. **Die Summe** $\mathrm{S}\overset{n}{[}\mathbf{A}_a\overline{\mathit{A}}(\mathbf{B}_b\overline{\mathit{B}})\cdots(\mathbf{L}_l\overline{\mathit{\Lambda}})(\mathbf{M}_m\overline{\mathit{M}})]$ 230.
bezeichnet die Summe, welche man erhält, wenn man aus den Grösen erster Klasse des Zeuges $\overset{n}{[}\mathbf{AB}\cdots\mathbf{M}]$ **die Geschiedsflache zur sovielten Klasse entwickelt, als die Klasse von A beträgt, und jedes solches Geschiedsflach als eine der Grösen** $\mathbf{A}_a$ **setzt, wenn man demnächst zu jedem dieser Geschiedsflache, aus den in ihm nicht vorkommenden Grösen erster Klasse des Zeuges** $\overset{n}{[}\mathbf{AB}\cdots\mathbf{M}]$ **die Geschiedsflache zur sovielten Klasse entwickelt, als die Klasse von B beträgt und jedes solches Geschiedsflach als eine der Grösen** $\mathbf{B}_b$ **setzt und so fortfährt bis zu** $\mathbf{M}_m$**, endlich das Vorzeichen so bestimmt, dass** $\overset{n}{[}\mathbf{A}_a\mathbf{B}_b\cdots\mathbf{M}_m] = \overset{n}{[}\mathbf{AB}\cdots\mathbf{M}]$ **ist.**

Als Beispiel möge gelten $\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}(ab)(cd)e]$. Hier ist jene Summe die Summe von:

ab, cd, e	ad, bc, e	bc, ad, e	be, ac, d	ce, ab, — d
ab, ce, — d	ad, be, — c	bc, ae, — d	be, ad, — c	ce, ad, b
ab, de, c	ad, ce, b	bc, de, a	be, cd, a	ce, bd, — a
ac, bd, — e	ae, bc, — d	bd, ac, — e	cd, ab, e	de, ab, c
ac, be, d	ae, bd, c	bd, ae, c	cd, ae, — b	de, ac, — b
ac, de, — b	ae, cd, — b	bd, ce, — a	cd, be, a	de, bc, a.

Satz. Wenn A **und A von gleicher Klasse sind, ebenso** B **und** 231.
B, $\mathit{\Gamma}$ **und C u. s. w.,** M **aber von gleicher oder niederer Klasse ist wie M und** $\overset{n}{[}\mathbf{AB}\cdots\mathbf{LM}] \gtrless 0$ **ein Enflach von Grösen erster Klasse ist, auch** $\overset{n}{[}\mathbf{A}_a\mathbf{B}_b\cdots\cdots\mathbf{L}_l\mathbf{M}_m]$ **dieselben Grösen erster Klasse als Fache oder Faktoren enthält wie** $\overset{n}{[}\mathbf{AB}\cdots\mathbf{LM}]$**, nur in anderer Folge, und zwar in der Art, dass beide Zeuge einander gleich sind, auch ferner** $\mathbf{A}_a$ **oben so viel Grösen erster Klasse als Fache oder Faktoren enthält wie A,** $\mathbf{B}_b$ **wie B u. s. w., so ist**

$$\overset{n}{[}\mathbf{AB}\cdots\mathbf{LM}\overline{(\mathit{AB}\cdots\mathit{\Lambda M})}] = \mathrm{S}\overset{n}{[}\mathbf{A}_a\overline{\mathit{A}}(\mathbf{B}_b\overline{\mathit{B}})\cdots(\mathbf{L}_l\overline{\mathit{\Lambda}})(\mathbf{M}_m\overline{\mathit{M}})].$$

Beweis. Für zwei Fache oder Faktoren ist der Satz bereits in 229 bewiesen, denn es ist nach 229

$$\overset{n}{[}AB\overline{(\mathit{AB})}] = \overset{n}{[}A\overline{\mathit{A}}(B\overline{\mathit{B}})] + \overset{n}{[}A_1\overline{\mathit{A}}(B_1\overline{\mathit{B}})] + \cdots$$
$$= \mathrm{S}\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})].$$

Wendet man diesen Satz wiederholt an, so kommt man zu dem Satze für beliebig viele Fache oder Faktoren. Zunächst nämlich kann man das Zeug oder Produkt $\overset{n}{[}AB\cdots\cdots LM]$ als aus den zwei Fachen oder Faktoren A und $\overset{n}{[}BC\cdots LM]$ bestehend ansehen. Dann wird

$$\overset{n}{[}AB\cdots LM\overline{(}\mathit{AB}\cdots\mathit{AM})] = \overset{n}{[}A(BC\cdots LM)\overline{(}\mathit{A}(\mathit{B\Gamma}\cdots\mathit{AM})]$$

$$= S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(BC\cdots LM)_b\overline{(}\mathit{B\Gamma}\cdots\mathit{AM})].$$

Der gefundene Ausdruck ist aus demſelben Grunde wieder

$$= S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})(CD\cdots LM)_c\overline{(}\mathit{\Gamma\Delta}\cdots\mathit{AM})],$$

und ſetzt man dies fort, ſo erhält man zuletzt

$$= S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})\cdots(L_l\overline{\mathit{\Lambda}})(M_m\overline{\mathit{M}})].$$

232. **Satz. Wenn in dem Innenzeuge oder innern Produkte $\overset{n}{[}AB\cdots\overline{(}\mathit{AB}\cdots)]$ die Grösen A und A von gleicher Klasse ſind, ebenſo B und B und ſo fort, ſo ist**

$$\overset{n}{[}AB\cdots\overline{(}\mathit{AB}\cdots)] = \frac{\overset{n}{[}A'B'\cdots]}{\overset{n}{[}AB\cdots]},$$

wo $A' = S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}A_a]$, $B' = S\overset{n}{[}B_b\overline{\mathit{B}}B_b]$ u. ſ. w., und wo die A_a die Geschiedsflache aus den einfachen Fachen oder Faktoren des Enflaches $\overset{n}{[}AB\cdots]$ zur ſo vielten Klasse ſind, als die Klasse von A beträgt und entsprechend die B_b u. ſ. w.

Beweis. Nach 231 ist

$$\overset{n}{[}AB\cdots\overline{(}\mathit{AB}\cdots)] = S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})\cdots], \text{ wo}$$

$$\overset{n}{[}A_aB_b\cdots] = \overset{n}{[}AB\cdots] \text{ ist.}$$

Da nun A mit A von gleicher Klasse ist, alſo auch A_a mit A, ſo ist nach 195 $\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}]$ eine Zahl und aus gleichem Grunde $\overset{n}{[}B_b\overline{\mathit{B}}]$, u. ſ. w. Folglich ist

$$S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})\cdots] = S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})\cdots]\overset{n}{[}A_aB_b\cdots] : \overset{n}{[}A_aB_b\cdots].$$

Alſo, da $\overset{n}{[}A_aB_b\cdots]$ gleich $\overset{n}{[}AB\cdots]$ ist,

$$= S\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}(B_b\overline{\mathit{B}})\cdots]\overset{n}{[}A_aB_b\cdots] . \overset{n}{[}AB\cdots].$$

Oder, da nach 71 die Zahlfache beliebigen Fachen eines Zeuges zugeordnet werden können,

$$= S(\overset{n}{[}A_a\overline{\mathit{A}}]A_a\cdots\overset{n}{[}B_b\overline{\mathit{B}}]B_b\cdots) : \overset{n}{[}AB\cdots].$$

Hier enthält nach 231 in jedem Zeuge $\overset{n}{[}A_aB_b\cdots]$ A_a andere Fache erster Klasse als B_b, u. ſ. w. Da nun aber die Zeuge, in denen A_a, B_b, ⋯ gleiche Fache erster Klasse enthalten, null ſind, ſo können wir dieſe Zeuge zu dem obigen Ausdrucke hinzufügen, und erhalten dann nach 75 den Ausdruck

$$= \overset{n}{[}(S\overset{n}{[}A_r\overline{\mathit{A}}A_r])(S\overset{n}{[}B_r\overline{\mathit{B}}B_r])\cdots] : \overset{n}{[}AB\cdots],$$

$$\text{d. h.} = \frac{\overset{n}{[}A'B'\cdots]}{\overset{n}{[}AB\cdots]}.$$

Satz. Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Grösen m ter 233.
Klasse $A = abc\cdots$ und $B = a'b'c'\cdots$, deren jede aus m einfachen Fachen besteht, ist gleich der Flachtausche oder Determinante ($\varDelta$) aus m Reihen von je m Gliedern, die man erhält, wenn man nach der Ordnung jeden einfachen Fach von A mit jedem von B zu einem Innenzeuge knüpft, d. h. es ist

$$\overset{n}{[}abc\cdots\overline{(a'b'c'\cdots)}] = \varDelta \left| \begin{array}{llll} \overset{n}{[}a\overline{a'}], & \overset{n}{[}a\overline{b'}], & \overset{n}{[}a\overline{c'}], & \cdots \\ \overset{n}{[}b\overline{a'}], & \overset{n}{[}b\overline{b'}], & \overset{n}{[}b\overline{c'}], & \cdots \\ \overset{n}{[}c\overline{a'}], & \overset{n}{[}c\overline{b'}], & \overset{n}{[}c\overline{c'}], & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right.$$

$$= S \mp (\alpha_a\beta_b\gamma_c\cdots),$$

wo $\alpha_1 = \overset{n}{[}a\overline{a'}],\ \alpha_2 = \overset{n}{[}a\overline{b'}],\ \alpha_3 = \overset{n}{[}a\overline{c'}],\cdots$

$\beta_1 = \overset{n}{[}b\overline{a'}],\ \beta_2 = \overset{n}{[}b\overline{b'}],\ \beta_3 = \overset{n}{[}b\overline{c'}],\cdots$

$\gamma_1 = \overset{n}{[}c\overline{a'}],\ \gamma_2 = \overset{n}{[}c\overline{b'}],\ \gamma_3 = \overset{n}{[}c\overline{c'}],\cdots$

u. s. w.

Beweis. Nach 232 ist

$$\overset{n}{[}abc\cdots\overline{(a'b'c'\cdots)}] = \frac{\overset{n}{[}a_1b_1c_1\cdots]}{\overset{n}{[}abc\cdots]},$$

wo $a_1 = \overset{n}{[}a\overline{a'}a] + \overset{n}{[}b\overline{a'}b] + \overset{n}{[}c\overline{a'}c] + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots$

$b_1 = \overset{n}{[}a\overline{b'}a] + \overset{n}{[}b\overline{b'}b] + \overset{n}{[}c\overline{b'}c] + \cdots = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots$

$c_1 = \overset{n}{[}a\overline{c'}a] + \overset{n}{[}b\overline{c'}b] + \overset{n}{[}c\overline{c'}c] + \cdots = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \cdots$

$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$

ist. Aber nach 98 ist $\overset{n}{[}a_1b_1c_1\cdots]$

$= \overset{n}{[}(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots)(\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots)(\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \cdots)\cdots]$

$= \varDelta_\alpha^m \overset{n}{[}abc\cdots] = S \mp (\alpha_a\beta_b\gamma_c\cdots)\overset{n}{[}abc\cdots].$

Also

$$\overset{n}{[}abc\cdots\overline{(a'b'c'\cdots)}] = \frac{\overset{n}{[}a_1b_1c_1\cdots]}{\overset{n}{[}abc\cdots]} = \frac{S \mp (\alpha_a\beta_b\gamma_c\cdots)\overset{n}{[}abc\cdots]}{\overset{n}{[}abc\cdots]}$$

$$= S \mp (\alpha_a\beta_b\gamma_c\cdots),$$

234. **Satz.** $\overset{n}{[}a\overline{b}\,\overline{(a'b')}] = \overset{n}{[}a\overline{a'}(b\overline{b'})] - \overset{n}{[}a\overline{b'}(a'\overline{b})]$.

235. **Satz.** $\overset{n}{[}ab]^2 = a^2b^2 - \overset{n}{[}a\overline{b}]^2$.

236. **Satz.** $\overset{n}{[}abc]^2 = a^2b^2c^2 - a^2\overset{n}{[}b\overline{c}]^2 - b^2\overset{n}{[}c\overline{a}]^2 - c^2\overset{n}{[}a\overline{b}]^2 + 2\overset{n}{[}a\overline{b}(b\overline{c})(c\overline{a})]$.

237. **Satz.** $$\overset{n}{[}abcd]^2 = \varDelta \begin{vmatrix} a^2, & \overset{n}{[}a\overline{b}], & \overset{n}{[}a\overline{c}], & \overset{n}{[}a\overline{d}] \\ \overset{n}{[}b\overline{a}], & b^2, & \overset{n}{[}b\overline{c}], & \overset{n}{[}b\overline{d}] \\ \overset{n}{[}c\overline{a}], & \overset{n}{[}c\overline{b}], & c^2, & \overset{n}{[}c\overline{d}] \\ \overset{n}{[}d\overline{a}], & \overset{n}{[}d\overline{b}], & \overset{n}{[}d\overline{c}], & d^2. \end{vmatrix}$$

Die Sätze 234 bis 237 folgen unmittelbar aus 233, wenn man beachtet, dass nach 177 $a'\overline{b} = \overline{a'}b$ u. s. w.

238. **Satz.** $\overset{n}{[}ab\overline{c}] = \overset{n}{[}a\overline{c}b] - \overset{n}{[}b\overline{c}a]$.

239. **Satz.** $\overset{n}{[}abc\overline{d}] = \overset{n}{[}a\overline{d}(bc)] + \overset{n}{[}b\overline{d}(ca)] + \overset{n}{[}c\overline{d}(ab)]$.

240. **Satz.** $\overset{n}{[}abcd\overline{e}] = \overset{n}{[}a\overline{e}(bcd)] + \overset{n}{[}b\overline{e}(cad)] + \overset{n}{[}c\overline{e}(abd)] + \overset{n}{[}d\overline{e}(cba)]$.

Die Sätze 238 bis 240 folgen wieder unmittelbar aus 231 oder 233, wenn man in 238 c, in 239 d und in 240 e als zweiten Fach des innern Zeuges oder Produktes $\overset{n}{[}A\overline{B}]$ betrachtet und diesem Fache noch 1 als zweiten Fach zufügt und demnächst beachtet, dass nach den Gesetzen der Flachung

$$\overset{n}{[}ab] = -\overset{n}{[}ba],\ \overset{n}{[}a(bc)] = \overset{n}{[}b(ca)] = \overset{n}{[}c(ab)] \text{ und}$$
$$\overset{n}{[}a(bcd)] = \overset{n}{[}b(cad)] = \overset{n}{[}c(abd)] = \overset{n}{[}d(cba)] \text{ ist.}$$

241. **Satz. Wenn man aus einer Reihe von n Grösen erster Klasse $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Geschiedsflache (multiplikativen Komplexionen) $A, A_1, \cdots$ zu irgend einer Klasse (der m ten) bildet, und jedes derselben mit dem ergänzenden Geschiedsflache $B, B_1, \cdots$ zu einem Innenzeuge oder innern Produkte knüpft, so ist die Summe dieser Zeuge null, d. h. es ist**

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] + \overset{n}{[}A_1\overline{B}_1] + \cdots = 0.$$

Beweis. 1. Es sei zuerst angenommen $m \geqq n - m$. Der Fach A hat als Geschiedsflach (multiplikative Komplexion) von $a_1, \cdots a_n$ die Form

$$A = \overset{n}{[}a_r a_s \cdot \cdots \cdots a_z],$$

wo $r, s, \cdots z$ beliebige m verschiedene unter den Zahlen $1 \cdots n$ sind. Der Fach B muss als ergänzendes Geschiedsflach zu A diejenigen $n - m$ unter den Grösen $a_1 \cdots a_n$ als Fache enthalten, welche unter den Grösen $a_r, a_s, \cdots a_z$ nicht vorkommen. Es seien dies $a_{r'}, a_{s'}, \cdots a_{u'}$;

ſo dass alſo $B = (-1)^p \overset{n}{[} a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]$ ist. Ferner muss das durch $(-1)^p$ angedeutete Vorzeichen nach 229 ſo bestimmt werden, dass $\overset{n}{[}AB] = \overset{n}{[}a_1 \cdots a_n]$ wird, d. h. dass

$$(-1)^p \overset{n}{[} a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}] = \overset{n}{[} a_1 a_2 \cdots a_n] \text{ ist. Von} \tag{a}$$

gleicher Form ſind die ſämmtlichen übrigen Zeuge $\overset{n}{[}A_1 \overline{B}_1]$ u. ſ. w. Sollen die Geschiedsflache A, B, A_1, B_1, $\cdots$ wohlgeordnete ſein, ſo hat man noch die Bedingungen hinzuzufügen, dass $r < s < \cdots < u < v < \cdots < z$ und $r' < s' < \cdots < u'$ ſei. Fügen wir dieſe Bedingung hinzu, ſo wird

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] + \overset{n}{[}A_1\overline{B}_1] + \cdots = S(-1)^p \overset{n}{[} a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z \overline{(a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'})}].$$

Fassen wir hier $a_v \cdots a_z$ zu einem Fache oder Faktor zuſammen und fügen dem zweiten Fache des Innenzeuges an letzter Stelle noch den Fach 1 hinzu, ſo wird die Bedingung von 231 erfüllt, alſo wird der obige Ausdruck

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] + \overset{n}{[}A_1\overline{B}_1] + \cdots = S(-1)^p \overset{n}{[} a_r \overline{a}_{r'} (a_s \overline{a}_{s'}) \cdots (a_u \overline{a}_{u'}) (a_v a_w \cdots a_z)], \tag{b}$$

wobei noch die Gleichung (a) bestehen bleibt, und auch die Bedingungen $r' < s' < \cdots < u'$ und $v < w < \cdots < z$ geltend bleiben, hingegen die Bedingung, dass $r < s < \cdots < u$ ſei, wegfällt, und die Summe ſich auf alle unter jenen Bedingungen möglichen Glieder bezieht.

In dieſer Summe ſind nun alle Glieder parweiſe einander entgegengeſetzt und heben ſich alſo. Sei nämlich

$$(-1)^p \overset{n}{[} a_r \overline{a}_{r'} (a_s \overline{a}_{s'}) \cdots (a_u \overline{a}_{u'}) (a_v a_w \cdots a_z)]$$

eines dieſer Glieder, wo die Zeiger bestimmte (von einander verschiedene) Werte haben, die den obigen Bedingungen genügen, und wo nach dem Obigen p einen ſolchen Wert hat, dass die Gleichung (a) erfüllt wird. Da die Zeiger r, r′, s, s′, $\cdots$ u, u′ alle von einander verschieden ſind, ſo wird irgend einer der kleinste unter ihnen ſein müssen, dies ſei r, ſein Flach $\overset{n}{[} a_r \overline{a}_{r'}]$. Dies angenommen, vertausche man r und r′ und ändere das Zeichen, ſo erhält man einen Ausdruck

$$(-1)^{p+1} \overset{n}{[} a_{r'} \overline{a}_r (a_s \overline{a}_{s'}) \cdots (a_u \overline{a}_{u'}) (a_v a_w \cdots a_z)], \tag{c}$$

ſo ſoll gezeigt werden, dass auch dieſer Ausdruck gleichfalls als Glied in der obigen Summe (b) vorkommt. Sollte der Zeiger r gröser ſein als s′, ſo gebe man dem Flache $\overset{n}{[} a_{r'} \overline{a}_r]$ unter den übrigen Flachen $\overset{n}{[} a_s \overline{a}_{s'}] \cdots \overset{n}{[} a_u \overline{a}_{u'}]$ eine ſolche Stellung, dass die Bedingung erfüllt wird, vermöge welcher der zweite Zeiger in jedem dieſer Flache kleiner ſein

ſoll als der zweite Zeiger des nächst folgenden Flaches. Es werde dieſe Bedingung erfüllt, wenn man das Flach $\overset{n}{[}a_{r'}\overline{a_r}]$ um d Stellen nach rechts rückt, was gestattet ist, da alle dieſe Flache Zahlen ſind. Es ist nun noch zu beweiſen, dass auch die durch Gleichung (a) ausgedrückte Bedingung für das ſo hervorgehende Glied gilt, d. h. dass ſie noch bestehen bleibt, wenn man in ihr $p+1$ statt p ſetzt, auf der linken Seite $a_{r'}$ mit a_r vertauscht und dieſe beiden Fache um d Stellen nach rechts rückt. Das Zeug, welches auf dieſe Weiſe aus $(-1)^p\overset{n}{[}a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]$ hervorgeht, heiſse D; ſo ist

$$D = (-1)^{p+1}\overset{n}{[}a_{r'} a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_r a_{s'} \cdots a_{u'}].$$

Denn man kann in dieſem Flache D die Faktoren a_r und $a_{r'}$ gleichzeitig wieder um d Stellen zurückrücken, ohne dass ſich nach 89 der Wert des Flaches ändert. Ferner ist der letzte Ausdruck nach 88, wenn man a_r und $a_{r'}$ vertauscht,

$$D = -(-1)^{p+1}\overset{n}{[}a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]$$

$$= (-1)^p\overset{n}{[}a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]$$

$$= \overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_n] \qquad \text{(nach a).}$$

Alſo ist jener Ausdruck (c) allen Bedingungen unterworfen, denen die Glieder der Summe (b) unterworfen ſind, ist alſo, da jene Summe alle Glieder enthält, die jenen Bedingungen genügen, ſelbst ein Glied jener Summe. Dies Glied hebt ſich nun mit dem zuerst betrachteten Gliede auf; denn

$$(-1)^p\overset{n}{[}a_r\overline{a_{r'}}(a_s\overline{a_{s'}})\cdots(a_u\overline{a_{u'}})(a_v a_w \cdots a_z)]$$

$$+ (-1)^{p+1}\overset{n}{[}a_{r'}\overline{a_r}(a_s\overline{a_{s'}})\cdots(a_u\overline{a_{u'}})(a_v a_w \cdots a_z)] = 0,$$

da $(-1)^{p+1} = -(-1)^p$ ist und $\overset{n}{[}a_{r'}\overline{a_r}] = \overset{n}{[}a_r\overline{a_{r'}}]$ ist nach 197. Auf gleiche Weiſe findet ſich zu jedem Gliede jener Summe ein ihm zugepartes, welches ſich mit ihm aufhebt; alſo ist jene Summe null, alſo auch das dieſer Summe gleiche

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] + \overset{n}{[}A_1\overline{B_1}] + \cdots = 0.$$

2. Wenn $m < n - m$ ist, ſo ist nach 192, wenn noch $m(n-m-1) = c$ geſetzt wird,

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] + \overset{n}{[}A_1\overline{B_1}] + \cdots = (-1)^c\,\overline{\overset{n}{[}B\overline{A}]} + (-1)^c\,\overline{\overset{n}{[}B_1\overline{A_1}]} + \cdots$$

$$= (-1)^c\,\overline{(\overset{n}{[}B\overline{A}] + \overset{n}{[}B_1\overline{A_1}] + \cdots)} \qquad (148).$$

Hier ist nach Beweis 1 die in Klammer geschlossene Summe 0, alſo

$$\overset{n}{[}A\overline{B}] + \overset{n}{[}A_1\overline{B_1}] + \cdots = (-1)^c\,\overline{(0)} = 0 \qquad (127),$$

Satz. $\overset{n}{[}ab\overline{(cd)}] + \overset{n}{[}ac\overline{(db)}] + \overset{n}{[}ad\overline{(bc)}] = 0.$ 242.

Satz. $\overset{n}{[}ab\overline{c}] + \overset{n}{[}bc\overline{a}] + \overset{n}{[}ca\overline{b}] = 0.$ 243.

Satz. $\overset{n}{[}abc\overline{d}] - \overset{n}{[}bcd\overline{a}] + \overset{n}{[}cda\overline{b}] - \overset{n}{[}dab\overline{c}] = 0.$ 244.

Der Satz 242 folgt unmittelbar aus 241. Die Sätze 243 bis 244 folgen ebenſo, wenn man im ergänzenden Geschiedsflache ſtatt der Grösen a, b, c, d das Flach derſelben mit 1 ſetzt.

Satz. Wenn man aus einer Reihe von 4m Grösen erster Stufe 245.
$a_1 \cdots a_{4m}$ die ſämmtlichen Geschiedsflache (multiplikativen Komplexionen) A, B, C,$\cdots$ zur 2m ten Klasse, welche eine dieſer Grösen, z. B. a_1 enthalten, bildet, und jede derſelben mit den ergänzenden Geschiedsflachen A′, B′, C′,$\cdots$ zu einem Innenzeuge knüpft, ſo ist die Summe dieſer Zeuge null, d. h.

$$\overset{n}{[}A\overline{A'}] + \overset{n}{[}B\overline{B'}] + \cdots = 0.$$

Beweis. Da A, B,$\cdots$ die ſämmtlichen a_1 enthaltenden Geschiedsflache aus 4m Elementen zur 2m ten Klasse ſind, ſo ſind ihre ergänzenden Geschiedsflache A′, B′,$\cdots$ die ſämmtlichen Geschiedsflache aus denſelben Grösen erster Klasse zu derſelben Klasse, welche a_1 nicht enthalten. Ferner, da die Klassen von A, B,$\cdots$A′, B′,$\cdots$ gerade ſind, ſo ist nach 89 auch $\overset{n}{[}AA'] = \overset{n}{[}A'A]$, und alſo nach 229, wenn A′ das ergänzende Geschiedsflach von A ist, auch A das ergänzende Geschiedsflach von A′, und ebenſo B das von B′, mithin nach 241

$$\overset{n}{[}A\overline{A'}] + \overset{n}{[}B\overline{B'}] + \cdots + \overset{n}{[}A'\overline{A}] + \overset{n}{[}B'\overline{B}] + \cdots = 0.$$

Aber nach 197 ist $\overset{n}{[}A\overline{A'}] = \overset{n}{[}A'\overline{A}]$, $\overset{n}{[}B\overline{B'}] = \overset{n}{[}B'\overline{B}] \cdots$.
Alſo

$$2\overset{n}{[}A\overline{A'}] + 2\overset{n}{[}B\overline{B'}] + \cdots = 0, \text{ d. h.}$$

$$\overset{n}{[}A\overline{A'}] + \overset{n}{[}B\overline{B'}] + \cdots = 0.$$

16. Die Winkelfolgen der Innenzeuge.

Erklärung. Der Winkel AB (Zeichen ∠ AB) heist der 246.
Winkel zwischen 0 und π, dieſe miteingeschlossen, dessen Cosinus gleich dem durch die Zahlwerte α und β der Grösen A und B geteilten Innenzeuge oder innern Produkte jener Grösen A und B ist, ſofern A und B gleicher Klasse und ungleich Null ſind, d. h. es ist

$$\cos \angle AB = \frac{\overset{n}{[}A\overline{B}]}{\alpha\beta} \qquad \angle AB = \mathbf{M}[0, \pi].$$

Der Sinus $\overset{n}{[abc\cdots]}$, wo a, b, c,·· Grösen erster Stufe, $\alpha, \beta, \gamma,\cdots$ ihre Zahlwerte und der Sinus nicht eine Strichgröse (nicht negativ) ist, ist der Ausdruck, welcher dem Zahlwerte nach gleich $\frac{\overset{n}{[abc\cdots]}}{\alpha\beta\gamma}$ ist, d. h. es ist

$$(\sin\overset{n}{[abc\cdots]})^2 = \frac{\overset{n}{[abc\cdots]}^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \qquad \sin\overset{n}{[abc\cdots]} \geqq 0.$$

247. **Satz. Wenn a, b Grösen erster Klasse ſind, ſo ist**

$$\sin\overset{n}{[ab]} = \sin\angle ab.$$

Beweis. Nach 246 ist

$$(\sin\overset{n}{[ab]})^2 = \frac{\overset{n}{[ab]}^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 - \overset{n}{[a\bar{b}]}^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad (235)$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 - \overset{n}{[a\bar{b}]}^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad (200)$$

$$= 1 - \left[\frac{\overset{n}{a\bar{b}}}{\alpha\beta}\right]^2$$

$$= 1 - (\cos\angle ab)^2 \qquad (246)$$

$$= (\sin\angle ab)^2.$$

Und da nach der Erklärung 246 $\sin\overset{n}{[ab]}$ nie eine Strichgröse (nie negativ) und $\angle$ ab ein Winkel zwischen 0 und π, alſo sin $\angle$ **ab** auch nicht eine Strichgröse ist, ſo folgt aus $(\sin\overset{n}{[ab]})^2 = (\sin\angle ab)^2$, auch $\sin\overset{n}{[ab]} = \sin\angle ab$.

248. **Satz.** $\overset{n}{[A\bar{B}]} = \alpha\beta\cos\angle AB$, **wenn A und B von gleicher Klasse und α und β ihre Zahlwerte ſind.**

Beweis. Unmittelbar aus 246.

249. **Satz.** $\overset{n}{[ab]}^2 = (\alpha\beta\sin\angle ab)^2$, **wo α und β die Zahlwerte von a und b ſind.**

Beweis. Nach 235 ist

$$\overset{n}{[ab]}^2 = \alpha^2\beta^2 - \overset{n}{[a\bar{b}]}^2$$
$$= \alpha^2\beta^2 - (\alpha\beta\cos\angle ab)^2 \qquad (248)$$
$$= \alpha^2\beta^2(1 - (\cos\angle ab)^2)$$
$$= \alpha^2\beta^2(\sin\angle ab)^2.$$

In dieſen Formeln tritt der Gegenſatz zwischen dem äusern und innern Zeuge in einfachster Gestalt hervor. Während das innere Zeug oder **Produkt** zweier Grösen erster Klasse $\overset{n}{[a\bar{b}]}$ gleich dem Zeuge der Zahlwerte in den **cosinus** des Zwischenwinkels ist, ſo ist das äusere Zeug oder Produkt derſelben **Grösen**,

abgesehen vom $\mp$ Zeichen, gleich dem Zeuge der Zahlwerte in den sinus des Zwischenwinkels.

Satz. $\overset{n}{[}ab\overline{(cd)}] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin\angle ab)(\sin\angle cd)\cos\angle ab(cd)$, **wenn** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ **die Zahlwerte von a, b, c, d sind.** 250.

Beweis. Der Zahlwert von $\overset{n}{[}ab]$ ist $(\overset{n}{[}ab]^2)^{1/2}$ und der von $\overset{n}{[}cd]$ ist $(\overset{n}{[}cd]^2)^{1/2}$, also ist nach 248

$$\overset{n}{[}ab\overline{(cd)}] = (\overset{n}{[}ab]^2\overset{n}{[}cd]^2)^{1/2}(\cos\angle ab(cd))$$

$$= \overset{n}{[}(\alpha\beta\sin\angle ab)^2(\gamma\delta\sin\angle cd)^2]^{1/2}\cos\angle ab(cd) \quad (249).$$

Aber da das Zeug $\alpha\beta(\sin\angle ab)\gamma\delta(\sin\angle cd)$ ein Pluswert oder positiv ist, so hebt sich das fortschreitende Erhöhen dieser Grösen durch 2 und $^1/_2$ auf, und es wird

$$\overset{n}{[}ab\overline{(cd)}] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin\angle ab)(\sin\angle cd)\cos\angle ab(cd).$$

Satz. Die normige Zurückleitung von A auf eine Gröse gleicher Klasse B ist im Zahlwerte gleich A cos $\angle$ AB. 251.

Beweis. Wenn A′ die normige Zurückleitung von A auf B ist, so ist nach 215

$$A' = \frac{\overset{n}{[}A\overline{B}]B}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta(\cos\angle AB)\cdot B}{\beta^2} \quad (248)$$

$$= \alpha(\cos\angle AB)\cdot\frac{B}{\beta},$$ also im Zahlwerte $= A\cos\angle AB$.

Satz. Wenn a, b, c, $\cdots$ zu einander normig sind, so ist für jede aus ihnen hörig, d. h. als Vielfachensumme derselben darstellbare Gröse k 252.

$$\frac{k}{x} = \frac{a}{\alpha}\cos\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos\angle bk + \cdots,$$

wo $x, \alpha, \beta, \cdots$ **die Zahlwerte von k, a, b, $\cdots$ sind.**

Beweis. Es sei $k = xa + yb + \cdots$, so erhalten wir durch innere Webung oder Multiplikation mit a, weil $\overset{n}{[}b\overline{a}]$ u. s. w. null sind,

$$\overset{n}{[}a\overline{k}] = x\overset{n}{[}a\overline{a}] = x\alpha^2 \quad (200),$$

mithin $$x = \frac{\overset{n}{[}a\overline{k}]}{\alpha^2} = \frac{\alpha x\cos\angle ak}{\alpha^2} \quad (248)$$

$$= \frac{x}{\alpha}\cos\angle ak.$$

Aus gleichem Grunde ist $y = \frac{x}{\beta}\cos\angle bk$ u. s. w. Diese Werte von $x, y, \cdots$ in die obige Formel eingesetzt, giebt

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha}(\cos\angle ak)\cdot a + \frac{\varkappa}{\beta}(\cos\angle bk)\cdot b + \cdots, \text{ d. h.}$$

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha}\cos\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos\angle bk + \cdots.$$

253. **Satz. Wenn a, b, c,··· zu einander normig und k und l zu ihnen hörig, d. h. als Vielfachenſummen derſelben darstellbar ſind, ſo ist**

$$\cos\angle kl = (\cos\angle ak)\cos\angle al + (\cos\angle bk)\cos\angle bl + \cdots.$$

Beweis. Nach 246 ist, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \varkappa, \lambda$ die Zahlwerte von a, b, c,···k, l ſind,

$$\cos\angle kl = \frac{\overset{n}{[k\overline{l}]}}{\varkappa\lambda} = \overset{n}{\left[\frac{k}{\varkappa}\overline{\left(\frac{l}{\lambda}\right)}\right]} = \overset{n}{\left[\left(\frac{a}{\alpha}\cos\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos\angle bk + \cdots\right)\right.}$$
$$\left.\overline{\left(\frac{a}{\alpha}\cos\angle al + \frac{b}{\beta}\cos\angle bl + \cdots\right)}\right] \quad (252)$$

$$= \frac{a^2}{\alpha^2}(\cos\angle ak)\cos\angle al + \frac{b^2}{\beta^2}(\cos\angle bk)\cos\angle bl + \cdots,$$

weil $\overset{n}{[a\overline{b}]}$ u. ſ. w. null ſind. Da nun $a^2 = \alpha^2$, $b^2 = \beta^2$, u. ſ. w., ſo erhält man

$$\cos\angle kl = (\cos\angle ak)\cos\angle al + (\cos\angle bk)\cos\angle bl + \cdots.$$

254. **Satz. Statt eine Gröse erster Klasse k auf eine andere l zurückzuleiten, kann man jene zuerst auf die Grösen eines Normvereins zurückleiten und dann die ſo erhaltenen Zurückleitungen auf l zurückleiten, und dieſe letzten Zurückleitungen zufügen oder addiren, vorausgeſetzt, dass hierbei alle Zurückleitungen normig ſind.**

Beweis. Es ist dieſer Satz nur ein anderer Ausdruck für das in Satz 253 Bewieſene.

255. **Satz. Wenn a, b,··· zu einander normig und k und l zu ihnen hörig, d. h. als Vielfachenſummen derſelben darstellbar und gleichfalls zu einander normig ſind, ſo ist**

$$0 = (\cos\angle ak)\cos\angle al + (\cos\angle bk)\cos\angle bl + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht unmittelbar aus 253 hervor, wenn man $\angle kl = 90^0$ ſetzt.

256. **Satz. Wenn a, b,··· zu einander normig ſind, ſo ist für jedes zu ihnen hörige, oder als Vielfachenſumme derſelben darstellbare k**

$$1 = (\cos\angle ka)^2 + (\cos\angle kb)^2 + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht unmittelbar aus 253 hervor, wenn man $l = k$ ſetzt.

257. **Satz. Wenn $a + b + \cdots = 0$ ist, und $\alpha, \beta, \cdots$ die Zahlwerte von a, b,··· ſind, ſo ist**

a) $\alpha : \beta : \cdots = \sin a' : \sin b' : \cdots,$

wo a′, b′,·· die zu a, b,··· ergänzenden Geschiedsflache aus a, b,··· ſind,

b) $\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \cdots = 0,$

wo x eine beliebige Gröse ist,

c) $(\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \cdots = 0.$

Beweis. 1. Modelt man die Gleichung

$$a + b + \cdots = 0$$

mit $\overset{n}{[}cd\cdots]$, ſo erhält man, da alle andern Glieder zwei gleiche Fache enthalten und alſo null werden,

$$\overset{n}{[}acd\cdots] + \overset{n}{[}bcd\cdots] = 0, \text{ alſo } \overset{n}{[}acd\cdots]^2 = \overset{n}{[}bcd\cdots]^2,$$

wo $\overset{n}{[}acd\cdots]$ das Enflach aller Grösen a, b, c,···, mit Ausnahme von b und $\overset{n}{[}bcd\cdots]$ das Enflach aller Grösen, mit Ausnahme von a ist. Somit ist nach 246

$$(\alpha\gamma\delta\cdots)^2(\sin\overset{n}{[}acd\cdots])^2 + (\beta\gamma\delta\cdots)^2(\sin\overset{n}{[}bcd\cdots])^2 = 0,$$

oder $$\alpha^2(\sin\overset{n}{[}acd\cdots])^2 = \beta^2(\sin\overset{n}{[}bcd\cdots])^2.$$

Nun ist $\overset{n}{[}cad\cdots]$ das ergänzende Geschiedsflach zu b, alſo $= b'$, und $\overset{n}{[}bcd\cdots]$ das ergänzende zu a, alſo $= a'$, alſo $\sin b' = \sin\overset{n}{[}cad\cdots]$ und $\sin a' = \sin\overset{n}{[}bcd\cdots]$, alſo, da α, β, $\sin a'$, $\sin b'$ Pluswerte ſind,

$$\alpha \sin b' = \beta \sin a', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \sin a' : \sin b';$$

und ſomit allgemein

$$\alpha : \beta : \cdots = \sin a' : \sin b' : \cdots.$$

2. Webt oder multiplizirt man die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ innerlich mit einer beliebigen, von null verschiedenen Gröse erster Stufe x, ſo erhält man

$$\overset{n}{[}a\bar{x}] + \overset{n}{[}b\bar{x}] + \cdots = 0,$$

alſo wenn ξ der Zahlwert von x ist, ſo ist

$$\alpha\xi \cos \angle ax + \beta\xi \cos \angle bx + \cdots = 0, \text{ d. h.}$$

$$\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \cdots = 0.$$

3. Setzt man in die ſo erhaltene Gleichung die vorher gewonnenen Werte von $\alpha : \beta : \gamma : \cdots$ ein, ſo erhält man

$$(\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \cdots = 0.$$

Die erste Formel des Satzes enthält für drei Grösen den bekannten Satz dass im Dreiecke die Seitenlängen ſich wie die sinus der Gegenwinkel verhalten. Alle drei Formeln haben übrigens nur dann eine Bedeutung, wenn zwischen den Grösen a, b,··· keine andere Beziehung herrscht, als die durch die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ dargestellt ist, d. h. wenn die n Grösen a, b,··· in keinem Gebiete, von niederer als (n − 1)ter Stufe vereinigt ſind.

258. **Satz.** $(a+b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \angle ab + \beta^2$, **wo** α, β **die Zahlwerte von a, b find.**

Beweis. Unmittelbar aus 223, wenn man die Werte nach 248 nimmt.

259. **Satz.** $(a+b+c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos \angle bc + 2\gamma\alpha \cos \angle ca + 2\alpha\beta \cos \angle ab$, **wo** α, β, γ **die Zahlwerte von a, b, c find.**

Beweis. Unmittelbar aus 224.

260. **Satz.** $(\sin \angle AB)(\sin \angle \mathit{AB}) \cos \angle AB(\mathit{AB}) = S(\cos \angle A_r \mathit{A}) \cos \angle B_r \mathit{B}$, **wo** A_r **die Geschiedsflache aus den Grösen erster Klasse von** $\overset{n}{[}AB]$, **zur fo vielten Klasse, als die Klasse von A beträgt, und** B_r **die ergänzenden Geschiedsflache find.**

Beweis. Nach 228 ist

$$\overset{n}{[}AB\overline{(}\mathit{AB})] = S\overset{n}{[}A_\alpha\overline{\mathit{A}}]\overset{n}{[}B_\alpha\overline{\mathit{B}}]$$

Die Zahlwerte von A, B, A und B feien α, β, γ, δ, die Zahlwerte von $\overset{n}{[}AB]$ und von $\overset{n}{[}A_\alpha B_\alpha]$ find nach 228 einander gleich. Nach 250 ist dann die erste Seite

$$\overset{n}{[}AB\overline{(}\mathit{AB})] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle AB)(\sin \angle \mathit{AB}) \cos \angle AB(\mathit{AB})$$

und nach 248 ist die zweite Seite

$$S\overset{n}{[}A_\alpha\overline{\mathit{A}}(B_\alpha\overline{\mathit{B}})] = \alpha\beta\gamma\delta S(\cos \angle A_\alpha\mathit{A}) \cos \angle B_\alpha\mathit{B},$$

mithin ist

$$(\sin \angle AB)(\sin \angle \mathit{AB}) \cdot \cos \angle AB(\mathit{AB}) = S(\cos \angle A_\alpha\mathit{A}) \cos \angle B_\alpha\mathit{B}$$

261. **Satz.** $(\sin\overset{n}{[}abc\cdots])(\sin\overset{n}{[}a'b'c'\cdots]) \cos \angle (abc\cdots a'b'c'\cdots)$

$$= \varDelta \begin{cases} \cos \angle aa', & \cos \angle ab', \cdots \\ \cos \angle ba', & \cos \angle bb', \cdots \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \end{cases}$$

Beweis. Nach 233 ist

$$\overset{n}{[}abc\cdots\overline{(}a'b'c'\cdots)] = \varDelta \begin{cases} a\overline{a'}, & a\overline{b'}, & a\overline{c'}, \cdots \\ b\overline{a'}, & b\overline{b'}, & b\overline{c'}, \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \end{cases}$$

mithin wenn man nach 250 und nach 248 die Werte einführt und beide Seiten durch die gleichen Zahlwerte teilt, fo folgt unmittelbar der Satz.

262. **Satz.**

$(\sin\overset{n}{[}ab])(\sin\overset{n}{[}cd]) \cos \angle ab(cd) = (\cos \angle ac) \cos \angle bd - (\cos \angle ad) \cos \angle bc.$

Beweis. Unmittelbar aus 234, wenn man die Werte nach 250 und 248 einführt.

Satz. 263.

$$(\sin\overset{n}{[}ab])(\sin\overset{n}{[}ac])\cos\angle ab(ac) = \cos\angle bc - (\cos\angle ac)\cdot\cos\angle ab.$$

Beweis. Unmittelbar aus 261, wenn man a und c statt c und d ſetzt, da $\cos\angle aa = \frac{\overset{n}{[}a\bar{a}]}{\alpha^2} = 1$ ist.

Der Satz enthält eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie.

Satz. $(\sin\angle ab)^2 = 1 - (\cos\angle ab)^2$. 264.

Satz. $(\sin\angle abc)^2 = 1 - (\cos\angle bc)^2 - (\cos\angle ac)^2 - (\cos\angle ab)^2$ 265.
$+ 2(\cos\angle ab)(\cos\angle bc)\cos\angle ca.$

Beweis. Unmittelbar aus 236, wenn man die Werte nach 249 und 248 einführt, da $\frac{a^2b^2c^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 1$ ist, wo α, β, γ die Zahlwerte von a, b, und c.

Satz. $(\sin\overset{n}{[}ab])(\sin\overset{n}{[}cd])\cos\angle ab(cd) + (\sin\overset{n}{[}ac])(\sin\overset{n}{[}bd])\cos\angle ac(bd)$ 266.
$+ (\sin\overset{n}{[}ad])(\sin\overset{n}{[}bc])\cos\angle ad(bc) = 0.$

Beweis. Unmittelbar aus 242.

Satz. $(\sin A)(\sin A')\cos\angle AA' + (\sin B)(\sin B')\cos\angle BB' + \cdots = 0$, 267.
wenn A, B, C, ·· die Geschiedsflache aus 4n Grösen erster Stufe zur 2n ten Klasse und A′, B′, C′, ·· deren ergänzende Geschiedsflache ſind.

Beweis. Unmittelbar aus 245.

Anhang:
Anwendung der Ausdehnungslehre zur Löfung der Gleichungen mit mehren Unbekannten.

268. **Satz. Wenn m Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten gegeben find von der Form**

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m = \nu_1$$
$$\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \cdots + \mu_2 x_m = \nu_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \cdots + \mu_m x_m = \nu_m,$$

fo ist

$$x_1 = \frac{\Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}, \qquad x_2 = \frac{\Delta^m(\alpha_a \nu_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)} \cdots\cdots$$

$$x_m = \frac{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \nu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \mu_m)},$$

wo a, b, c, ⋯ m fämmtlich einander ungleich find.

Beweis. Um eine Gleichung zu gewinnen, in welcher alle Unbekannten auser einer, z. B. x_1, verschwinden, bildet man neue Gleichungen, in denen stets nur die Vorzahlen einer Unbekannten vorkommen, indem man die Vorzahlen $\alpha_1, \beta_1, \cdots$ mit e_1, die $\alpha_2, \beta_2, \cdots$ mit e_2 u. f. w. vervielfacht, wo $\overset{m}{[e_1 e_2 \cdots e_m]} = 1$ ist, alfo

$$* \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_m e_m = a \\ \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \cdots + \beta_m e_m = b \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \cdots + \mu_m e_m = m \\ \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3 + \cdots + \nu_m e_m = n \end{array} \right.$$

und bildet daraus die Gleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \cdots + mx_m = n, \qquad +$$

so ersetzt dieselbe nach 16 die gegebenen m Gleichungen; denn es ist dann $(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m) e_1 = \nu_1 e_1$ u. s. w. Um nun ein x_a, z. B. x_1 zu finden, vervielfacht man die Gleichung + mit $bc \cdots m$, dann werden alle Glieder $bbc \cdots m$, $bcc \cdots m$, $\cdots bc \cdots mm$ nach 92 null und es bleibt nur

$$x_1 \overset{m}{[abc \cdots m]} = \overset{m}{[nbc \cdots m]}.$$

Und ebenso $x_2 \overset{m}{[abc \cdots m]} = \overset{m}{[anc \cdots m]}$ u. s. w.

$$x_m \overset{m}{[abc \cdots m]} = \overset{m}{[abc \cdots ln]}.$$

Hier kann nun $\overset{m}{[abc \cdots m]}$ gleich Null oder ungleich Null sein.

Im letztern Falle kann man die Gleichung durch $\overset{m}{[abc \cdots m]}$ teilen oder dividiren und erhält dann

$$x_1 = \frac{\overset{m}{[nbc \cdots m]}}{\overset{m}{[abc \cdots m]}},\ x_2 = \frac{\overset{m}{[anc \cdots m]}}{\overset{m}{[abc \cdots m]}}, \cdots x_m = \frac{\overset{m}{[abc \cdots ln]}}{\overset{m}{[abc \cdots lm]}},$$

oder wenn man für diese Grösen $a, b, \cdots m, n$ die Werte nach * einführt, so erhält man nach 94

$$x_1 = \frac{S(\nu_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) \overset{m}{[e_a e_b e_c \cdots e_m]}}{S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) \overset{m}{[e_a e_b e_c \cdots e_m]}},$$

wo $a, b, c, \cdots m$ sämmtlich einander ungleich sein müssen (da sonst $\overset{m}{[e_a e_b e_c \cdots e_m]} = 0$ wird) und dieser Ausdruck nach 96

$$x_1 = \frac{\Delta^m (\nu_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) \overset{m}{[e_1 e_2 \cdots e_m]}}{\Delta^m (\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) \overset{m}{[e_1 e_2 \cdots e_m]}} = \frac{\Delta^m (\nu_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m (\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)},$$

da $\overset{m}{[e_1 e_2 \cdots e_m]} = 1$ gesetzt ist. Und entsprechend

$$x_2 = \frac{\Delta^m (\alpha_a \nu_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m (\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)} \cdots x_m = \frac{\Delta^m (\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \nu_m)}{\Delta^m (\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \mu_m)}.$$

Wenn das Flach $\overset{m}{[abc \cdots m]}$, bez. $\overset{m}{[a_1 a_2 \cdots a_m]}$ gleich Null ist, so herrscht nach 14 zwischen den Grösen $a, b, \cdots m$ eine Hörigkeit, dann lässt sich nach 19 aus ihnen eine freie Grösenreihe aussondern, zu der die andern Grösen hörig sind. Es seien $a_1, \cdots a_r$ die gegenseitig freien, $a_{r+1} \cdots a_m$ die zu ihnen hörigen Grösen, dann ist nach * auch n zu ihnen hörig. Dann ist also $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_r a_r = c$, wo $c = b - (x_{r+1} a_{r+1} + \cdots + x_m a_m)$ und man erhält dann

$$x_1 = \frac{\overset{r}{[c a_2 a_3 \cdots a_r]}}{\overset{r}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]}}, \quad x_2 = \frac{\overset{r}{[a_1 c a_3 \cdots a_r]}}{\overset{r}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]}} \cdots, \quad x_r = \frac{\overset{r}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_{r-1} c]}}{\overset{r}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]}}.$$

Es wird zweckmäsig ſein, die Unbekannte für 2 und 3 Unbekannte zu bestimmen. Es ist für zwei Unbekannte

$$x_1 = \frac{\nu_1\beta_2 - \nu_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \quad x_2 = \frac{\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\nu_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}.$$

Für 3 Unbekannte ist

$$x_1 = \frac{\nu_1\beta_2\gamma_3 - \nu_2\beta_1\gamma_3 - \nu_1\beta_3\gamma_2 + \nu_2\beta_3\gamma_1 + \nu_3\beta_1\gamma_2 - \nu_3\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1}$$

$$x_2 = \frac{\alpha_1\nu_2\gamma_3 - \alpha_2\nu_1\gamma_3 - \alpha_1\nu_3\gamma_2 + \alpha_2\nu_3\gamma_1 + \alpha_3\nu_1\gamma_2 - \alpha_3\nu_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1}$$

$$x_3 = \frac{\alpha_1\beta_2\nu_3 - \alpha_2\beta_1\nu_3 - \alpha_1\beta_3\nu_2 + \alpha_2\beta_3\nu_1 + \alpha_3\beta_1\nu_2 - \alpha_3\beta_2\nu_1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1}.$$

269. **Satz. Wenn $m + 1$ Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten gegeben ſind von der Form**

$$\nu_0 + \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \gamma_0 x_3 + \cdots + \mu_0 x_m = 0$$
$$\nu_1 + \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m = 0$$
$$\vdots$$
$$\nu_m + \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \cdots + \mu_m x_m = 0,$$

ſo ist die Gleichung, aus welcher alle Unbekannte entfernt oder eliminirt ſind, $\Delta^{m+1}(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\cdots\mu_m\nu_{\mathfrak{n}}) = 0$, wo alle Zeiger, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots \mathfrak{n}$ einander ungleich ſind.

Beweis. Man webe oder multiplizire die Vorzahlen, welche den Zeiger $\mathfrak{a}$ haben, mit $e_{\mathfrak{a}}$, und ſeien $e_0, e_1, \cdots e_m$ gegenſeitig frei. Dann ſei

$$\nu_0 e_0 + \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_m e_m = n$$
$$\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m = a$$
* $$\beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m = b$$
$$\vdots$$
$$\mu_0 e_0 + \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_m e_m = m.$$

Nun bilde man die Gleichung

\+ $$n + a x_1 + b x_2 + \cdots + m x_m = 0,$$

ſo erſetzt dieſe nach 15, wenn man die Werte aus * einführt, die ſämmtlichen gegebenen Gleichungen; denn es ist dann

$$\nu_0 + \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \gamma_0 x_3 + \cdots + \mu_0 x_m = 0 \text{ u. ſ. w.}$$

Flacht man dieſe Gleichung + mit $\overset{m}{[ab \cdots m]}$, ſo erhält man, da alle Flache, in denen zwei Fache oder Faktoren gleich null ſind, (z. B. $\overset{m}{[aab \cdots m]}$) die Gleichung $\overset{m}{[nab \cdots m]}$, aus welcher alle Unbekannte ent-

fernt ſind. Und führt man dieſe Flachung aus, ſo erhält man nach 96 $\Delta^{m+1}(\alpha_a\beta_b\cdots\mu_m\nu_n)=0$, wo $a, b, \cdots m, n$ ſämmtlich einander ungleich ſind.

Satz. Aus zwei Gleichungen, welche in Bezug auf eine Unbekannte x eine Zahlgleichung beliebigen Grades ſind 270.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m=0$$
$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n=0,$$

wo $a_0, a_1, \cdots a_m$ und $b_0, b_1, \cdots b_n$ beliebige Folgen oder Funktionen der andern Unbekannten ſind, kann man die Unbekannte x entfernen oder eliminiren und erhält die Gleichung

$$\overset{m+n}{[}\; u_1u_2u_3\cdots u_{m+n}]=0,$$

aus welcher x entfernt ist, und in welcher

$$u_a=a_{a-1}e_1+a_{a-2}e_2+\cdots+a_0e_a+b_{a-1}e_{n+1}+b_{a-2}e_{n+2}+\cdots+b_0e_{n+a}$$

ist, wo $e_1, e_2, \cdots e_{m+n}$ gegenſeitig freie Einheiten ſind.

Beweis. Man vervielfache die erſtere der gegebenen Gleichungen nach und nach mit den n Zahlen 1, x, x^2, $x^3, \cdots x^{n-1}$, die zweite nach und nach mit den m Zahlen 1, x, x^2, $x^3, \cdots x^{m-1}$, ſo erhält man die m + n Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
(1) & a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m \\
(2) & \quad a_0x+a_1x^2+\cdots+a_{m-1}x^m+a_mx^{m+1} \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
(n) & \qquad a_0x^{n-1}+a_1x^n+\cdots \qquad +a_mx^{m+n-1} \\
(n+1) & b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n \\
(n+2) & \quad +b_0x+b_1x^2+\cdots+b_{n-1}x^n+b_nx^{n+1} \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
(m+n) & \qquad b_0x^{m-1}+b_1x^m+\cdots\cdots+b_nx^{m+n-1}
\end{array}$$

ſämmtlich gleich Null.

Hier vervielfachen wir jede der m + n Gleichungen, und zwar (1) mit e_1, (2) mit e_2, u. ſ. w. bis (m + n) mit e_{m+n}, wo $e_1, e_2, \cdots e_{m+n}$ gegenſeitig frei ſind und ſetzen

$a_0e_1+b_0e_{n+1}=u_1$

$a_1e_1+a_0e_2+b_1e_{n+1}+b_0e_{n+2}=u_2$ u. ſ. w.

$a_{a-1}e_1+a_{a-2}e_2+\cdots+a_0e_a+b_{a-1}e_{n+1}+b_{a-2}e_{n+2}+\cdots+b_0e_{n+a}=u_a.$

Dann erhält man

$$u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \cdots + u_{m+n} x^{m+n-1} = 0.$$

Flacht man diese Gleichung mit den Fachen $u_2, u_3, \cdots u_{m+n}$, so erhält man $\overset{m+n}{[} u_1 u_2 u_3 \cdots u_{m+n}] = 0$, da alle Flache, welche zwei gleiche Fache oder Faktoren enthalten, Null werden, und hier sind alle Höhen von x entfernt, und hat man demnach die Gleichung, aus welcher x entfernt ist.

Die

Erweiterungslehre

der

höhere Zweig der Synthese.

Vierter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

Vorwort.

Die Erweiterungslehre oder der höhere Zweig der Synthese ist zur Zeit nur erst in ihren Anfängen zu einer wissenschaftlichen Darstellung gediehen.

Der Verfasser hat nur 57 Sätze derselben abgeleitet und muss es sich in seinem hohen Alter versagen, die Folgelehre oder Funktionenlehre dieses Zweiges zu entwickeln.

Er verweist deshalb auf die Ausdehnungslehre von H. Grassmann, Nummer 410 bis 527 und überlässt die weitere Entwicklung dieses Zweiges jüngeren Kräften.

Der Verfasser.

1. Die Flechtung oder die algebraische Multiplikation.

Erklärung. Das Flecht oder das algebraische Produkt heist ein Zeug oder Produkt von Einheiten erster Klasse, die Webung heist eine Flechtung, eine algebraische Multiplikation, wenn 1.

1. jedes Zeug von gleichen oder ungleichen Einheiten erster Klasse ungleich Null ist,
2. für jedes Zeug von Einheiten erster Klasse die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung der Fache oder Faktoren gelten,
3. alle Zeuge von n Einheiten erster Klasse, welche nicht ganz dieſelben Fache enthalten, gegenseitig frei ſind.

Die Einheit nter Klasse ist ein Zeug von n Einheiten erster Klasse.

Das Zeichen des Flechtes ist das Nebeneinanderschreiben der Fache oder Faktoren ohne Flachklammer, z. B. ab = Flecht a mal b.

Satz. $e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}} \gtrless 0 \qquad e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{c}} \gtrless 0.$ 2.

Jedes Flecht von gleichen oder ungleichen Einheiten ist ungleich Null.

Satz. $e_r(e_s e_t) \overset{*}{=} e_r e_s e_t \qquad e_r e_s \overset{*}{=} e_s e_r$ 3.

*) wo e_r, e_s, e_t Einheiten erster Klasse ſind oder

Für jedes Flecht von Einheiten erster Klasse gelten die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung.

Satz. Die Einheiten nter Klasse, welche nicht ganz dieſelben Einheiten erster Klasse als Fache oder Faktoren enthalten, ſind gegenseitig freie Einheiten. 4.

Satz. Für die Flechtung oder algebraische Multiplikation gelten alle Geſetze der Beziehung, der Einigung und der Vertauschung der Fache oder Faktoren, kurz alle Geſetze der Verwebung. 5.

Beweis. Aus den Grundformeln der Einigung und der Vertauschung der Einheiten folgen nach Zahlenlehre 59 und 62 alle Gesetze der Einigung und der Vertauschung der Fache, wenn diese aus beliebigen Grösen bestehen. Die Gesetze der Beziehung gelten nach Ausdehnungslehre Satz 75.

6. **Satz.** $(S\alpha_a\,a_a)\cdot(S\beta_b\,b_b)\cdot(S\gamma_c\,c_c)\cdots(S\mu_m\,m_m) =$

$$S(\alpha_a\,\beta_b\,\gamma_c\cdots\mu_m)\,(a_a\,b_b\,c_c\cdots m_m)$$

wo $a_a, b_b, c_c, \cdots m_m$ beliebige Grösen, $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c\cdots\mu_m$ beliebige Zahlen. Das Flecht mehrer Vielfachensummen aus beliebigen Grösen erhält man, indem man jede Gröse der ersten Vielfachensumme mit jeder der zweiten, das Zeug derselben mit jeder der dritten u. s. w. zu einem Teilzeuge flicht (multiplizirt), jedes dieser Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Grösen gehörigen Vorzahlen vervielfacht und dann sämtliche Zeuge, welche sich auf diese Weise bilden lassen, zufügt oder addirt.

Beweis. Unmittelbar aus Ausdehnungslehre Satz 75.

7. **Satz. Das Flecht von n Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse ist eine Vielfachensumme von Einheiten nter Klasse.**

Beweis. Unmittelbar aus Ausdehnungslehre Satz 76.

Die Flechte der Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse entwickeln sich nach den Sätzen der Ausdehnungslehre 74 und 75.

8. **Satz.** $(S\alpha_a\,a_a)\cdot(S\beta_b\,a_b)\cdots(S\mu_m\,a_m) =$

$$S(\alpha_a\,\beta_b\,\gamma_c\cdots\mu_m)(a_a\,a_b\,a_c\cdots a_m)$$

wo $a_a, a_b, \cdots a_m$ beliebige Grösen erster Klasse im Gebiete nter Stufe und $\alpha_a, \beta_b, \cdots\mu_m$ beliebige Zahlen sind.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 6.

Da für die Flechte Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt, so kann man bei allen den Zeugen, welche dieselben m Grösen $a_a, b_b, \cdots m_m$ enthalten, die Fache so umordnen, dass die Zeiger der Grösen steigend geordnet sind, und kann dann alle diese Zeuge in ein Glied zusammenfassen, indem man die Summe der Vorzahlen dieser sämtlichen Zeuge in eine Vorzahl vereinigt und diese mit dem Flechte vervielfacht.

Die Vorzahl ist dann die Summe der Tausche oder Permutationen aus den m Fachen $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \cdots\mu_m$, welche man erhält, wenn man jede der m Zahlen α_a, z. B. α_c mit jeder der andern Zahlen $\beta, \gamma, \cdots\mu$ webt, sofern alle diese Zahlen andere Zeiger als α_a, hier also als α_c haben. Es wird also α_c mit den sämtlichen Tauschen aus den m—1 Fachen $\beta_b, \gamma_c, \cdots\mu_m$, wo $b, c, \cdots m$ ungleich c ist, gewebt. Die Anzahl der Stücke in dieser Summe ist also gleich der Anzahl der Tausche aus m Grösen d. h. $m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$

Sind unter den m Grösen p gleiche, so ist die Anzahl der Tausche

$$\frac{m!}{p!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}.$$

Wir nennen die Summe aus dieſen Tauschen die Flechttausche.

Es ist demnach $S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}})\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = (\alpha_1\beta_2 + \beta_2\alpha_1)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$.

Es ist $S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}})\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 =$

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_3\beta_2\gamma_1)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3.$$

Es ist $S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{d}})\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 =$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4 + \alpha_1\beta_2\gamma_4\delta_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_2\delta_4 + \alpha_1\beta_3\gamma_4\delta_2 + \alpha_1\beta_4\gamma_2\delta_3 + \alpha_1\beta_4\gamma_3\delta_2 \\
&+ \alpha_2\beta_1\gamma_3\delta_4 + \alpha_2\beta_1\gamma_4\delta_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1\delta_4 + \alpha_2\beta_3\gamma_4\delta_1 + \alpha_2\beta_4\gamma_1\delta_3 + \alpha_2\beta_4\gamma_3\delta_1 \\
&+ \alpha_3\beta_1\gamma_2\delta_4 + \alpha_3\beta_1\gamma_4\delta_2 + \alpha_3\beta_2\gamma_1\delta_4 + \alpha_3\beta_2\gamma_4\delta_1 + \alpha_3\beta_4\gamma_1\delta_2 + \alpha_3\beta_4\gamma_2\delta_1 \\
&+ \alpha_4\beta_1\gamma_2\delta_3 + \alpha_4\beta_1\gamma_3\delta_2 + \alpha_4\beta_2\gamma_1\delta_3 + \alpha_4\beta_2\gamma_3\delta_1 + \alpha_4\beta_3\gamma_1\delta_2 + \alpha_4\beta_3\gamma_2\delta_1)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4
\end{aligned}$$

Ferner ist, wenn $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ ist

$$S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}})\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 = (\alpha_1\beta_1\gamma_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_1)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$$

$$\begin{aligned}
S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{d}})(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) = (&\alpha_1\beta_1\gamma_3\delta_4 + \alpha_1\beta_1\gamma_4\delta_3 + \alpha_1\beta_3\gamma_1\delta_4 + \alpha_1\beta_3\gamma_4\delta_1 \\
&+ \alpha_1\beta_4\gamma_1\delta_3 + \alpha_1\beta_4\gamma_3\delta_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_1\delta_4 + \alpha_3\beta_1\gamma_4\delta_1 + \alpha_3\beta_4\gamma_1\delta_1 + \\
&+ \alpha_4\beta_1\gamma_1\delta_3 + \alpha_4\beta_1\gamma_3\delta_1 + \alpha_4\beta_3\gamma_1\delta_1)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4
\end{aligned}$$

Ebenſo ist, wenn $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3$ ist

$$S(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\delta_{\mathfrak{d}})\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4 = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_4 + \alpha_1\beta_1\gamma_4\delta_1 + \alpha_1\beta_4\gamma_1\delta_1 + \alpha_4\beta_1\gamma_1\delta_1)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4.$$

Dieſe Beispiele werden genügen, um die Aufstellung dieſer Flechttausche zu zeigen.

Erklärung. Die Flechttausche oder Demutante aus m Reihen von je m Zahlen $\alpha_{\mathfrak{a}}, \beta_{\mathfrak{b}}, \gamma_{\mathfrak{c}}, \cdots \mu_{\mathfrak{m}}$ heist die Summe von Zeugen, welche man aus dem nach steigenden Zeigern geordneten Zeuge $\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\cdots\mu_{\mathfrak{m}}$ dadurch erhält, dass man in ihm nach und nach die untern Zeiger auf alle möglichen Weiſen verſetzt, während man die Reihenfolge der Zeichen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu$ unverändert lässt. 9.

Wenn von den untern Zeigern p gleich ſind, ſo ergiebt deren Verſetzung kein neues Glied.

Das Zeichen der Flechttausche aus m Reihen zu m Zahlen ist kurz $D^{m}(\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}\gamma_{\mathfrak{c}}\cdots\mu_{\mathfrak{m}})$.

Als Beispiele gebe ich noch

$$D^3(\gamma_3\varepsilon_5\vartheta_8) = \gamma_3\varepsilon_5\vartheta_8 + \gamma_3\varepsilon_8\vartheta_5 + \gamma_5\varepsilon_3\vartheta_8 + \gamma_5\varepsilon_8\vartheta_3 + \gamma_8\varepsilon_3\vartheta_5 + \gamma_8\varepsilon_5\vartheta_3.$$

Die wohlgeordneten Flechte mter Klasse $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}\cdots\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}})$ aus dem Gebiete nter Stufe $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\mathfrak{a}_n$ bilden die Vollgeschiede oder Komplexionen mit Wiederholung aus n Einfachen oder Elementen zur mten Klasse, jedes Vollgeschiede als ein Flecht betrachtet. Ich nenne dieſe Flechte die Geschiedsflechte.

Erklärung. Die Geschiedsflechte aus n Grösen zur mten Klasse heisen die Flechte mit m Fachen aus dieſen Grösen, welche man erhält, wenn man dieſe Grösen nach steigendem Zeiger in eine Reihe ordnet und dann jede dieſer Grösen mit jeder nicht frühern flicht, dann weiter jedes Flecht aus $\mathfrak{a}$ Grösen mit jeder vor der letzten Gröse dieſes Flechtes in der Reihe der Grösen nicht vorhergehenden Gröse flicht und ſo fortfährt, bis in jedem Flechte m der Grösen als Fache oder Faktoren enthalten ſind. 10.

Das Zeichen der Geschiedsflechte aus n Grösen zur m ten Klasse ist $(a_1, a_2, \cdots a_n)^{\cdot\cdot m}$.

Einige Beispiele werden eine Anschauung der Geschiedsflechte geben. Es ist

$(a_1, a_2, \cdots a_6)^{\cdot\cdot 1} =$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$(a_1, a_2, \cdots a_6)^{\cdot\cdot 2} =$	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5	a_1a_6
		a_2a_2	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5	a_2a_6
			a_3a_3	a_3a_4	a_3a_5	a_3a_6
				a_4a_4	a_4a_5	a_4a_6
					a_5a_5	a_5a_6
						a_6a_6
$(a_1, a_2, \cdots a_6)^{\cdot\cdot 3} =$	$a_1a_1a_1$	$a_1a_1a_2$	$a_1a_1a_3$	$a_1a_1a_4$	$a_1a_1a_5$	$a_1a_1a_6$
		$a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_5$	$a_1a_2a_6$
			$a_1a_3a_3$	$a_1a_3a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_3a_6$
				$a_1a_4a_4$	$a_1a_4a_5$	$a_1a_4a_6$
					$a_1a_5a_5$	$a_1a_5a_6$
						$a_1a_6a_6$
		$a_2a_2a_2$	$a_2a_2a_3$	$a_2a_2a_4$	$a_2a_2a_5$	$a_2a_2a_6$
			$a_2a_3a_3$	$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_2a_3a_6$
				$a_2a_4a_4$	$a_2a_4a_5$	$a_2a_4a_6$
					$a_2a_5a_5$	$a_2a_5a_6$
						$a_2a_6a_6$
			$a_3a_3a_3$	$a_3a_3a_4$	$a_3a_3a_5$	$a_3a_3a_6$
				$a_3a_4a_4$	$a_3a_4a_5$	$a_3a_4a_6$
					$a_3a_5a_5$	$a_3a_5a_6$
						$a_3a_6a_6$
				$a_4a_4a_4$	$a_4a_4a_5$	$a_4a_4a_6$
					$a_4a_5a_5$	$a_4a_5a_6$
						$a_4a_6a_6$
					$a_5a_5a_5$	$a_5a_5a_6$
						$a_5a_6a_6$
						$a_6a_6a_6$

Jeder, der die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass diese Geschiedsflechte nichts anderes sind, als die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung), sofern man jedes Geschiede als ein Flecht auffasst.

Die Anzahl dieser Geschiedsflechte ist demnach

$$n^{\cdot\cdot m} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = (n+m-1)^{\cdot m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!},$$

wo $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots m$.

11. **Satz. Die Geschiedsflechte aus n Grösen zur m ten Klasse sind die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung) aus diesen n Grösen zur m ten Klasse, wenn man jedes Geschiede als ein Flecht betrachtet.**

Beweis. Unmittelbar aus Satz 10 und den Vorbemerkungen.

12. **Satz.** $(S\alpha_a a_a)\cdot(S\beta_b a_b)\cdots(S\mu_m a_m) = SD^m\cdot(a_r a_s a_t\cdots)$
wo $r \leqq s \leqq t \leqq \cdots$

Jedes Flecht von m Grösen erster Klasse, welche zu n gegenseitig freien Grösen $a_1 \cdots a_n$ hörig sind, ist die Vielfachensumme der Geschiedsflechte dieser freien Grösen zur m ten Klasse, in welcher die Vorzahl jedes Geschiedsflechtes die Flechttausche oder Demutante aus denjenigen m Vorzahlen ist, welche zu den m hörigen Grösen des Geschiedsflechtes gehören.

Beweis. Unmittelbar nach 8 in Verbindung mit 9 und 10.

Satz. Wenn ein Flecht null ist, so muss notwendig eins seiner Fache oder Faktoren null sein, oder 13.
wenn $AB = 0$ und $A \gtrless 0$, so ist $B = 0$.

Beweis. Im allgemeinsten Falle sind A und B Vielfachensummen von Flechten, deren Fache oder Faktoren Vielfachensummen der Einheiten erster Klasse $a_1, a_2, \cdots a_n$ sind. Es sei demnach

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots = S\alpha_a E_a \qquad B = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots = S\beta_b F_b$$

so sind nach 12 E_a und F_b sämtlich Geschiedsflechte der Einheiten erster Klasse und jedes derselben nach Satz $1_{,1}$ ungleich Null.

Ebenso ist nach 12

$AB = S\alpha_a\beta_b E_a F_b$ und auch hier $E_a F_b \gtrless 0$ und $E_a F_b$ ein Geschiedsflecht der Einheiten erster Klasse. Ordnet man hier in jedem Geschiedsflechte die Einheiten der ersten Klasse steigend, so dass $E_a F_b = G_r$ und fasst man alle die Glieder, welche dasselbe Geschiedsflecht G_r enthalten, in eine Summe $S\alpha_a\beta_b G_r$ zusammen, so muss dies Geschiedsflecht G_r nach $1_{,3}$ ungleich Null, mithin nach Ausdehnungslehre 14 die zu G_r gehörige Summe der Vorzahlen $S\alpha_a\beta_b = 0$ sein. Da nun nach der Voraussetzung $A \gtrless 0$ ist, so muss nach $1_{,3}$ und nach Ausdehnungslehre 13 wenigstens eine der Vorzahlen α_a ungleich Null sein, es sei dies α, und sei $r = 1 + q$, so ist $0 = S\alpha_a\beta_b = \alpha_1\beta_q + S\alpha_a\beta_b$, wobei auf der rechten Seite kein Glied der Summe mit $\alpha_1 \beta_q$ gleich sein darf, dagegen $a + b = 1 + q$ sein muss. Hier darf a zunächst nicht den Wert 1 haben, denn sonst hätten wir zu α_1 auch E_1 und zu β_b auch F_q gehörig, also auch $b = q$, was gegen die Bedingung, mithin muss $a > 1$, mithin $b < q$ sein, mithin ist

$$0 = \alpha_1\beta_q + S\alpha_a\beta_b, \qquad \text{wo } a > 1,\ b < q \text{ ist.}$$

Sei nun zuerst $r = 2$, d. h. $q = 1$, so fällt die $S\alpha_a\beta_b$ ganz fort, da $b < q$ nicht erfüllt werden kann, mithin ist dann $0 = \alpha_1\beta_1$ und da nach der Voraussetzung $\alpha_1 \gtrless 0$, so muss $\beta_1 = 0$ sein.

Sei nun $r = 3$, d. h. $q = 2$, so fällt, da $b < 2$ sein muss und $\beta_1 = 0$ ist, die Summe $S\alpha_a\beta_b$ gleichfalls fort. Mithin ist wieder $0 = \alpha_1\beta_2$ und da $\alpha_1 \gtrless 0$, so ist $\beta_2 = 0$.

Und ſo fortschreitend ergiebt ſich $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 0$ u. ſ. w., alſo ist auch $B = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots = 0$.

14. **Satz. Wenn in zwei gleichen Flechten, deren jedes aus 2 Fachen oder Faktoren besteht, das eine Fach in beiden gleich ist und zugleich ungleich null ist, ſo muss auch das andere Fach in beiden gleich ſein oder**
wenn $AB = AC$ und $A \gtrless 0$, ſo ist $B = C$.

Beweis. Da $AB = AC$, ſo ist $0 = AB - AC = A(B - C)$. Alſo da $A \gtrless 0$ ist, nach 13, auch $B - C = 0$, d. h. $B = C$.

Aus dieſem Satze folgt, dass wenn das Zeug oder Produkt zweier geflochtenen Grösen gleich ist und das eine Fach, der eine Faktor, in beiden gleich ist und zugleich ungleich null ist, auch das andere Fach gleich ist, alſo nur einen und nicht mehre Werte hat, dies war aber die Bedingungsgleichung für die Teilung (Zahlenlehre 164), wir können alſo auch für die Flechtung eine Teilung bezüglich einen Bruch einführen.

15. **Erklärung. Der Flechtbruch $A : B$ (geleſen A geteilt durch B, kurz A durch B), heist die Gröse, welche mit B geflochten A giebt oder $A : B \cdot B = A$.**

16. **Satz.** $AB : B = A$.

Ein Flecht von zwei Fachen oder Faktoren giebt durch das eine Fach geteilt das andere Fach.

Beweis. Es ist, wenn man in Satz 15 AB statt A ſetzt

$$AB : B \cdot B = AB$$

mithin ist nach 14 auch $AB : B = A$.

17. **Satz. Alle Geſetze der Zahlenlehre fürs Teilen oder Dividiren gelten auch fürs Teilen der Flechte.**

Beweis. Die Geſetze der Zahlenlehre fürs Teilen folgen unmittelbar aus den beiden Sätzen

$$A : B \cdot B = A \qquad \text{und} \qquad AB : B = A.$$

Da dieſe nach 15 und 16 gelten, da ebenſo nach 5 alle Geſetze der Verwebung und der Beziehung gelten, ſo gelten alſo auch alle Geſetze, welche in der Zahlenlehre für Zeuge und Brüche abgeleitet ſind.

2. Die Hauptformeln und die Hauptgrösen.

Erklärung. Zahlgröse heist eine Gröse der Zahlenlehre, 18.
d. h. eine Gröse, welche auser der Vorzahl, sei diese ganz oder gebrochen, Endzahl oder Unzahl (irrational), sei sie eine Reinzahl (reell) oder eine Izahl (imaginär), nur eine Einheit e enthält, z. B. αe.

Hauptgröse heist eine Gröse, welche sich als eine Vielfachensumme von mehren gegenseitig freien Grösen oder Einheiten darstellen lässt.

Zahlformel heist eine Formel, welche für beliebige Werte einer veränderlichen Gröse in derselben stets einer Zahlgröse gleich ist.

Hauptformel heist eine Formel, welche für beliebige Werte einer veränderlichen Gröse in derselben einer Hauptgröse gleich ist.

Satz. Jede Zahlformel beliebig vieler Zahlgrösen lässt sich 19.
als Zahlformel einer einzigen Hauptgröse darstellen und zwar, wenn

$$y = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

ist, so ist

$$y = f([x\,\bar{e}_1], [x\,\bar{e}_2], \cdots [x\,\bar{e}_n]) = \varphi x$$

wo $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ ist
und $e_1, e_2, \cdots e_n$ einen einfachen Normverein bilden.

Beweis. Wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ einen einfachen Normverein bilden und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

ist, so ist nach Ausdehnungslehre 186 $e_a \bar{e}_b = 0$, wenn $a \gtrless b$ ist und ist $e_a \bar{e}_a = 1$, mithin ist

$$[x\,\bar{e}_1] = [(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)\bar{e}_1] = x,$$

ebenso ist $[x\,\bar{e}_2] = x_2, \cdots [x\,\bar{e}_n] = x_n$, folglich

$$y = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f([x\,\bar{e}_1], [x\,\bar{e}_2], \cdots [x\,\bar{e}_n]) = \varphi x$$

und hier ist y als eine Zahlformel einer einzigen Hauptgröse dargestellt.

20. **Satz. Jeder Verein von Zahlformeln beliebig vieler Zahlgrösen lässt ſich als eine Hauptformel einer einzigen Hauptgrösе darstellen, und zwar, wenn**

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

ist, ſo ist dieſer Verein von Gleichungen gleichbedeutend der Gleichung

$$y = F(x),$$

wo

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$$
$$\varphi_a(x) = f_a([x\,\bar{e}_1], [x\,\bar{e}_2], \cdots [x\,\bar{e}_n])$$
$$F(x) = e_1\,\varphi_1(x) + e_2\,\varphi_2(x) + \cdots e_m\,\varphi_m(x)$$

ist und $e_1, \cdots e_n$ und $e_1, \cdots e_m$ einfache Normvereine bilden.

Beweis. Nach 19 ist, wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$ geſetzt wird

$$y_a = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_a([x\,\bar{e}_1], [x\,\bar{e}_2], \cdots [x\,\bar{e}_n]) = \varphi_a x$$

da aber $e_1, e_2, \cdots e_m$ gegenſeitig freie Grösen ſind nach Ausdehnungslehre 206, ſo ist nach 15 die eine Hauptformel

$$y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_m e_m = e_1 \varphi_1 x + e_2 \varphi_2 x + \cdots + e_m \varphi_m x.$$

gleichbedeutend mit den m Formeln

$$y_1 = \varphi_1\,x, \qquad y_2 = \varphi_2\,x, \cdots\cdot\; y_m = \varphi_m\,x.$$

Bezeichnen wir jene Hauptformel mit $y = Fx$, ſo ist alſo

$$y = Fx = e_1\,\varphi_1\,x + e_2\,\varphi_2\,x + \cdots + e_m\,\varphi_m\,x$$

gleichbedeutend mit den m gegebenen Gleichungen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_m) \text{ u. ſ. w.}$$

21. **Satz. Jeder Verein von Formeln beliebig vieler veränderlichen Grösen lässt ſich durch eine Formel einer veränderlichen Grösе erſetzen, vorausgeſetzt, dass ſowohl die unabhängigen als die abhängigen veränderlichen Grösen ſich als Vielfachenſummen eines und desſelben Vereines von Einheiten darstellen lassen.**

Beweis. Der Satz ist in 20 für einen beliebigen Verein von Zahlformeln beliebig vieler Zahlgrösen bewieſen.

Alle Vielfachenſummen eines Vereins von n Einheiten lassen ſich aber nach Ausdehnungslehre 193 als Vielfachenſummen eines einfachen Normvereins von n Grösen darstellen. Es bestehe der Normverein, dessen Vielfachenſummen die unabhängigen veränderlichen Grösen $x, y, \cdots$ darstellen, aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ und der, dessen Vielfachenſummen die abhängigen veränderlichen Grösen $u, v, \cdots$ darstellen, aus den Einheiten ${}^1e, {}^2e, \cdots {}^me$.

Ferner fei

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n, \cdots$$
$$u = u_1\, {}^1e + u_2\, {}^2e + \cdots + u_m\, {}^me$$
$$v = v_1\, {}^1e + v_2\, {}^2e + \cdots + v_m\, {}^me \cdots$$

wo alle Vorzahlen $(x_1, x_2, \cdots y_1, y_2, \cdots u_1, u_2, \cdots v_1, v_2, \cdots)$ Zahlgrösen find und feien

$$u = F(x, y, \cdots) \qquad v = \Phi(x, y, \cdots)$$

die gegebenen Formeln für u und v. Setzt man nun die obigen Werte für die Grösen $u, v, \cdots x, y, \cdots$ ein, fo erhält man

$$u_1{}^1e + u_2{}^2e + \cdots u_m{}^me = F(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, \cdots).$$

Hier ist die rechte Seite der Gleichung eine Hauptformel mit den Zahlgrösen $x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_n, \cdots$. Diefe Hauptformel foll einer Vielfachenfumme der Einheiten ${}^1e, {}^2e, \cdots {}^me$ gleich fein, fie muss alfo die Form haben ${}^1ef_1 + {}^2ef_2 + \cdots + {}^mef_m$, wo $f_1, f_2, \cdots f_m$ Zahlformeln von $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, \cdots$ find. Man hat mithin die Gleichung

$$u = u_1\, {}^1e + u_2\, {}^2e + \cdots + u_m\, {}^me = {}^1e f_1 + {}^2e f_2 + \cdots + {}^me f_m = F(x, y)$$

und diefe Gleichung wird nach 15 erfetzt durch den Verein von Zahlgleichungen $u_1 = f_1, u_2 = f_2, \cdots u_m = f_m$.

Auf gleiche Weife wird die Gleichung $v = \Phi(x, y)$ erfetzt durch den Verein von Zahlgleichungen

$$v_1 = \varphi_1, \quad v_2 = \varphi_2, \cdots \quad v_m = \varphi_m$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ wieder Zahlformeln der Zahlgrösen $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, \cdots$ find. Folglich werden die gegebenen Gleichungen

$$u = F(x, y, \cdots), \quad v = \Phi(x, y, \cdots), \cdots$$

erfetzt durch den Verein von Zahlgleichungen

$$\begin{array}{llll} u_1 = f_1, & u_2 = f_2, & \cdots & u_m = f_m, \\ v_1 = \varphi_1, & v_2 = \varphi_2, & & v_m = \varphi^m, \\ \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \end{array}$$

wo $f_1 \cdots f_m, \varphi_1 \cdots \varphi_m$ Zahlformeln der Zahlgrösen $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, \cdots$ find. Nach 20 lässt fich nun ein folcher Verein von Zahlformeln durch eine Hauptformel einer einzigen Hauptgröse erfetzen, alfo lässt fich auch der gegebene Verein von Formeln durch eine Hauptformel einer einzigen Hauptgröse erfetzen.

3. Die Lückenzeuge und die Lückenausdrücke.

---

22. **Erklärung. Ein Zeug oder Produkt mit n Lücken oder ein Nlückenzeug heist ein Zeug oder Produkt von beliebig vielen Fachen oder Faktoren, in welchem n Grösen erster Klasse $x_1, x_2, \cdots x_n$ als Lückenbüser vorkommen, welche als Fache in die n Lücken eintreten sollen.**

Das Zeichen dieses Lückenzeuges ist $Pl^n(x_1, x_2, \cdots x_n)$.

Das Nlückenzeug ist gleich der Summe der sämtlichen Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man in dem $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ den Grösen $x_1, x_2, \cdots x_n$ alle möglichen Folgen giebt, und diese Summe durch die Anzahl dieser Tausche teilt.

Es wird nötig sein, den neuen Begriff an einigen Beispielen zu erläutern. Es ist demnach

$$Pl^1x = Px.$$

Sei z. B. $P = a_1 a_2 l a_3 a_4$, so ist $Pl^1x = a_1 a_2 x a_3 a_4$.

Es ist ferner

$$Pl^2(xy) = (Pxy + Pyx) : 2.$$

Sei z. B. $P = a_1 a_2 l a_3 l a_4$, so ist

$$Pl^2(xy) = (a_1 a_2 x a_3 y a_4 + a_1 a_2 y a_3 x a_4) : 2.$$

Es ist entsprechend

$$Pl^3(xyz) = (Pxyz + Pxzy + Pyxz + Pyzx + Pzxy + Pzyx) : 6.$$

Sei z. B. $P = a_1 l a_2 l a_3 l a_4$, so ist

$$Pl^3(xyz) = (a_1 x a_2 y a_3 z a_4 + a_1 x a_2 z a_3 y a_4 + a_1 y a_2 x a_3 z a_4$$
$$+ a_1 y a_2 z a_3 x a_4 + a_1 z a_2 x a_3 y a_4 + a_1 z a_2 y a_3 x a_4 : 6.$$

Es ist übrigens einleuchtend, dass die Summe der Folgen geteilt durch die Anzahl der Tausche nichts anderes ist als das arithmetische Mittel oder das Summenmittel zwischen den Folgen.

23. **Satz. Das Nlückenzeug ist gleich der Summe, welche man erhält, wenn man den Grösen erster Klasse $x_1, x_2, \cdots x_n$ alle verschiedenen Folgen giebt und die Summe durch die Anzahl dieser Tausche n! teilt, oder**

$$Pl^n(x_1 x_2 \cdots x_n) = (SPx_a x_b \cdots) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n).$$

wo $x_a, x_b, \cdots$ dieselben Grösen wie $x_1, x_2, \cdots x_n$ nur in beliebig geänderter Folge ist.

Beweis. Unmittelbar aus 22.

Satz. $Pl^n x^n = Pxx\cdots x$. 24.

Beweis. Unmittelbar aus 23, denn ſetzt man in 23 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \cdots = x_n = x$, ſo werden alle Glieder der Summe gleich $Pxx\cdots x$, alſo die Summe gleich der Anzahl der Glieder mal $Pxx\cdots x$, d. h. gleich $1\cdot 2\cdot 3\cdots n\, Pxx\cdots x$ und dies durch $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ geteilt, gleich $Pxx\cdots x$.

Sei z. B. $P = a_1 l a_2 l a_3 l a_4$, ſo ist $Pl^3 x^3 = a_1 x a_2 x a_3 x a_4$, ſei $P = a_1 a_2 l a_3 l a_4$, ſo ist $Pl^2 x^2 = a_1 a_2 x a_3 x a_4$.

Satz. $Pl^{n+m}(x_1 x_2 \cdots x_n) x^m = \frac{S}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$ 25.

wo S die Summe aller der Zeuge oder Produkte ist, welche hervorgehen, wenn man die $m+n$ Grösen $x_1 x_2 \cdots x_n xx \cdots x$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in die $n+m$ Lücken von Pl^{n+m} verteilt.

Beweis. Man ſetze zunächst alle $n+m$ Grösen

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_{n+m}$$

verschieden, dann erhält man

$$Pl^{n+m}(x_1 x_2 \cdots x_{n+m}) = (SPx_a x_b \cdots) : (1\cdot 2\cdot 3\cdot m\cdot (m+1)\cdots(m+n)).$$

Setzt man hier die m Grösen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_{n+m}$ einander gleich, ſo fallen $1\cdot 2\cdot 3\cdots m$ Glieder in ein Glied zuſammen, und ist alſo die Anzahl der Tausche nur $1 : (1\cdot 2\cdot 3\cdots m)$ von der zuerst entwickelten. Es darf daher die Summe auch nur durch $(m+1)(m+2)\cdots(m+n)$ geteilt werden.

Erklärung. Das Zeug oder Produkt mit $n+m$ Lücken oder das $N+M$-Lückenzeug von n Lückenbüsern $x_1, x_2, \cdots x_n$, heist der Ausdruck, den man erhält, wenn man das $N+M$-Lückenzeug von $n+m$ Lückenbüsern $x_1, x_2, \cdots x_{n+m}$ nach 23 entwickelt und dann statt jeder der Grösen $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_{n+m}$ eine Lücke ſetzt, oder es ist 26.

$$Pl^{n+m}(x_1 x_2 \cdots x_n) = Pl^{n+m}(x_1 x_2 \cdots x_n ll \cdots l).$$

Sei z. B. zu entwickeln $Pl^3 x$, ſo ist dies

$Pl^3 x = (Pxll + Plxl + Pllx) : 3$, z. B.

$(a_1 x a_2 l a_3 l a_4 + a_1 l a_2 x a_3 l a_4 + a_1 l a_2 l a_3 x a_4) : 3$.

Sei zu entwickeln $Pl^3(xy)$, ſo ist dies

$Pl^3(xy) = (Pxyl + Pxly + Pyxl + Pylx + Plxy + Plyx) : 6$.

Satz. Es ist $Pl^{n+m}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{S}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$ 27.

wo S die Summe aller der Zeuge oder Produkte ist, welche hervorgehen, wenn man die n Grösen $x_1 x_2 \cdots x_n$ und die m Lücken auf alle möglichen verschiedenen Arten in die $n+m$ Lücken von Pl^{n+m} verteilt.

Beweis. Unmittelbar aus 25, wenn man l statt x ſetzt.

28. **Satz.** $Pl^m x = (Pxll\cdots l + Plxl\cdots l + Pllx\cdots l + \cdots) : m.$

Beweis. Unmittelbar aus 27.

29. **Erklärung. Ein Lückenausdruck mit n Lücken oder ein N-Lückenausdruck heist eine Vielfachenſumme von Lückenzeugen mit je n Lücken oder von N-Lückenzeugen.**

Zwei Lückenausdrücke heisen dann und nur dann gleich, wenn ſie für jeden Verein von n Grösen erster Klasse $x_1, x_2, \cdots x_n$, welche in die Lücken eingeschoben werden gleich bleiben oder wenn $A, B, \cdots A^1, B^1, \cdots$ N-Lückenzeuge und $\alpha, \beta, \cdots \alpha^1, \beta^1, \cdots$ Zahlen, ſo ist $\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha^1 A^1 + \beta^1 B^1 + \cdots$ dann und nur dann, wenn für jeden Verein von n Grösen erster Klasse $x_1 \cdots x_n$

$$\alpha A(x_1 x_2 \cdots x_n) + \beta B(x_1 x_2 \cdots x_n) + \cdots = \alpha^1 A^1(x_1 x_2 \cdots x_n) + \beta^1 B^1(x_1 x_2 \cdots x_n) + \cdots$$

30. **Satz. Jede ganze Zahlformel n-ten Grades von beliebig vielen (veränderlichen) Zahlgrösen lässt ſich in der Form**

$$A x^n$$

darstellen, wo A ein N-Lückenausdruck ist, oder

$$S\alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots = A x^n, \text{ wo } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots \leqq n$$

wo $x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$

auch $A = S\alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots} [|\bar{e}_0]^{\mathfrak{r}} [|\bar{e}_1]^{\mathfrak{a}} [|\bar{e}_2]^{\mathfrak{b}} \cdots$ auch $\mathfrak{r} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = n$

ist, und $e_0, e_1, e_2, \cdots$ einen einfachen Normverein bilden, und die Summe ſich auf alle möglichen ganzen Werte $\mathfrak{r}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ von 0 bis n bezieht, welche der in Klammern beigefügten Bedingung genügen.

Beweis. Nach der Annahme ist $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, wo $x_0 = 1$ ist. Ferner da $x_0 = 1$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots \leqq n$ ist, ſo ist

$$S\alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots = S\alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots} x_0^{\mathfrak{r}} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots$$

mit der Bedingung, dass $\mathfrak{r} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = n$ ſei. Der gewonnene Ausdruck ist aber nach 19

$$= S\alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots} [x\bar{e}_0]^{\mathfrak{r}} [x\bar{e}_1]^{\mathfrak{a}} [x\bar{e}_2]^{\mathfrak{b}} \cdots$$

$$= A x^n.$$

31. **Satz. Jeder Verein von ganzen Zahlformeln n-ten Grades beliebig vieler veränderlicher Grösen lässt ſich in der Form**

$$A x^n$$

darstellen, wo A ein N-Lückenausdruck ist.

Beweis. Unmittelbar aus 30 verbunden mit 21.

32. **Satz. Statt einen Lückenausdruck mit einer Fachreihe (Faktorenreihe) $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ zu weben oder zu multipliziren, kann man ihn mit den Fachen fortschreitend weben, oder**

$$A(x_1 x_2 \ldots x_n) = A x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Beweis 1. Es ſei zunächst A ein Lückenzeug mit $n+m$ Lücken, ſo ist nach 27

$$A(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{S}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man auf alle möglichen verschiedenen Arten $x_1, x_2, \ldots x_n$ in die $n+m$ Lücken von A verteilt. Ebenſo ſei S_1 die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1 nach und nach in jede einzelne Lücke des Produktes A einſetzt; ferner gehe S_2 aus S_1 hervor, indem man in jedem Gliede von S_1 die Gröse x_2 nach und nach in jede der $n+m-1$ Lücken einzeln einſetzt, und die ſämtlichen ſo erhaltenen Glieder zufügt, ſomit ist S_2 zugleich die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man $x_1 x_2$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in zwei der Lücken von A einfügt. Auf entsprechende Weiſe möge S_3 aus S_2 abgeleitet ſein u. ſ. w. Dann ist nach 27

$$A x_1 = \frac{S_1}{n+m}, \quad A x_1 x_2 = \frac{S_2}{(n+m)(n+m-1)}$$

endlich

$$A x_1 x_2 \ldots x_n = \frac{S}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}$$
$$= A(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

2. Es ſei A ein beliebiger Lückenausdruck $= S B_a$, wo jedes B_a ein Lückenzeug mit $n+m$ Lücken ist, ſo ist

$$A(x_1 x_2 \ldots x_n) = (S B_a)(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$= S B_a(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad \text{(nach 29)}$$
$$= S B_a x_1 x_2 \ldots x_n \qquad \text{(nach 32,}_1\text{)}$$
$$= (S B_a) x_1 x_2 \ldots x_n \qquad \text{(nach 29)}$$
$$= A x_1 x_2 \ldots x_n$$

Satz. In dem Ausdrucke $A x_1 x_2 \ldots x_n$, wo A ein beliebiger Lückenausdruck mit $n+m$ Lücken, kann man in der Grösenreihe $x_1 x_2 \ldots x_n$ beliebig Klammern ſetzen oder weglassen ohne Aenderung des Wertes. 33.

Beweis. Unmittelbar aus 30.

Satz. Die Ordnung der Fache oder Faktoren, welche in einen Lückenausdruck eintreten ſollen, ist gleichgültig für das Ergebniss oder 34.

$$A x_1 x_2 \ldots = A x_r x_s \ldots, \qquad \text{wo } A \text{ ein Lückenausdruck}$$

und $x_1 x_2 \ldots$ und $x_r x_s \ldots$ dieſelben Fache nur in verschiedener Ordnung enthalten.

Beweis. Es ſei $A = SB_a$, wo jedes B_a ein Lückenzeug ist, ſo ist

$$Ax_1x_2\ldots = A(x_1x_2\ldots) \quad \text{(nach 32)}$$
$$= (SB_a)(x_1x_2\ldots x_n) = SB_a(x_1x_2\ldots) \quad \text{(nach 29)}$$

Nun ist aber nach 27 $B_a(x_1x_2\ldots)$ die Summe ſämtlicher Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man $x_1, x_2, \ldots$ in allen möglichen Anordnungen in die Lücken von B_a hineinfügt, geteilt durch die Anzahl dieſer Tausche, alſo ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Grösen $x_1, x_2, \ldots$ in dem Ausdrucke $B_a(x_1x_2\ldots)$ vorkommen, d. h. $B_a(x_1x_2\ldots) = B_a(x_rx_s\ldots)$, wenn $x_1x_2\ldots$ und $x_rx_s\ldots$ dieſelben Fache nur in verschiedener Folge enthalten. Alſo ist

$$Ax_1x_2\ldots = SB_a(x_rx_s\ldots) = (SB_a)(x_rx_s\ldots) \quad \text{(nach 29)}$$
$$= A(x_rx_s\ldots) = Ax_rx_s\ldots \quad \text{(nach 32)}$$

35. **Satz. Wenn irgend eines der Fache oder Faktoren, welche mit einem Lückenausdrucke gewebt oder multiplizirt ſind, eine Summe ist, ſo kann man statt der Summe die einzelnen Stücke ſetzen, und die ſo erhaltenen Lückenausdrücke zufügen oder**

$$At(x + y + \ldots)u = Atxu + Atyu + \ldots$$

wo t und u Reihen von Fachen oder Faktoren und A ein Lückenausdruck ist.

Beweis. Nach 34 ist $At(x + y + \ldots)u = Atu(x + y + \ldots)$. Hier ist Atu wieder ein Lückenausdruck, und daher hat $Atu(x + y + \ldots)$ die Form einer Summe von Zeugen, deren jedes $(x + y + \ldots)$ als ein Fach enthält, alſo die Form $P(x + y + \ldots) + Q(x + y + \ldots) + \ldots$. Dies ist aber nach 73 gleich $Px + Py + \ldots + Qx + Qy + \ldots = Px + Qx + \ldots + Py + Qy + \ldots = Atux + Atuy + \ldots = Atxu + Atyu + \ldots$.

36. **Satz. Für die Lückenausdrücke gelten alſo alle Geſetze der Verwebung, ſowohl das Geſetz der Einigung als auch das der Vertauschung und das der Beziehung der Fache oder Faktoren.**

Beweis. Unmittelbar aus 33, 34 und 35.

4. Die Hauptbrüche oder die Hauptquotienten.

In der Zahlenlehre genügte für den Bruch $\frac{b}{a}$ die Erklärung, es ſolle der Bruch die Gröse ſein, welche mit a verwebt oder multiplizirt b giebt. Wollte man dieſe Erklärung auch für die Flechtbrüche einführen, ſo würde man hieraus nur die Vielfachenſummen der Gröse a erhalten. In einem Hauptgebiete nter Stufe hat man aber Grösen erster Stufe, welche die Vielfachenſummen von n gegenſeitig freien Grösen $a_1, \cdots a_n$ ſind. Es genügt hierfür die erwähnte Erklärung nicht; hier wird der Bruch nur dann vollständig bestimmt ſein, wenn bestimmt ist, was die Flechtung des Bruches mit n gegenſeitig freien Grösen $a_1 \cdots a_n$ ergiebt, dies wird in der folgenden Erklärung geschehen, und findet dieſe damit ihre Rechtfertigung.

Die Gebrüder Hermann und Robert Grassmann haben im Jahre 1847 dieſe Hauptbrüche oder Quotienten in allgemeinster Form behandelt, indem ſie im Nenner der Hauptbrüche Grösen beliebiger aber gleicher Klasse und ebenſo im Zähler Grösen beliebiger aber gleicher Klasse eingeführt und die Geſetze dafür entwickelt haben. Bei einer spätern Bearbeitung ergab ſich aber, dass man dieſelben Ergebnisse erhält, wenn man im Nenner nur Grösen erster Klasse bez. im Gebiete nter Stufe auch (n—1)ter Klasse zulässt, und dass dies doch wesentlich einfacher wird und daher den Vorzug verdient. Der Bruder hat deshalb in ſeinem Werke von 1862 bereits dieſe Umgestaltung vorgenommen. Der Name Hauptbruch ist von mir eingeführt worden, um dieſen Bruch der Erweiterungslehre von dem Zahlbruche zu unterscheiden. Der Name bezeichnet den Bruch ſogleich als auf ein Hauptgebiet bezüglich; er bezeichnet die Beziehung des Bruches zu dieſem Hauptgebiete, wodurch auch die Form des Bruches bestimmt ist.

Erklärung. Der Hauptbruch oder der Hauptquotient 37.

$$Q = \frac{b_1, b_2, \ldots b_n}{a_1, a_2, \ldots a_n}$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_n$ n gegenſeitig freie Grösen erster Klasse bez. (n—1)ter Klasse in einem Hauptgebiete nter Stufe ſind, heist die Gröse, welche mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ webt oder multiplizirt, beziehlich die Werte $b_1, b_2, \ldots b_n$ liefert, ſo dass

$$\frac{b_1, b_2, \ldots b_n}{a_1, a_2, \ldots a_n} a_a = b_a.$$

Und zwar heisen die Zähler $b_1, b_2, \ldots$ die entsprechenden Zähler zu den Nennern $a_1, a_2, \ldots$

Zwei Hauptbrüche bez. deren Vielfachensummen heisen dann und nur dann gleich, wenn sie beide mit jeder Gröse erster Klasse des Hauptgebietes gewebt oder multiplizirt zwei gleiche Grösen geben.

Umkehrbar heist der Hauptbruch

$$Q = \frac{b_1, b_2, \ldots b_n}{a_1, a_2, \ldots a_n}$$

wenn auch die Grösen des Zählers $b_1, b_2, \ldots b_n$ n gegenseitig freie Grösen derselben 1ten bez. (n—1)ten Klasse sind, wie die Grösen des Nenners. Die Gröse

$$\frac{1}{Q} = \frac{a_1, a_2, \ldots a_n}{b_1, b_2, \ldots b_n}$$

heist der umgekehrte Hauptbruch.

38. **Satz. Zwei Hauptbrüche und zwei Vielfachensummen von Hauptbrüchen, welche in einem Hauptgebiete nter Stufe mit n gegenseitig freien Grösen erster Klasse gewebt oder multiplizirt, Gleiches geben, sind einander gleich.**

Beweis. Es seien Q und Q_1 die Hauptbrüche oder die Vielfachensummen derselben und seien $a_1, \ldots a_n$ die n gegenseitig freien Grösen erster Klasse im Hauptgebiete nter Stufe, welche mit ihnen gewebt oder multiplizirt Gleiches liefern; es sei also nach der Voraussetzung

$$Qa_1 = Q_1a_1, \; Qa_2 = Q_1a_2, \ldots \; Qa_n = Q_1a_n.$$

Es sind nun nach 37 die beiden Ausdrücke Q und Q_1 dann und nur dann gleich, wenn sie mit jeder Gröse erster Klasse des Hauptgebietes gewebt oder multiplizirt Gleiches liefern. Jede Gröse erster Klasse des Hauptgebietes nter Stufe lässt sich aber nach 24 als Vielfachensumme von je n gegenseitig freien Grösen dieses Gebietes $a_1, \ldots a_n$ darstellen. Es sei demnach

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$$

dann ist

$$\begin{aligned} Qx &= Q(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) \\ &= \alpha_1 Qa_1 + \ldots + \alpha_n Qa_n && \text{(nach Ausdehnungslehre 73)} \\ &= \alpha_1 Q_1 a_1 + \ldots + \alpha_n Q_1 a_n && \text{(nach Annahme)} \\ &= Q_1(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) && \text{(nach Ausdehnungslehre 73)} \\ &= Q_1 x. \end{aligned}$$

39. **Satz. Einen Hauptbruch vervielfacht man mit einer Zahl, indem man jeden Zähler mit dieser Zahl vervielfacht, und Hauptbrüche von gleichen Nennern fügt man zu, indem man die ent-**

sprechenden Zähler zufügt, wobei in beiden Fällen die Nenner ungeändert bleiben, oder

$$\beta\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \gamma\frac{c_1, c_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \ldots$$
$$= \frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \ldots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \ldots), \ldots}{a_1 \quad , a_2 \quad , \ldots}$$

Beweis. Wenn der Satz gelten soll, so müssen nach 38 beide Seiten der vorstehenden Gleichung mit jeder der Grösen $a_1, \ldots a_n$ gewebt oder multiplizirt, gleiche Grösen geben. Nun ist nach Ausdehnungslehre 70

$$\left(\beta\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \gamma\frac{c_1, c_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} + \ldots\right)a_a$$
$$= \beta\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}a_a + \gamma\frac{c_1, c_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}a_a + \ldots$$
$$= \beta b_a + \gamma c_a + \ldots \qquad (37)$$

Ferner ist

$$\frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \ldots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \ldots), \ldots}{a_1 \quad , a_2 \quad , \ldots}a_a$$
$$= \beta b_a + \gamma c_a + \ldots \qquad (37)$$

Bezeichnen wir also der Kürze wegen die linke Seite der zu erweisenden Gleichung mit L, die rechte mit R, so wird für jeden Zeiger a

$$La_a = Ra_a.$$

Folglich ist nach 38 auch $L = R$.

Satz. Jeden Hauptbruch im Hauptgebiete nter Stufe kann man auf die Form bringen, dass seine Nenner n beliebige gegenseitig freie Grösen erster Klasse dieses Gebietes sind, oder 40.

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} = \frac{S^1\alpha_a b_a, S^2\alpha_a b_a, \ldots}{S^1\alpha_a a_a, S^2\alpha_a a_a, \ldots},$$ **wo** $^b\alpha_a$ **Zahlen und** $S^1\alpha_a a_a$, $S^2\alpha_a a_a, \ldots$ **n gegenseitig freie Grösen sind.**

Beweis. Nach Ausdehnungslehre 70 ist

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}S^b\alpha_a a_a = S^b\alpha_a\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}a_a = S^b\alpha_a b_a \qquad \text{(nach 37)}$$

Ebenso ist

$$\frac{S^1\alpha_a b_a, S^2\alpha_a b_a, \ldots}{S^1\alpha_a a_a, S^2\alpha_a a_a, \ldots}(S^b\alpha_a a_a) = S^b\alpha_a b_a \qquad \text{(nach 37)}$$

mithin liefern beide Hauptbrüche mit $S^b\alpha_a a_a$ gewebt oder multiplizirt, für jeden Wert des b von 1 bis n gleiche Grösen, folglich sind sie nach 38, da die n Grösen $S^1\alpha_a a_a, S^2\alpha_a a_a, \ldots$ nach der Voraussetzung gegenseitig frei sind, einander gleich.

41. **Satz.** **Wenn $e_1, e_2, \dots e_n$ die ursprünglichen Einheiten des Hauptgebietes $n$ter Stufe sind, und ${}^{\mathfrak{b}}E_a$ der Kürze wegen den Hauptbruch bezeichnet, dessen Nenner die ursprünglichen Einheiten sind, auch von den Zählern derjenige, welcher dem Nenner $e_{\mathfrak{b}}$ entspricht, gleich e_a ist, während alle übrigen Zähler desselben null sind, d. h. wenn**

$$ {}^{\mathfrak{b}}E_a\, e_{\mathfrak{b}} = e_a \text{ und } {}^{\mathfrak{b}}E_a\, e_{\mathfrak{c}} = 0, \text{ wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b} $$

ist, so lassen sich die n^2 Ausdrücke, welche aus ${}^{\mathfrak{b}}E_a$ hervorgehen, indem man statt $\mathfrak{b}$ und a nach und nach die Zahlen $1 \dots n$ einsetzt, als Brucheinheiten setzen, d. h. es lassen sich alle Hauptbrüche desselben Hauptgebietes als Vielfachensummen derselben darstellen, während sie selbst gegenseitig freie Grösen sind **oder**

$$ \frac{S^1\alpha_a e_a,\ S^2\alpha_a e_a, \dots}{e_1\ \ ,\ e_2\ \ ,\dots} = S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{b}}E_a, \text{ wo } {}^{\mathfrak{b}}E_a = \frac{{}^1e_{\mathfrak{b}},\ {}^2e_{\mathfrak{b}}, \dots}{{}^1e_a,\ {}^2e_a, \dots} $$

und die Grösen ${}^{\mathfrak{b}}E_a$ gegenseitig frei sind.

Beweis. Nach 37 ist

$$ \frac{S^1\alpha_a e_a,\ S^2\alpha_a e_a, \dots}{e_1\ \ ,\ e_2\ \ ,\dots}\, e_{\mathfrak{b}} = S^{\mathfrak{b}}\alpha_a e_a $$

Nach Ausdehnungslehre 70 ist aber auch

$$ S^{\mathfrak{c}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{c}}E_a\, e_{\mathfrak{b}} = S^{\mathfrak{c}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{c}}E_a\, e_{\mathfrak{b}} = S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{b}}E_a\, e_{\mathfrak{b}} \qquad \text{(nach Annahme)} $$
$$ = S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, e_a \qquad \text{(nach Annahme)} $$

da nach der Annahme ${}^{\mathfrak{c}}E_a\, e_{\mathfrak{b}} = 0$ für $\mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b}$ und ${}^{\mathfrak{b}}E_a\, e_{\mathfrak{b}} = e_a$ ist. Beide Ausdrücke geben also mit jeder der n gegenseitig freien Grösen $e_1, \dots e_n$ gewebt oder multiplizirt gleiche Grösen, sie sind also nach 38 einander gleich.

Die Grösen ${}^{\mathfrak{b}}E_a$ sind aber auch alle gegenseitig frei. Denn angenommen, es wäre eine derselben eine Vielfachensumme der andern, so müsste $S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{b}}E_a = 0$ also auch sein

$$ 0 = (S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{b}}E_a)e_{\mathfrak{c}} = S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{b}}E_a\, e_{\mathfrak{c}} \qquad \text{(nach Ausdehnungslehre 70)} $$
$$ = S^{\mathfrak{c}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{c}}E_a\, e_{\mathfrak{c}} \qquad \text{(nach Annahme)} $$
$$ = S^{\mathfrak{c}}\alpha_a\, e_a \qquad \text{(nach Annahme)} $$

da nach der Annahme ${}^{\mathfrak{b}}E_a\, e_{\mathfrak{c}} = 0$ für $\mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b}$ und ${}^{\mathfrak{c}}E_a\, e_{\mathfrak{c}} = e_a$ ist.

Wenn aber $0 = S^{\mathfrak{c}}\alpha_a\, e_a = {}^{\mathfrak{c}}\alpha_1\, e_1 + {}^{\mathfrak{c}}\alpha_2\, e_2 + \dots$ ist, so müssen, da die ursprünglichen Einheiten gegenseitig frei sind, die sämmtlichen Vorzahlen nach 14 Null sein, mithin

${}^{\mathfrak{c}}\alpha_a = 0 = {}^{\mathfrak{b}}\alpha_a$ für $\mathfrak{c}$ von 1 bis n, oder für $\mathfrak{b}$ von 1 bis n, mithin sind auch in der Gleichung

$$ S^{\mathfrak{b}}\alpha_a\, {}^{\mathfrak{b}}E_a = 0 $$

alle Vorzahlen null, d. h. nach 14 es sind alle n^2 Grösen ${}^{\mathfrak{b}}E_a$ gegenseitig frei.

Satz. Jeder Bruch lässt sich als Lückenausdruck mit einfacher 42.
Lücke darstellen, und zwar ist, wenn die Nenner $a_1, \ldots a_n$ einen einfachen Normverein bilden,

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} = \overset{n}{[}l\bar{a}_1]b_1 + \overset{n}{[}xl\bar{a}_2]b_2 + \ldots$$

Beweis. Die beiden Seiten der Gleichung sind nach 6 und 14 gleich, wenn sie mit jeder Gröse erster Klasse x gewebt oder multiplizirt Gleiches liefern. Sei nun $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots$, so ist nach 35

$$(\overset{n}{[}l\bar{a}_1]b_1 + \overset{n}{[}l\bar{a}_2]b_2 + \ldots)x = \overset{n}{[}x\bar{a}_1]b_1 + \overset{n}{[}x\bar{a}_2]b_2 + \ldots$$

also, da nach Ausdehnungslehre 218 $a_\mathfrak{a} \bar{a}_\mathfrak{a} = 1$ und $a_\mathfrak{a} \bar{a}_\mathfrak{b} = 0$, wenn $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, so ist nach 22 der Ausdruck $= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots$
Aber ebenso ist auch

$$\frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots} x = \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots)$$

$$= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots \qquad \text{(nach 37).}$$

Beide Seiten der zu erweisenden Gleichung liefern also mit jeder Gröse erster Klasse gewebt oder multiplizirt Gleiches, sie sind also selbst gleich.

Der Hauptbruch ist also nur eine einfachere Form des Lückenausdruckes mit einer Lücke, und kann also auch jeder Verein beliebig vieler Zahlformeln ersten Grades von beliebig vielen Zahlgrösen als Zeug oder Produkt eines Hauptbruches in eine Hauptgröse dargestellt werden.

5. Die Höhenwerte und die Hauptzahlen der Hauptbrüche.

43. **Erklärung. Der Höhenwert oder Potenzwert eines Hauptbruches heist das bezügliche Flach der Zähler, deren Nenner den Verein der ursprünglichen Einheiten bilden. Das Zeichen des Höhenwertes eines Bruches mit n Nennern ist $[Q^n]$.**

Wenn $Q = \frac{b_1, b_2, \cdots b_n}{e_1, e_2, \cdots e_n}$ ist, wo $e_1, e_2, \cdots e_n$ der Verein der ursprünglichen Einheiten ist, so ist also $[Q^n] = \overset{n}{[}b_1 b_2 \cdots b_n]$.

44. **Satz. Der Höhenwert oder Potenzwert eines Hauptbruches ist gleich dem bezüglichen Flache der Zähler geteilt durch das bezügliche Flach der Nenner oder**

wenn $Q = \frac{b_1, b_2, \ldots}{a_1, a_2, \ldots}$ **ist, so ist** $[Q^n] = \frac{\overset{n}{[}b_1 b_2 \ldots]}{\overset{n}{[}a_1 a_2 \ldots]}$.

Beweis. Um den Hauptbruch auf die Nenner $e_1, e_2, \ldots e_n$ zu bringen, setze ich $Qe_c = c_c$ für jeden Zeiger c von 1 bis n; dann ist nach 40

$$Q = \frac{c_1, c_2, \ldots c_n}{e_1, e_2, \ldots e_n} \qquad \text{und } [Q^n] = \overset{n}{[}c_1 c_2 \ldots c_n] \qquad \text{nach 43}$$

Seien nun die Grösen $a_1, a_2, \ldots$ als Vielfachensummen der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \ldots$ dargestellt und sei für den Zeiger b von 1 bis n

$$a_b = S^b \alpha_a e_a, \text{ so ist } b_b = Qa_b = Q \cdot S^b \alpha_a e_a = S^b \alpha_a Qe_a = S^b \alpha_a c_a$$

mithin ist
$$\frac{\overset{n}{[}b_1 b_2 \ldots]}{\overset{n}{[}a_1 a_2 \ldots]} = \frac{\overset{n}{[}(S^1 \alpha_a c_a)(S^2 \alpha_a c_a) \ldots]}{\overset{n}{[}(S^1 \alpha_a e_a)(S^2 \alpha_a e_a) \ldots]}$$

$$= \frac{S(^1\alpha_a {}^2\alpha_b \ldots)\overset{n}{[}c_a . c_b \ldots]}{S(^1\alpha_a {}^2\alpha_b \ldots)\overset{n}{[}e_a . e_b \ldots]} \quad \text{(nach Ausdehnungslehre 72)}$$

$$= \frac{S(-1)^r(^1\alpha_a {}^2\alpha_b \ldots)\overset{n}{[}c_1 c_2 \ldots]}{S(-1)^r(^1\alpha_a {}^2\alpha_b \ldots)\overset{n}{[}e_1 e_2 \ldots]} \quad \text{(nach Ausdehnungsl. 91)}$$

wo $a, b, \ldots$ alle möglichen verschiedenen Anordnungen der Zeiger $1, 2, \ldots$ darstellen, und r die Anzahl der Zeigerpare bezeichnet, die unten in

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ entgegengeſetzt geordnet ſind, als oben in 1, 2, ... Hier heben ſich die beiden Summen $S(-1)^r({}^1\alpha_a{}^2\alpha_b\ldots)$ und da $[e_1, e_2, \ldots] = 1$ ist, ſo ist

$$\frac{\overset{n}{[}b_1\, b_2 \ldots]}{\overset{n}{[}a_1\, a_2 \ldots]} = [c_1\, c_2 \ldots] = [Q^n].$$

Satz. Wenn Q und Q_1 Hauptbrüche mit n Nennern ſind, und zu einander in der Zahlbeziehung 45.

$$Q = \alpha Q_1$$

stehen, ſo stehen ihre Höhenwerte oder Potenzwerte in der Zahlbeziehung

$$[Q^n] = \alpha^n[Q_1{}^n].$$

Beweis. Es ſei

$$Q_1 = \frac{a_1, \ldots a_n}{e_1, \ldots e_n}, \text{ alſo } Q = \frac{\alpha a_1, \ldots \alpha a_n}{e_1, \ldots e_n},$$

ſo ist nach 43

$$[Q^n] = \overset{n}{[}\alpha a_1 . \alpha a_2 \ldots \alpha a_n] = \alpha^n \overset{n}{[}a_1 a_2 \ldots a_n] \quad \text{(n. Ausdehnungsl. 68)}$$
$$= \alpha^n[Q_1{}^n] \quad \text{(nach 43).}$$

Satz. Wenn zwischen den Zählern eines Bruches eine Zahlbeziehung herrscht, ſo lässt ſich der Bruch stets auf die Form bringen, dass alle hörigen Zähler null werden, und zwischen den übrigen Zählern keine Zahlbeziehung stattfindet, und zwar wenn $e_1, \ldots e_n$ die Nenner, $a_1, \ldots a_n$ die Zähler des Bruches Q ſind, und zwischen $a_1, \ldots a_m$ keine Zahlbeziehung stattfindet, aber die übrigen n — m Zähler zu ihnen hörig ſind, so dass 46.

$$a_{m+b} = {}^b\alpha_1\, a_1 + {}^b\alpha_2\, a_2 + \ldots + {}^b\alpha_m\, a_m \quad \text{(a)}$$

ist, ſo ist

$$Q = \frac{a_1, a_2, \ldots a_m, \; 0, \; 0, \ldots 0}{e_1, e_2, \ldots e_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n}, \text{ wo}$$
$$c_{m+b} = {}^b\alpha_1\, e_1 + {}^b\alpha_2\, e_2 + \ldots + {}^b\alpha_m\, e_m - e_{m+b}$$
$$= \frac{e_1, e_2, \ldots e_m}{a_1, a_2, \ldots a_m}\, a_{m+b} - e_{m+b}$$

ist. Und alle zu $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n$ hörigen Grösen, aber auch keine andern Grösen geben mit Q gewebt oder multiplizirt null.

Beweis. Betrachten wir zunächst das Zeug oder Produkt Qc_{m+b}; es ist

$$Qc_{m+b} = {}^b\alpha_1\, Qe_1 + {}^b\alpha_2\, Qe_2 + \ldots + {}^b\alpha_m\, Qe_m - Qe_{m+b}$$
$$= {}^b\alpha_1\, a_1 + {}^b\alpha_2\, a_2 + \ldots + {}^b\alpha_m\, a_m - a_{m+b} \quad \text{(nach 37)}$$

da nach der Annahme $a_1, a_2, \ldots a_n$ die zu den Nennern $e_1, e_2, \ldots e_n$

gehörigen Zähler des Bruches Q ſind, und dies (nach a) $= 0$. Alſo ſind die zu den Nennern $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n$ gehörigen Zähler null.

Es ſind aber ferner auch alle Nenner, $e_1, e_2, \ldots e_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n$ gegenſeitig frei. Setzen wir nämlich der Abkürzung wegen

$${}^{\mathfrak{b}}\alpha_1 e_1 + {}^{\mathfrak{b}}\alpha_2 e_2 + \ldots + {}^{\mathfrak{b}}\alpha_m e_m = s_{\mathfrak{b}}, \text{ ſo ist}$$

$$c_{m+\mathfrak{b}} = s_{\mathfrak{b}} - e_{m+\mathfrak{b}}, \text{ mithin ist}$$

$$\overset{n}{[}e_1 e_2 \ldots e_m . c_{m+1} \ldots c_n] = \overset{n}{[}e_1 . e_2 \ldots e_m (s_1 - e_{m+1}) \ldots (s_{n-m} - e_n)]$$

$$= \pm \overset{n}{[}e_1 e_2 \ldots e_n]$$

denn da $s_1, s_2, \ldots$ Vielfachenſummen der Grösen $e_1, e_2, \ldots e_m$ ſind, ſo können ſie nach Ausd. 109 weggelassen werden. Das Flach ist alſo von Null verschieden, d. h. $e_1, e_2, \ldots e_m, c_{m+1}, \ldots c_n$ ſind nach Ausdehnungslehre 93 gegenſeitig freie Grösen, mithin kann nach 40 Q als Hauptbruch in der im Satze angegebenen Weiſe dargestellt werden.

Da ferner $Qc_{m+\mathfrak{b}} = 0$ ist, ſo giebt Q auch mit jeder Vielfachenſumme der Grösen $c_{m+1} \ldots c_n$ gewebt oder multiplizirt null. Umgekehrt muss auch jede Gröse d, welche mit Q gewebt oder multiplizirt null giebt, d. h. für welche $dQ = 0$ ist, eine Vielfachensumme von $c_{m+1} \ldots c_n$ ſein. Denn was auch d für eine Gröse ſein mag, immer muss ſie doch dem Hauptgebiete nter Stufe angehören, d. h. nach Ausdehnungslehre 24 eine Vielfachenſumme der Grösen $e_1, e_2, \ldots e_m, c_{m+1} \ldots c_n$ ſein, d. h. ſich in der Form

$$d = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m + s$$

darstellen lassen, wo s eine Vielfachenſumme der Grösen $c_{m+1} \ldots c_n$ ist. Da nun $Qe_a = a_a$ und $Qc_{m+\mathfrak{b}} = 0$ ist, ſo wird

$$0 = dQ = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m$$

alſo ſind nach Ausd. 106 die Vorzahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ſämmtlich null und ist mithin $d = s$, d. h. eine Vielfachensumme von $c_{m+1} \ldots c_n$.

47. **Erklärung. Eine Hauptzahl des Hauptbruches Q heist die Zahl ϱ, wenn der Bruch Q mit einer von Null verschiedenen Gröse erster Klasse x gewebt oder multiplizirt, das ϱfache dieser Gröse giebt, ſo dass $Qx = \varrho x$ ist. Die Zahl ϱ kann hierbei auch eine Igröse werden. Das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet heist das Gebiet, welchem alle Grösen x angehören, welche jener Gleichung genügen.**

48. **Satz. Jeder Hauptbruch Q mit n Nennern hat auch n Hauptzahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ und zwar ſind die n Hauptzahlen die Wurzeln der Gleichung**

$$\text{(a)} \qquad \alpha_0 \varrho^n - \alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} - \ldots + (-1)^n \alpha_n = 0$$

wo α_a aus dem Flache $\overset{n}{[}e_1 e_2 \ldots e_n]$ der n Nenner dadurch hervor-

geht, dass man α der Grösen $e_1, e_2, \ldots e_n$ in die entsprechenden Grösen $Qe_1, Qe_2, \ldots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen $n - \alpha$ Grösen unverändert lässt.

Das Zeug oder Produkt dieser n Wurzeln ist gleich dem Höhenwerte des Hauptbruches, d. h. $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n = [Q^n]$.

Das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet erhält man, wenn man $\varrho - Q$ als einen Hauptbruch B nach 46 darstellt, von dessen Zählern einer oder mehre null sind, während die übrigen Zähler gegenseitig frei sind, und zwar ist das Gebiet derjenigen Nenner dieses Bruches B, deren entsprechende Zähler null sind, das verlangte Hauptgebiet.

Beweis. Es sei Q der Hauptbruch mit den n Nennern $e_1, e_2, \ldots e_n$, es sei ferner ϱ eine Hauptzahl dieses Bruches und sei $x = Sx_\alpha e_\alpha$ eine von Null verschiedene Gröse, für welche $Qx = \varrho x$ sei, so ist $(\varrho - \alpha)x = 0$, und setzt man für x seinen Wert, so erhält man

(b) $0 = Sx_\alpha(\varrho - Q)e_\alpha = Sx_\alpha c_\alpha$ wo $c_\alpha = (\varrho - Q)e_\alpha$ ist.

Da nun x von Null verschieden ist, so muss auch mindestens eine der Zahlen $x_1, \ldots x_n$ von Null verschieden sein, mithin nach Ausd. 14 zwischen $c_1, \ldots c_n$ eine Hörigkeit stattfinden; es muss also nach Ausd. 93 ihr Flach oder kombinatorisches Produkt null sein, d. h.

(c) $0 = \overset{n}{[}c_1 c_2 \ldots c_n]$.

Nach 44 muss dann aber auch der Höhenwert des Bruches $\varrho - Q$ null sein. Umgekehrt, wenn die Gleichung (c) erfüllt wird, so gilt nach 102 auch die Gleichung (b), d. h. giebt es dann eine Gröse $x \gtrless 0$, welche der Gleichung $Qx = \varrho x$ genügt, d. h. ϱ ist dann eine Hauptzahl.

Setzt man nun in der Gleichung (b) statt c_α seinen Wert $c_\alpha = (\varrho - Q)e_\alpha$, so erhält man

$$0 = \overset{n}{[}(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \ldots (\varrho e_n - Qe_n)],$$

oder indem man die Klammern löst

(a) $\alpha_0 \varrho^n - \alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} - \ldots + (-1)^n \alpha_n = 0$,

wo α_α aus dem Produkte $\overset{n}{[}e_1 e_2 \ldots e_n]$ dadurch hervorgeht, dass man α der Grösen $e_1, e_2, \ldots e_n$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in die entsprechenden Grösen $Qe_1, Qe_2, \ldots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen unverändert lässt. Die n Wurzeln $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ dieser Gleichung (a) sind also die gesuchten Hauptzahlen; das Zeug oder Produkt derselben ist nach dem Newtonschen Satze gleich $\alpha_n : \alpha_0$, d. h. nach 44 gleich dem Höhenwerte von Q.

Die Grösen x sind ferner durch die Gleichung (b) bestimmt. Nach dieser Gleichung herrscht zwischen den Grösen $c_1, c_2, \ldots c_n$ eine

Hörigkeit. Folglich lässt ſich nach Ausdehnungslehre 19 aus den Grösen $c_1, \ldots c_n$ ein Verein von weniger als n Grösen, etwa $c_1, c_2, \ldots c_m$, ausſondern, welche gegenſeitig frei ſind, die übrigen Grösen $(c_{m+1}, \ldots c_n)$ ſind Vielfachenſummen derſelben; dann aber lässt ſich der Bruch $\varrho - Q$, dessen zu den Nennern $e_1, \ldots e_n$ gehörige Zähler $c_1, \ldots c_n$ ſind, da $c_a = (\varrho - Q)e_a$ ist, nach 46 auf die Form bringen, dass unter den Zählern $n - m$ derſelben null werden; die zugehörigen Nenner ſeien $a_{m+1}, \ldots a_n$; ſo haben nach 46 alle Vielfachenſummen x von $a_{m+1}, \ldots a_n$, aber auch keine andern Grösen die Eigenschaft, dass $(\varrho - Q)x = 0$ ſei, d. h. dass $Qx = \varrho x$ wird, d. h. alſo, das Gebiet $a_{m+1} \ldots a_n$ ist das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet.

49. **Satz. Wenn die n Hauptzahlen $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ eines Hauptbruches Q alle von einander verschieden ſind, ſo ſind die n zugehörigen Hauptgebiete alle von erster Stufe und stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.**

Beweis. Es lässt ſich nach 48 zu jeder der Grösen $\varrho_1, \ldots \varrho_n$, d. h. zu ϱ_a, eine von Null verschiedene Gröse erster Klasse finden, welche mit Q gewebt oder multiplizirt ihr ϱ_a-faches liefert. Es ſeien $a_1, \ldots a_n$ dieſe Grösen, ſo dass $Qa_a = \varrho_a a_a$ ist. Angenommen nun, es herrsche zwischen $a_1, \ldots a_n$ eine Hörigkeit, ſo müssten ſich nach Ausdehnungslehre 19 aus ihnen m Grösen, etwa $a_1, \ldots a_m$, ausſondern lassen, welche gegenſeitig frei ſind, ſo dass jede der übrigen, a_{m+b} eine Vielfachenſumme derſelben wäre. Es ſei $a_{m+b} = \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_m a_m$, ſo muss, da a_{m+b} von Null verschieden ist, auch mindestens eine der Vorzahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ von Null verschieden ſein. Es ſei dies z. B. α_1. Nun hat man

$$Qa_{m+b} = QS\alpha_a a_a = S\alpha_a Qa_a = S\alpha_a \varrho_a a_a$$

da nach der Vorausſetzung $Qa_a = \varrho_a a_a$ ist, mithin wird

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varrho_1 a_1 + \ldots \alpha_m \varrho_m a_m &= Qa_{m+b} = \varrho_{m+b} a_{m+b} \\ &= \varrho_{m+b} \alpha_1 a_1 + \ldots \varrho_{m+b} \alpha_m a_m, \end{aligned}$$

folglich ſind nach Ausdehnungslehre 16 die entsprechenden Vorzahlen gleich, alſo ist $\alpha_1 \varrho_1 = \alpha_1 \varrho_{m+b}$, d. h. da $\alpha_1 \gtrless 0$, ist $\varrho_{m+b} = \varrho_1$, was gegen die Vorausſetzung ist. Mithin kann zwischen $a_1, \ldots a_n$ keine Hörigkeit herrschen. Es kann alſo auch keins der Hauptgebiete von höherer als erster Stufe ſein. Denn wäre z. B. das zu ϱ_1 gehörige Hauptgebiet von höherer Stufe, ſo müsste dies Gebiet nach Ausdehnungslehre 31 mit dem Gebiete (n—1)-ter Stufe der Grösen $a_2 \ldots a_n$ mindestens ein Gebiet erster Stufe gemein haben. Sei nun c eine (von Null verschiedene) Gröse dieſes gemeinschaftlichen Gebietes, ſo wäre

c zu $a_2, \cdots a_n$ hörig, und würde ſich doch, da es in dem zu ϱ_1 gehörigen Hauptgebiete liegt, in ſein ϱ-faches verwandeln, was wie bewieſen unmöglich ist.

Satz. Wenn unter den Hauptzahlen des Hauptbruches Q, $r = \alpha$ ſind, wo $r > 1$ ist, ſo lassen ſich r Grösen erster Klasse $a_1, \cdots a_r$ von der Art finden, dass dieſe ſowie $n - r$ der Grösen $e_1, \cdots e_n$, etwa mit $e_{\alpha+1}, \cdots e_n$, gegenſeitig frei ſind und 50.

(a) $\quad Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 \cdot Qa_2] = \alpha[a_1 a_2]$ **u. ſ. w., endlich**

$$[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} \cdot Qa_r] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_r]$$

ist. Die Gleichung für die Hauptzahlen ϱ wird dann

(b) $\quad (\varrho - \alpha)^r [a_1 a_2 \cdots a_r c_{r+1} \cdots c_n]$, **wo** $c_{r+a} = (\varrho - Q) e_{r+a}$

für jeden Zeiger a von 1 bis $n - r$ ist.

Beweis. Die Bezeichnungen ſeien dieſelben wie in Satz 48, dann ist nach dieſem Satze

(c) $\quad 0 = \overset{n}{[} c_1 c_2 \cdots c_n]$, wo $c_a = (\varrho - Q) e_a$

d. h. es ſind nach 37 die Grösen $c_1, c_2, \cdots c_n$ die zu den Nennern $e_1, e_2, \cdots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches $\varrho - Q$ und ist das Flach der n Zähler null, d. h. nach 43 auch der Höhenwert $[(\varrho - Q)^n]$ gleich null. Die Gleichung (c) bleibt aber auch bestehen, wenn man statt der Nenner $e_1, e_2, \cdots e_n$ beliebige n gegenſeitig freie Grösen erster Klasse ſetzt.

Die n Werte von ϱ, welche der Gleichung (c) genügen, ſind nach 49 die n Hauptzahlen von Q. Wenn nun r derſelben $= \alpha$ ſind, wo $r > 1$ ist, ſo muss alſo die Gleichung (c) im Ganzen für ϱ auch r Werte ergeben, welche $= \alpha$ ſind. Nach 48 lässt ſich dann aber, da zunächst ein Wert von ϱ gleich α ist, eine von Null verschiedene Gröse erster Klasse a_1 finden, für welche

(*) $\quad Qa_1 = \alpha a_1$ ist. Es ſei dieſe Gröse

$a_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, ſo muss, da $a_1 \gtrless 0$ ist, nach Ausdehnungslehre 14 mindestens eine der Vorzahlen $x_1 \cdots x_n$ ungleich Null ſein, es ſei dies x, dann ſind nach Ausdehnungslehre 21 die n Grösen $a_1, e_2, \cdots e_n$ gegenſeitig frei und können mithin nach 25 statt $e_1, e_2, \cdots e_n$ in die Gleichung (c) eingeſetzt werden. Dann wird

$$c_1 = (\varrho - Q) a_1 = \varrho a_1 - Qa_1 = \varrho a_1 - \alpha a_1 = (\varrho - \alpha) a_1 \text{ (nach *)}$$

Die Gleichung (c) wird dann

$$0 = (\varrho - \alpha) \overset{n}{[} a_1 c_2 \cdots c_n] \qquad \text{und } Qa_1 = \alpha a_1.$$

Ganz auf gleiche Weiſe ergiebt ſich, da $r > 1$ ist,

$$0 = (\varrho - \alpha)^2 \overset{n}{[} a_1 a_2 c_3 \cdots c_n] \qquad \text{und } \overset{n}{[} a_1 Qa_2] = \alpha \overset{n}{[} a_1 a_2]$$

u. ſ. w. Und wenn $\mathfrak{b} < r$ ist, ſo ist auch

(d) $$0 = (\varrho - \alpha)^{\mathfrak{b}} \overset{n}{[} a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{b}} \cdot c_{\mathfrak{b}+1} \cdots c_n] \text{ und } \overset{n}{[} a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{b}-1} \cdot Qa_{\mathfrak{b}}] = \alpha \overset{n}{[} a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{b}}]$$

und ſind nach Ausdehnungslehre 21 die n Grösen $a_1, a_2, \cdots a_{\mathfrak{b}}, e_{\mathfrak{b}+1}, \cdots e_n$ gegenſeitig frei, und dieſe Formeln bleiben bestehen bis $\mathfrak{b} = r - 1$ ist. Wenn es nun $r - 1$ Wurzeln $\varrho = \alpha$ giebt, welche alſo der Gleichung (d) genügen, ſo kann man jene Gleichung nach der Lehre der Gleichungen (Zahlenlehre 401) durch $(\varrho - \alpha)^{r-1}$ teilen und muss, da es r Wurzeln $\varrho - \alpha$ geben ſoll, der Bruch oder Quotient noch mindestens eine Wurzel $\varrho - \alpha$ darbieten, d. h. es muss für $\varrho = \alpha$ auch noch

(e) $$0 = \overset{n}{[} a_1 a_2 \cdots a_{r-1} c_r \cdots c_n]$$

ſein. Setzt man hier in den Grösen $c_r \cdots c_n$ statt ϱ den Wert α, ſo mögen dieſe Grösen in $d_r \cdots d_n$ übergehen, dann ist

(f) $$0 = \overset{n}{[} a_1 a_2 \cdots a_{r-1} d_r \cdots d_n] \quad \text{wo } d_{r+c} = (\alpha - Q) e_{r+c} \text{ ist.}$$

Nach 102 ist dann aber eine der Grösen $a_1, a_2, \cdots a_{r-1}, d_r, \cdots d_n$ zu den andern hörig, d. h. es wird

(g) $$0 = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha_r d_r + \cdots + \alpha_n d_n$$

wo mindestens eine der Vorzahlen $\gtrless 0$ ist. Hier muss eine der Vorzahlen $\alpha_r, \cdots \alpha_n$ ungleich Null ſein; denn wären ſie alle null, ſo müsste eine Hörigkeit zwischen $a_1, \cdots a_{r-1}$ herrschen, was unmöglich ist, da dieſe, wie bewieſen, gegenſeitig frei ſind. Sei alſo $\alpha_r \gtrless 0$ und ſei $\alpha_r e_r + \cdots + \alpha_n e_n = a_r$ geſetzt, ſo ſind nach Ausdehnungslehre 21 die n Grösen $a_1, a_2, \cdots a_r, e_{r+1}, \cdots e_n$ gegenſeitig frei und können mithin statt $e_1, e_2, \cdots e_n$ in die Gleichung (c) oder statt $a_1, a_2, \cdots a_{r-1}, e_r \cdots e_n$ in die Gleichung (d) eingeſetzt werden, dann wird nach (c) auch $c_r = (\varrho - Q) a_r$ und da $a_r = \alpha_r e_r + \cdots + \alpha_n e_n$ ist ſo wird

$$\begin{aligned} (\alpha - Q) a_r &= \alpha_r (\alpha - Q) e_r + \cdots + \alpha_n (\alpha - Q) e_n \\ &= \alpha_r d_r + \cdots + \alpha_n d_n && \text{(nach f)} \\ &= -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_{r-1} a_{r-1} && \text{(nach g)} \end{aligned}$$

mithin ist

$$Qa_r = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha a_r$$

und $$\overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} Qa_r] = \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha a_r)]$$

(h) $$= \alpha \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} a_r] \quad \text{(nach Ausdehnungslehre 109)}$$

Nun ist aber auch, wie bewieſen $c_r = (\varrho - Q) a_r = \varrho a_r - Qa_r$ mithin ist

$$\begin{aligned} \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} c_r] &= \varrho \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} a_r] - \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} Qa_r] \\ &= \varrho \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} a_r] - \alpha \overset{n}{[} a_1 \cdots a_{r-1} a_r] && \text{(nach h)} \\ &= (\varrho - \alpha) \overset{n}{[} a_1 \cdots a_r] \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung (d) ein, ſo erhält man

(i) $\quad (\varrho - \alpha)^{\mathfrak{b}+1}\overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_r c_{r+1} \cdots c_n] = 0$

Die Gleichung bleibt alſo auch beſtehen, wenn man r ſtatt r — 1 ſetzt, es gilt alſo die Gleichung (b) und ebenſo die Gleichung (a).

Satz. Die Grösen $a_1, a_2, \cdots a_r$, welche durch die Gleichungen 51.

(a) $\quad Qa_1 = \alpha a_1,\ \overset{n}{[}a_1\, a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}-1} Qa_{\mathfrak{a}}] = \alpha\overset{n}{[}a_1\, a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}}]$

$$\overset{n}{[}a_1\, a_2 \cdots a_{r-1}\, Qa_r] = \alpha\overset{n}{[}a_1\, a_2 \cdots a_r]$$

beſtimmt ſind, wo unter den Hauptzahlen des Bruches Q r gleich α ſind, haben die Eigenschaft, dass jede Vielfachenſumme derſelben der Gleichung

(b) $\quad Qp = \alpha p + q$

genügt, wo, wenn p eine Vielfachenſumme der Grösen $a_1, \cdots a_{\mathfrak{b}}$ ist, q eine Vielfachenſumme der Grösen $a_1, \cdots a_{\mathfrak{b}-1}$ ist.

Beweis. Aus der Formel (a) folgt unmittelbar

$$\overset{n}{[}a_1\, a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}-1} Qa_{\mathfrak{a}}] = \alpha\overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}}]$$

d. h. $\overset{n}{[}a_1\, a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}-1}(Qa_{\mathfrak{a}} - \alpha a_{\mathfrak{a}})] = 0$

mithin herrscht nach Ausdehnungslehre 14 zwischen den Grösen $a_1, a_2, \cdots a_{\mathfrak{a}-1}$, $Qa_{\mathfrak{a}} - \alpha a_{\mathfrak{a}}$ eine Hörigkeit, d. h. es ist, da $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}-1}$ gegenſeitig frei ſind,

$$Qa_{\mathfrak{a}} - \alpha a_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}}, \text{ wo } a^1_{\mathfrak{a}} \text{ eine Vielfachenſumme von } a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}-1}$$

ist, oder es ist

(c) $\quad Qa_{\mathfrak{a}} = \alpha a_{\mathfrak{a}} + a_{\mathfrak{a}}$ wo $a_{\mathfrak{a}}$ eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}-1}$

Sei nun $p = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b}}$ wo $\alpha_{\mathfrak{b}} \gtrless 0$ und $\mathfrak{b} \leqq r$ ist, ſo hat man

$$\begin{aligned} Qp &= Q(\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_{\mathfrak{b}}\, a_{\mathfrak{b}}) \\ &= \alpha_1\, Qa_1 + \alpha_2\, Qa_2 + \cdots + \alpha_{\mathfrak{b}}\, Qa_{\mathfrak{b}} \qquad \text{mithin nach (c)} \\ &= \alpha_1 \alpha a_1 + \alpha_2 \alpha a_2 + \cdots + \alpha_{\mathfrak{b}} \alpha a_{\mathfrak{b}} + \alpha_1 a^1{}_1 + \alpha_2 a^1{}_2 + \cdots + \alpha_{\mathfrak{b}} a^1{}_{\mathfrak{b}} \\ &= \alpha(\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_{\mathfrak{b}}\, a_{\mathfrak{b}}) + q \\ &= \alpha\, p + q \end{aligned}$$

wo q eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_{\mathfrak{b}-1}$ ist.

Satz. Wenn unter den n Hauptzahlen des Bruches Q mit den 52.
n Nennern $e_1 \cdots e_n$, d. h. unter den n Wurzeln der Gleichung

(a) $\quad 0 = \overset{n}{[}(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \cdots (\varrho e_n - Qe_n)]$

$$= \alpha_0\, \varrho^n - \alpha_1\, \varrho^{n-1} + \alpha_2\, \varrho^{n-2} - \cdots + (-1)^n \alpha_n.$$

$\mathfrak{a}$ Wurzeln $= \alpha$, $\mathfrak{b}$ Wurzeln $= \beta$ u. ſ. w. ſind, wo $\alpha \gtrless \beta \gtrless \cdots$, ſo kann man n gegenſeitig freie Grösen $a_1, a_2, \cdots a_{\mathfrak{a}}, b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}, \cdots$ von der Art angeben, dass wenn p eine Vielfachenſumme der m erſten Grösen einer dieſer Gruppen von Grösen, z. B. der Grösen $b_1 \cdots b_m$ bildet,

dann $Qp = \beta p + q$ ist, wo q eine Vielfachenſumme der $m-1$ ersten Grösen derſelben Gruppe ist.

Beweis. Wenn unter den Hauptzahlen von Q nicht nur a derſelben vorkommen, welche gleich α, ſondern auch $\mathfrak{b}$, welche gleich β, $\mathfrak{c}$, welche gleich γ ſind u. ſ. w., wo α, β, $\gamma, \cdots$ alle von einander verschieden ſind, ſo lassen ſich nach 51 $\mathfrak{b}$ gegenſeitig freie Grösen $b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}$ von der Art angeben, dass jede Vielfachenſumme p_1 von $b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}$ der Gleichung $Qp_1 = \beta p_1 + q_1$ genügt, wo, wenn p_1 eine Vielfachenſumme der m ersten jener Grösen ist, q_1 eine Vielfachenſumme der $(m-1)$ ersten derſelben Grösen ist, und ebenſo lassen ſich $\mathfrak{c}$ gegenſeitig freie Grösen $c_1, \cdots c_{\mathfrak{c}}$ von der Art angeben, dass jede Vielfachenſumme p_2 von $c_1, \cdots c_{\mathfrak{c}}$ der Gleichung $Qp_2 = \gamma p_2 + q_2$ genüge, wo, wenn p_2 eine Vielfachenſumme der m ersten der Grösen $c_1, \cdots c_{\mathfrak{c}}$ ist, q_2 eine Vielfachenſumme der $m-1$ ersten derſelben Grösen ist u. ſ. w. Dann ſind ferner, wie noch bewieſen werden muss, die Grösen $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}}$, $b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}$, $c_1, \cdots c_{\mathfrak{c}}$ gegenſeitig frei und können alſo als Nenner des Bruches Q geſetzt werden. In der Tat nehmen wir einmal an, dass zwar die Grösen $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}}$, $b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}$, $c_1, \cdots c_{m-1}$ noch gegenſeitig frei ſeien, dass aber die Gröse c_m eine Vielfachenſumme der genannten Grösen ſei, ſo wird, wenn p eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}}$, p_1 eine Vielfachenſumme von $b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}$, p_2 eine Vielfachenſumme von $c_1, \cdots c_m$ ist, jene Vielfachenſumme die Form haben

(b) $\quad 0 = p + p_1 + p_2$, alſo wird auch

$$0 = Q(p + p_1 + p_2)$$

ſein. Dies aber ist nach 51

$$= \alpha p + q + \beta p_1 + q_1 + \gamma p_2 + q_2,$$

oder, indem wir statt p_2 ſeinen Wert $= -p - p_1$ aus der Gleichung (b) ſetzen,

$$0 = (\alpha - \gamma)p + (\beta - \gamma)p_1 + q + q_1 + q_2.$$

Da nach 51 q_2 eine Vielfachenſumme von $c_1, \cdots c_{m-1}$ ist, ſo ſind alle in dieſer letztern Gleichung vorkommenden Grösen Vielfachenſummen der nach der Annahme gegenſeitig freien Grösen $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}}$, $b_1, \cdots b_{\mathfrak{b}}$, $c_1, \cdots c_{m-1}$. In der letzten Gleichung wird ſich alſo die rechte Seite als Vielfachenſumme der letztgenannten Grösen darstellen lassen, und da die linke Seite null ist, ſo werden nach Ausd. 15 alle einzelnen Vorzahlen dieſer Vielfachenſumme null ſein. Wenn nun p von Null verschieden, etwa $= x_1 a_1 + \cdots x_s a_s$ wäre, wo $x_s \gtrless 0$ ist, ſo würde q nach 51 eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_{s-1}$ ſein, mithin würde a_s, da es auch in p_1, q_1, q_2, nicht enthalten ist, in jener gleich Null

gesetzten Vielfachensumme nur einmal vorkommen, nämlich mit der Vorzahl $(\alpha-\gamma)x_s$ verbunden; diese Vorzahl müsste also null sein, was unmöglich ist, da x_s nach der Annahme ungleich null, und α ungleich γ ist. Mithin ist die Annahme, dass p von Null verschieden sei, unmöglich, d. h. p ist gleich null, aus gleichem Grunde ist $p_1 = 0$. Dann aber folgt aus der Gleichung (b), dass $p_2 = 0$ ist. Da nun aber die Grösen $a_1, \cdots a_\alpha$ gegenseitig frei sind, so folgt aus $p = 0$, dass alle Vorzahlen des Ausdruckes, durch welchen p aus $a_1, \cdots a_\alpha$ abgeleitet ist, null sind, und dasselbe folgt für p_1 und p_2. Also sind in der Gleichung (b) alle Vorzahlen gleich Null, also giebt es zwischen den Grösen $a_1, \cdots a_\alpha$, $b_1, \cdots b_\mathfrak{b}$, $c_1, \cdots c_\mathfrak{c}, \cdots$ gar keine Zahlbeziehung oder Hörigkeit, dieselben sind also alle gegenseitig frei.

Satz. Wenn ein Bruch Q die Eigenschaft hat, dass für beliebige von Null verschiedene Grösen erster Klasse a und b 53.

(*) $\quad [Q a \overline{b}]^n = [Q b \overline{a}]^n$ **und** $[Q a \overline{a}]^n \gtrless 0$

ist, so lassen sich stets n gegenseitig freie Grösen erster Klasse $c_1, \cdots c_n$ von der Art finden, dass

(a) $\quad [Q c_\mathfrak{a} \overline{c_\mathfrak{b}}]^n = 0, \qquad$ **wo** $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$.

Ferner sind dann die n Hauptzahlen des Bruches Q alle Zahlen d. h. reell, und unter ihnen so viel Pluszahlen, als es unter den Zeugen oder Produkten

(b) $\quad [Q c_1 \overline{c_1}]^n, \cdots [Q c_n \overline{c_n}]^n$

Plusgrösen giebt.

Endlich lassen sich dann stets n zu einander normige Grösen $e_1, \cdots e_n$ von der Art finden, dass jede derselben mit Q gewebt oder multiplizirt ein Vielfaches derselben liefert, also

(c) $\quad Q e_\mathfrak{a} = \varrho_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}, \quad$ **wo** $[e_\mathfrak{a} \overline{e_\mathfrak{b}}] = 0$, **wenn** $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$ **ist.**

Beweis. a) Da $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$ sein soll und nach der Annahme $[Q c_\mathfrak{a} \overline{c_\mathfrak{b}}]^n = [Q c_\mathfrak{b} \overline{c_\mathfrak{a}}]^n$, so genügt es, wenn wir beweisen, dass sich n Grösen $c_1, \cdots c_n$ der Art finden lassen, dass sie der Gleichung (a) genügen für den Fall, dass $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ist. Es sei $Q c_\mathfrak{a} = q_\mathfrak{a}$, dann ist die Gleichung $[Q c_\mathfrak{a} \overline{c_\mathfrak{b}}]^n = [q_\mathfrak{a} \overline{c_\mathfrak{b}}]^n = [c_\mathfrak{b} \overline{q_\mathfrak{a}}]^n$ nach Ausdehnungslehre 219. Für c_1 können wir eine beliebige Gröse erster Klasse ungleich Null wählen; dann muss c_2 der Gleichung $[c_2 \overline{q_1}]^n = 0$, d. h. es muss nach Ausdehnungslehre 201 c_2 zu q_1 normig sein, oder es muss dem Gebiete $\overline{q_1}$, welches von $n-1$ter Stufe ist angehören, im Uebrigen kann c_2 eine beliebige

Gröse erster Klasse $\gtrless 0$ ſein. Die Gröse c_3 muss dann den Gleichungen $0 = \overset{n}{[}c_3\bar{q}_1] = \overset{n}{[}c_3\bar{q}_2]$ genügen, d. h. es muss c_3 den Gebieten $\bar{q}_1$ und $\bar{q}_2$ von $(n-1)$ter Stufe angehören, alſo dem beiden gemeinschaftlichen Gebiete, welches nach Ausdehnungslehre 30 mindestens von $(n-2)$ter Stufe ist, in ihm kann c_3 eine beliebige Gröse erster Klasse $\gtrless 0$ ſein. Auf gleiche Weiſe muss c_4 den Gleichungen $0 = \overset{n}{[}c_4\bar{q}_1] = \overset{n}{[}c_4\bar{q}_2] = \overset{n}{[}c_4\bar{q}_3]$ genügen, alſo dem den drei Gebieten $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ von $(n-1)$ter Stufe gemeinschaftlichen Gebiete angehören, welches nach Ausdehnungslehre 30 mindestens von $(n-3)$ter Stufe ist, in ihm kann c_4 wieder eine beliebige Gröse erster Klasse $\gtrless 0$ ſein. So kann man fortfahren und muss endlich c_n den Gleichungen $0 = \overset{n}{[}c_n\bar{q}_1] = \overset{n}{[}c_n\bar{q}_2] = \cdots = \overset{n}{[}c_n\bar{q}_{n-1}]$ genügen, d. h. c_n muss den $(n-1)$Gebieten $(n-1)$ter Stufe $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \cdots \bar{q}_{n-1}$, angehören, dieſe haben mindestens ein Gebiet erster Stufe gemeinſam, in ihm kann c_n eine beliebige Gröse $\gtrless 0$ ſein. Wir haben alſo n Grösen erster Klasse $c_1, \cdots c_n$ ungleich Null gefunden, welche der Gleichung $0 = \overset{n}{[}c_b\bar{q}_a] = \overset{n}{[}q_a\bar{c}_b] = \overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_b]$ genügen, wo $a < b$ und da $\overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_b] = \overset{n}{[}Qc_b\bar{c}_a]$ ist, auch wenn $a > b$, kurz $a \gtrless b$ ist. Dieſe n Grösen $c_1, \cdots c_n$ ſind aber auch gegenſeitig frei. Denn wäre eine derſelben zu den andern hörig, ſo lässt ſich nach Ausdehnungslehre 14 eine Gleichung $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n = 0$ aufstellen, wo wenigstens eine der Vorzahlen z. B. $x_a \gtrless 0$ ist. Dann hätte man

$$0 = \overset{n}{[}Qc_a(\overline{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n})] = x_a\overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_a]$$

weil alle andern Zeuge oder Produkte null ſind, alſo wäre dann da $x_a \gtrless 0$ ist, $\overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_a] = 0$, dies aber ist gegen die Vorausſetzung in der Gleichung (*). Es ist alſo unmöglich, dass eine der Grösen $c_1, \cdots c_n$ zu den andern hörig ſei, ſie ſind alſo gegenſeitig frei.

b) Es ſei nun $\overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_a] = \alpha_a$ und $a_a = c_a : (\alpha_a)^{1/2}$, wo $\alpha \gtrless 0$ nach (*), dann bilden die Grösen $a_1, a_2, \cdots a_n$ einen Verein, welcher den Bedingungen entspricht, d. h. es ist

(d) $\qquad \overset{n}{[}Qa_a\bar{a}_b] = 0$, wenn $a \gtrless b$ und $\overset{n}{[}Qa_a\bar{a}_a] = 1$.

Hier ist a_a eine Zahl oder reell, wenn $\overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_a]$ eine Plusgröse, dagegen ist a_a eine reine Igröse ib_a (wo b_a eine Zahl oder reell, und $i = (-1)^{1/2}$) wenn $\overset{n}{[}Qc_a\bar{c}_a]$ eine Strichgröse. Es ſind alſo unter den Grösen $a_1, \cdots a_n$ ſo viele Zahlen oder reell, als unter den Zeugen $\overset{n}{[}Qc_1\bar{c}_1], \cdots \overset{n}{[}Qc_n\bar{c}_n]$ Plusgrösen ſind. Unter Beweis d wird ſich dann noch ergeben, dass

die Zahlen oder reellen unter den Grösen $a_1, \cdots a_n$ sämmtlich Pluszahlen oder positiv sind.

c) Die Grösen $b_1, \cdots b_n$ wollen wir, wenn sie wie die Grösen $a_1, \cdots a_n$ der Gleichung (d) genügen und jede entweder eine Zahl (reell) oder eine reine Igröse id ist (wo d reell), einen trauten Verein nennen. Jeder traute Verein $a_1, \cdots a_n$ bleibt auch bei der Kreiseländerung nach Ausdehnungslehre 211 ein trauter Verein, in welchem die Anzahl der Zahlgrösen, der reellen Grösen, unverändert bleibt, sofern bei der Kreiseländerung $a_\mathfrak{a}$ und $a_\mathfrak{b}$ in $b_\mathfrak{a} = xa_\mathfrak{a} + ya_\mathfrak{b}$ und in $b_\mathfrak{b} = xa_\mathfrak{b} - ya_\mathfrak{a}$ übergehen, wo x stets eine Zahl oder reell, y aber nur dann eine Zahl ist, wenn $a_\mathfrak{a}$ und $a_\mathfrak{b}$ beide Zahlgrösen oder reell, dagegen y eine reine Igröse wird, wenn eine oder beide der Grösen $a_\mathfrak{a}$ und $a_\mathfrak{b}$ reine Igrösen sind, auch $x^2 + y^2 = 1$ ist, also

(e) $\quad b_\mathfrak{a} = xa_\mathfrak{a} + ya_\mathfrak{b} \qquad b_\mathfrak{b} = xa_\mathfrak{b} - ya_\mathfrak{a} \qquad x_2 + y_2 = 1.$

Es leuchtet sofort ein, dass auch $b_\mathfrak{a}$ und $b_\mathfrak{b}$ beide Zahlen oder reell, oder beide reine Igrösen sind, oder eine derselben eine Zahl, die andere eine einfache Igröse ist, je nachdem dies für a_1 und a_2 der Fall war, und dass also die Anzahl der Zahlgrösen oder reellen Grösen des Vereins bei der Kreiseländerung dieselbe bleibt. Setzen wir nun $\mathfrak{b} > 2$, so wird nach (e)

$$\overset{n}{[}Qb_1\bar{a}_\mathfrak{b}] = x\overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_\mathfrak{b}] + y\overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_\mathfrak{b}] = 0$$

da nach (d) $\quad \overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_\mathfrak{b}] = 0 \quad$ und $\overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_\mathfrak{b}] = 0$ ist.

Ebenso wird $\quad \overset{n}{[}Qb_2\bar{a}_\mathfrak{b}] = 0$, mithin ist

$$\overset{n}{[}Qb_1\bar{b}_2] = x^2\overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_2] - y^2\overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_1] + xy(\overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_2] - \overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_1])$$

nun aber ist $0 = \overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_2] = \overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_1]$ und $1 = \overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_1] = \overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_2]$

also ist $\overset{n}{[}Qb_1\bar{b}_2] = 0.$

Ferner ist $\overset{n}{[}Qb_1\bar{b}_1] = x^2\overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_1] + y^2\overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_2] + 2xy\overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_2] = 1$

da $1 = \overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_1] = \overset{n}{[}Qa_2\bar{a}_2]$, auch $x^2 + y^2 = 1$, und $\overset{n}{[}Qa_1\bar{a}_2] = 0$ ist.

Ebenso folgt $\overset{n}{[}Qb_2\bar{b}_2] = 1$. Also genügt der Verein, welcher aus $a_1, \cdots a_n$ durch Kreiseländerung hervorgeht, der Gleichung (d), ebenso genügt also auch jeder Verein, der aus $a_1, \cdots a_n$ durch wiederholte Kreiseländerung hervorgeht.

Sollen hier b_1 und b_2 zu einander normig sein, so muss nach Ausdehnungslehre 201 auch $\overset{n}{[}b_1\bar{b}_2] = 0$ sein, man hat dann also nach (e)

$$0 = \overset{n}{[}(xa_1 + ya_2)\overline{(xa_2 - ya_1)}]$$
$$= x^2\overset{n}{[}a_1\bar{a}_2] - y^2\overset{n}{[}a_2\bar{a}_1] + xy(a_2^{\,\bar{2}} - a_1^{\,\bar{2}}).$$

Setzen wir nun $\gamma = (a_1^{\overset{2}{-}} - a_2^{\overset{2}{-}}) : 2\overset{n}{[}a_1\bar{a}_2]$, ſo wird
$0 = x^2 - y^2 - 2\gamma xy$ und teilen wir dieſe durch y^2, so erhalten wir $\frac{x^2}{y^2} - 2\gamma\frac{x}{y} = 1$, d. h. $\frac{x}{y} = \gamma \pm (1 + \gamma^2)^{1/2}$

Sind nun a_1 und a_2 beide Zahlgrösen d. h. reell, oder ſind beide reine Igrösen, ſo ist γ eine Zahlgröse d. h. reell, alſo auch $\frac{x}{y}$ eine Zahlgröse (reell) d. h. wenn x stets eine Zahlgröse, auch y eine Zahlgröse oder reell, alſo ſind dann die Grösen a_1 und a_2 durch Kreiſeländerung normig gemacht.

Ist dagegen von den Grösen a_1 und a_2 die eine eine Zahlgröse oder reell $=$ d, die andere eine reine Igröse $=$ id′, ſo wird

$$\gamma = \pm (d^{\overset{2}{-}} + d'^{\overset{2}{-}}) : 2i\overset{n}{[}d\bar{d}'], \text{ alſo ist}$$

$$1 + \gamma^2 = 1 - \left(\frac{d^{\overset{2}{-}} + d'^{\overset{2}{-}}}{2\overset{n}{[}d\bar{d}']}\right)^2 = \left(1 + \frac{d^{\overset{2}{-}} + d'^{\overset{2}{-}}}{2\overset{n}{[}d\bar{d}']}\right)\left(1 - \frac{d^{\overset{2}{-}} + d'^{\overset{2}{-}}}{2\overset{n}{[}d\bar{d}']}\right)$$

$$= \frac{d^{\overset{2}{-}} + 2\overset{n}{[}d\bar{d}'] + d'^{\overset{2}{-}}}{2\overset{n}{[}d\bar{d}']} \cdot \frac{2\overset{n}{[}d\bar{d}'] - d^{\overset{2}{-}} - d'^{\overset{2}{-}}}{2\overset{n}{[}d\bar{d}']}$$

$$= \frac{-(d + d')^{\overset{2}{-}}(d - d')^{\overset{2}{-}}}{4\overset{n}{[}d\bar{d}']^{\overset{2}{-}}}$$

Mithin ist $(1 + \gamma^2)^{1/2}$ eine reine Igröse, ebenſo auch γ, alſo ist auch $\frac{x}{y} = \gamma \pm (1 + \gamma^2)^{1/2}$ eine reine Igröse. Setzen wir alſo x als Zahl (reell), ſo ist y eine reine Igröse, und wird dann die eine der Grösen b_1 und b_2 eine Zahlgröse, die andere eine reine Igröse. Dies aber war die Bedingung der Kreiſeländerung in dieſem Falle. Mithin lassen ſich in allen Fällen je zwei Grösen des Vereins, welche noch nicht normig zu einander ſind, durch Kreiſeländerung normig zu einander machen.

Bei dieſer Kreiſeländerung wird das Zeug oder Produkt der Zahlwerte der Grösen jedesmal kleiner, wobei unter dem Zahlwerte von id, wo d eine Zahl, der Zahlwert von d verstanden wird. Seien nämlich α_1 und α_2 die Zahlwerte von a_1 und a_2, und β_1 und β_2 die von b_1 und b_2, ſo ist nach Ausd. 192 $\overset{n}{[}a_1a_2]^{\overset{2}{-}} = \overset{n}{[}b_1b_2]^{\overset{2}{-}}$, aber nach Ausd. 249 ist $[a_1a_2]^{\overset{2}{-}} = (\alpha_1\alpha_2 \text{ ſin. } \angle\, a_1a_2)^2$, wenn α_1 und α_2 Zahlen oder reell ſind; dasſelbe wird nun auch der Fall ſein, wenn a_1 und a_2 reine Igrösen ſind, und unter $\angle\, a_1a_2$ stets der Winkel zwischen den

entsprechenden Zahlgrösen (den reellen Grösen) verstanden ist; dagegen, wenn eine der Grösen a_1 und a_2 eine Zahlgröse (reell), die andere eine reine Igröse ist, ſo wird $\overset{n}{[}a_1a_2]^{\overset{2}{-}} = -(\alpha_1\alpha_2 \text{ ſin. } \angle\, a_1a_2)^2$, aber dann auch $\overset{n}{[}b_1b_2]^{\overset{2}{-}} = -(\beta_1\beta_2 \text{ ſin. } \angle\, b_1b_2)^2$ alſo da $\overset{n}{[}a_1a_2]^{\overset{2}{-}} = \overset{n}{[}b_1b_2]^{\overset{2}{-}}$ ist, ſo ist in allen Fällen

$$(\alpha_1\alpha_2 \text{ ſin. } \angle\, a_1a_2)^2 = (\beta_1\beta_2 \text{ ſin. } \angle\, b_1b_2)^2.$$

Wenn nun a_1 und a_2 nicht zu einander normig, hingegen b_1 und b_2 zu einander normig ſind, ſo ist $(\text{ſin. } \angle\, a_1a_2)^2 < 1$, $(\text{ſin. } \angle\, b_1b_2)^2 = 1$, alſo $(\alpha_1\alpha_2)^2 > (\beta_1\beta_2)^2$, d. h. da α_1, α_2, β_1, β_2 Plusgrösen (poſitiv) ſind, $\alpha_1\alpha_2 > \beta_1\beta_2$. Alſo wenn von den Grösen eines trauten Vereins irgend zwei noch nicht zu einander normig ſind, ſo lässt ſich der Verein durch Kreiſeländerung ſo umwandeln, dass das Zeug oder Produkt der Zahlwerte aller Grösen des Vereins kleiner wird. Den geringsten Zahlwert wird dies Zeug oder Produkt erhalten, wenn alle Grösen des Vereins zu einander normig ſind. Es ſei $r_1, r_2, \cdots r_n$ dieſer Verein, ſo genügt derſelbe, da er aus dem Vereine $a_1, a_2, \cdots a_n$ abgeleitet ist, wie oben bewieſen nach der Gleichung (d), und enthält eben ſo viele Zahlgrösen (reelle Grösen), wie der letztere Verein, alſo eben ſo viele Zahlgrösen, als unter den Zeugen oder Produkten $\overset{n}{[}Qc_1\overline{c_1}], \cdots \overset{n}{[}Qc_n\overline{c_n}]$ Plusgrösen (poſitive) vorkommen.

d) Es bleibt nun noch zu beweiſen, dass unter den n Hauptzahlen des Bruches Q ſo viele Pluszahlen (poſitive) vorkommen, als es unter den Zeugen $\overset{n}{[}Qc_1\overline{c_1}], \cdots \overset{n}{[}Qc_n\overline{c_n}]$ Plusgrösen giebt. Es ſei nun $Qr_1 = x_1r_1 + \cdots x_nr_n$, dann verwandelt ſich in (d) die Gleichung $0 = \overset{n}{[}Qr_1\overline{r_2}]$ in $0 = (\overset{n}{[}x_1r_1 + x_2r_2 + \cdots x_nr_n)\overline{r_2}] = x_2\overset{n}{[}r_2\overline{r_2}]$, da alle übrigen Zeuge oder Produkte $\overset{n}{[}r_1\overline{r_2}]$, $\overset{n}{[}r_3\overline{r_2}]$ u. ſ. w. wegen der normigen Beziehung nach Ausdehnungslehre 201 null ſind. Da nun ferner r_2, alſo auch $\overset{n}{[}r_2\overline{r_2}]$ von Null verschieden ist, ſo folgt aus der Gleichung $0 = x_2\overset{n}{[}r_2\overline{r_2}]$, dass $x_2 = 0$ ſei; auf gleiche Weiſe folgt $x_3 = 0, \cdots x_n = 0$, alſo ist $Qr_1 = x_1r_1$. Dann verwandelt ſich in (d) die $1 = \overset{n}{[}Qr_1\overline{r_1}]$ in $1 = x_1\overset{n}{[}r_1\overline{r_1}] = x_1r_1^{\overset{2}{-}}$, alſo ist $x_1 = \frac{1}{r_1^{\overset{2}{-}}}$ und $Qr_1 = \frac{1}{r_1^{\overset{2}{-}}}r_1$,

und aus gleichem Grunde ist

$$Qr_2 = \frac{1}{r_2^{\overset{2}{-}}}r_2, \cdots Qr_n = \frac{1}{r_n^{\overset{2}{-}}}r_n.$$

Setzt man demnach

$$\text{(f)}\qquad \frac{1}{r_1^2} = \varrho_1, \quad \frac{1}{r_2^2} = \varrho_2, \cdots \frac{1}{r_n^2} = \varrho_n,$$

und setzt $r_1, r_2, \cdots r_n$ als die Nenner des Bruches Q, so werden die zugehörigen Zähler $\varrho_1 r_1, \varrho_2 r_2, \cdots \varrho_n r_n$, und die Zähler des Bruches $\varrho - Q$ werden also $(\varrho - \varrho_1)r_1, (\varrho - \varrho_2)r_2, \cdots (\varrho - \varrho_n)r_n$, der Höhenwert des Bruches $\varrho - Q$ ist aber nach 43 gleich dem Flache seiner Zähler geteilt durch das Flach seiner Nenner, also gleich $(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n)$. Die Gleichung aber, durch welche die Hauptzahlen ϱ eines Bruches bedingt sind, drückt aus, dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null sei, also hat man

$$(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n) = 0,$$

d. h. $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ sind die Hauptzahlen von Q, es waren dieselben (nach (f)) gleich $\frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_2^2}, \cdots \frac{1}{r_n^2}$. Je nachdem nun r eine Zahlgröse (reell) oder eine reine Igröse ist, ist $\frac{1}{r^2}$ eine Plus- oder eine Strichgröse (positiv oder negativ), also kommen unter den Hauptzahlen von Q so viel Pluszahlen vor, als unter den Grösen $r_1, r_2, \cdots r_n$ Zahlgrösen (reelle) vorkommen, d. h. wie oben gezeigt, als unter den Zeugen $[Qc_1 \overset{n}{\overline{c_1}}]$, $\cdots [Qc_n \overset{n}{\overline{c_n}}]$ Plusgrösen vorkommen. Also ist auch dieser Teil des Satzes bewiesen.

6. Die verwandten Vereine.

Erklärung. **Verwandt heisen zwei Vereine von Grösen, wenn jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grösen des einen Vereines herrscht, auch zwischen den entsprechenden des andern stattfindet, d. h. wenn der Gröse** 54.

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

die Gröse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entspricht und umgekehrt, wo nämlich $\alpha, \beta, \cdots$ beliebige Zahlen und $a, b, \cdots$ beliebige Grösen des ersten Vereins und $a_1, b_1, \cdots$ die entsprechenden des andern sind.

Satz. **Wenn zwei Vereine von Grösen, in denen die Grösen eines jeden Vereins zu n gegenseitig freien Grösen desselben hörig sind, einander verwandt sein sollen, so kann man beliebigen n gegenseitig freien Grösen des einen Vereins beliebige n gegenseitig freie Grösen des andern entsprechend setzen; dann ist zu jeder Gröse eines jeden der beiden Vereine die entsprechende des andern genau bestimmt.** 55.

Beweis. Es seien $a, b, \cdots$ beliebige n gegenseitig freie Grösen des einen, und $a_1, b_1, \cdots$ beliebige n gegenseitig freie Grösen des andern Vereins, so lässt sich nach der Voraussetzung jede Gröse p des ersten Vereins als Vielfachensumme aus $a, b, \cdots$ darstellen und sei

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

so sind nach Ausdehnungslehre 16 die Zahlen $\alpha, \beta, \cdots$ genau bestimmt, sobald p eine bestimmte Gröse ist. Sollen nun beide Vereine verwandt sein, so muss nach 54 der Gröse p eine Gröse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entsprechen. Es ist also zu jeder Gröse des einen Vereins die entsprechende des andern genau bestimmt.

Sollen die so gebildeten Vereine einander verwandt sein, so muss ferner jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grösen des ersten

Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Grösen des zweiten herrschen und umgekehrt. Sei alſo

(a) $\varrho r + \sigma s + \cdots = 0$

eine zwischen den Grösen $r, s, \cdots$ des ersten Vereins herrschende Zahlbeziehung, und ſeien $r_1, s_1, \cdots$ die den Grösen $r, s, \cdots$ entsprechenden Grösen des zweiten Vereins, ſo ist zu beweiſen, dass auch

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0$$

ſei. Setzt man in (a) $r, s, \cdots$ als Vielfachenſummen von $a, b, \cdots$, löſt die Klammern auf, und fasst die Glieder, welche a enthalten, in ein Glied zuſammen u. ſ. w., ſo erhält man einen Ausdruck der Form

$$\alpha a + \beta b + \cdots = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \cdots$ Formeln der Vorzahlen $\varrho, \sigma, \cdots$ und der Ableitungszahlen von $r, s, \cdots$ ſind. Hieraus folgt, da $a, b, \cdots$ gegenſeitig frei ſind, nach Ausdehnungslehre 15

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \cdots.$$

Wendet man nun dasſelbe Verfahren auf den Ausdruck $\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots$ an, ſo erhält man, da die Ableitzahlen von $r_1, s_1, \cdots$ dieſelben ſind, wie die von $r, s, \cdots$,

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \cdots$ dieſelbe Bedeutung haben, wie oben. Da aber $\alpha, \beta, \cdots$ null ſind, ſo erhält man auch

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0,$$

d. h. jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grösen des ersten Vereins herrscht, herrscht auch zwischen den entsprechenden des zweiten, und ebenſo umgekehrt, d. h. die beiden Vereine ſind verwandt.

56. **Satz. Man kann in zwei Vereinen, deren jeder zu n Grösen desſelben hörig ist, und welche einander verwandt ſein ſollen, in jedem beliebige n + 1 Grösen annehmen, von denen je n gegenſeitig frei ſind und festsetzen, dass den n + 1 Grösen des ersten Vereins n + 1 Grösen entsprechen ſollen, welche den n + 1 im zweiten Verein angenommenen Grösen deckend oder kongruent ſind; dann ist zu jeder Gröse eines Vereines die entsprechende des andern, mit Ausnahme einer für alle gleichen Vorzahl, genau bestimmt. (Deckend heisen zwei Grösen, wenn die eine ſich als ein Vielfaches der andern darstellen lässt).**

Beweis. Es ſeien $a_1, \ldots a_{n+1}$ die Grösen des ersten und $b_1, \ldots b_{n+1}$ die des zweiten Vereins, welche der im Satze ausgesprochenen Bedingung genügen, ſo wird ſich, gemäs dieſer Bedingung, jede der

Grösen $a_1, \dots a_{n+1}$ als Vielfachensumme der übrigen darstellen lassen, deren Vorzahlen alle ungleich Null sind. Denn da der Verein zu n gegenseitig freien Grösen hörig sein soll, so muss er auch nach Ausdehnungslehre 26 aus je n dieser Bedingung unterworfenen Grösen ableitbar sein, also auch jede der Grösen $a_1, \dots a_{n+1}$ als Vielfachensumme der übrigen darstellbar sein, und sollte von den Vorzahlen irgend eine Null sein, so würde zwischen den n übrigen, gegen die Voraussetzung eine Zahlbeziehung herrschen. Dasselbe gilt für die Grösen $b_1, \dots b_{n+1}$. Nun sei

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \alpha_1 a_1 + \dots \alpha_n a_n \\ b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \dots \beta_n b_n, \end{cases}$$

also $\alpha_1, \dots \alpha_n$, $\beta_1, \dots \beta_n$ alle ungleich Null.

Ferner seien $c_1, \dots c_{n+1}$ die Grösen, welche beziehlich den Grösen $a_1, \dots a_{n+1}$ entsprechen und den Grösen $b_1, \dots b_{n+1}$ deckend oder kongruent sein sollen. Dann muss für jeden Zeiger a von 1 bis $n + 1$ sich c_a als Vielfaches von b_a darstellen lassen, also

$$\text{(b)} \qquad c_a = x_a b_a \qquad \text{wo } x_a \gtrless 0.$$

Da ferner $c_1, \dots c_{n+1}$ den Grösen $a_1, \dots a_{n+1}$ so entsprechen sollen, dass die Vereine verwandt sind, so muss nach 54

$$\text{(c)} \qquad c_{n+1} = \alpha_1 c_1 + \dots \alpha_n c_n$$

sein. Setzt man in (c) die Werte aus (b) ein und teilt durch x_{n+1}, so erhält man

$$b_{n+1} = \frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} b_1 + \dots \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} b_n.$$

Aber aus (a) hat man zugleich

$$b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \dots \beta_n b_n,$$

also muss nach Ausdehnungslehre 15

$$\frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} = \beta_1, \dots \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} = \beta_n \qquad \text{sein.}$$

Hierdurch bestimmen sich alle Unbekannte bis auf eine. Setzen wir $x_{n+1} = \lambda$, so wird

$$\text{(d)} \qquad x_1 = \frac{\lambda \beta_1}{\alpha_1}, \dots, x_n = \frac{\lambda \beta_n}{\alpha_n}, \; x_{n+1} = \lambda.$$

Wenn diese Bedingungen (d) erfüllt sind, so wird auch umgekehrt die Gleichung (c) erfüllt. Dann sind also die Vereine verwandt in Bezug auf die $n + 1$ Grösen $a_1, \dots a_{n+1}$ und die ihnen entsprechenden $c_1, \dots c_{n+1}$ und jeder Gröse

$$p = d_1 a_1 + \dots d_n a_n$$

entspricht die Gröse

$$q = d_1 c_1 + \dots d_n c_n.$$

Setzt man hier statt $c_1, \ldots c_n$ ihre Werte aus (b) und dann statt $x_1, \ldots x_n$ ihre Werte aus (d), ſo hat man

$$q = \lambda\left(\frac{d_1\beta_1}{\alpha_1}b_1 + \ldots \frac{d_n\beta_n}{\alpha_n}b_n\right),$$

d. h. q ist mit Ausnahme der für alle gleichen Vorzahl λ genau bestimmt.

57. **Satz. Wenn man aus zwei verwandten Vereinen zwei neue Vereine dadurch ableitet, dass man jedem linigen Zeuge oder Produkte P, welches aus Grösen des ersten Vereines gebildet ist, dasjenige Zeug oder Produkt als entsprechend ſetzt, welches auf gleiche Weiſe aus den entsprechenden Grösen des zweiten Vereins gebildet ist, ſo ſind dieſe beiden neuen Vereine einander gleichfalls verwandt; d. h. wenn r, s,... beliebige Grösen des einen und r_1, s_1,... die entsprechenden des verwandten Vereines ſind, und die linigen Zeuge oder Produkte $P(r, s, \ldots)$ und $P(r_1, s_1, \ldots)$ einander entsprechend geſetzt werden, wie auch r, s,... gewählt ſein mögen, ſo ſind auch die ſo erhaltenen Vereine einander verwandt.**

Beweis. Es ſeien $a_1, a_2, \ldots a_n$ Grösen des ersten Vereins, welche gegenſeitig frei ſind, und lassen ſich alle Grösen des ersten Vereins als Vielfachenſummen derſelben darstellen, und ſeien $b_1, b_2, \ldots b_n$ die entsprechenden Grösen des andern Vereines, welche alſo denſelben Bedingungen unterworfen ſind, und ſei

$$r = S\varrho_a a_a = \varrho_1 a_1 + \ldots \varrho_n a_n, \qquad s = S\sigma_a a_a, \text{ u. ſ. w.,}$$

alſo (nach 54)

$$r_1 = S\varrho_a b_a, \qquad s_1 = S\sigma_a b_a, \ldots,$$

ſo wird

$$\left.\begin{aligned} P(r, s, \ldots) &= S\varrho_a\sigma_b \ldots P(a_a, a_b, \ldots) \\ P(r_1, s_1, \ldots) &= S\varrho_a\sigma_b \ldots P(b_a, b_b, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad \text{(nach Ausd. 71).}$$

Da nun die Zeuge linige ſind, ſo muss nach Ausdehnungslehre 111 jede Bedingungsgleichung, welche zwischen den Zeugen $P(a_a, a_b, \ldots)$ herrscht, auch bestehen bleiben, wenn man statt $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Grösen $b_1, b_2, \ldots b_n$ ſetzt. Nun lassen ſich nach Ausdehnungslehre 111, wenn p die Anzahl der verschiedenen Zeuge von der Form $P(a_a, a_b, \ldots)$ und q die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen ist, die ſämmtlichen Zeuge $P(a_a, a_b, \ldots)$ als Vielfachenſummen der $p-q$ derſelben, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, darstellen und zwar ſo, dass, wenn dieſe $p-q$ Zeuge bestimmt ſind, auch für jedes der übrigen Zeuge die Ableitzahlen bestimmt ſind. Die Ausdrücke dieſer Ableitung ſind nur von den Bedingungsgleichungen abhängig. Setzt

man daher statt $a_1, a_2, \ldots$ überall $b_1, b_2, \ldots$, so müssen, da die Bedingungsgleichungen bei dieser Setzung noch geltend bleiben, auch die Ausdrücke jener Ableitung bestehen bleiben, d. h. wenn $A_1, A_2, \ldots$ die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Zeuge sind, aus welchen sich alle übrigen Zeuge der Form $P(a_a, a_b, \ldots)$ ableiten lassen, und

$$P(a_a, a_b, \ldots) = \alpha_{1, a, b, \ldots} A_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} A_2 + \ldots$$

ist, wenn ferner $B_1, B_2, \ldots$ diejenigen Zeuge sind, welche aus den Zeugen $A_1, A_2, \ldots$ dadurch hervorgehen, dass man in diesen $b_1, b_2, \ldots$ statt $a_1, a_2, \ldots$ setzt, so ist

$$P(b_a, b_b, \ldots) = \alpha_{1, a, b, \ldots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} B_2 + \ldots .$$

Also

$$P(r, s, \ldots) = \Sigma \overline{\varrho_a \sigma_b \ldots (\alpha_{1, a, b, \ldots} A_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} A_2 + \ldots)}$$

$$P(r_1, s_1, \ldots) = \Sigma \overline{\varrho_a \sigma_b \ldots (\alpha_{1, a, b, \ldots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \ldots} B_2 + \ldots)},$$

d. h. es ist $P(r, s, \ldots)$ durch dieselben Zahlen aus $A_1, A_2, \ldots$ abgeleitet, wie das entsprechende Zeug $P(r_1, s_1, \ldots)$ aus den entsprechenden Zeugen $B_1, B_2, \ldots$, d. h. nach 54 es ist der Verein der Zeuge $P(r, s, \ldots)$ verwandt dem Vereine der entsprechenden Zeuge $P(r_1, s_1, \ldots)$.

Formelbuch

der

Formenlehre oder Mathematik.

Von

Robert Grassmann.

Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Formelbuch

der

Zahlenlehre oder Arithmetik.

Erster Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

Einleitung in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

Die Erklärungen und die Beweisform der Grösenlehre.

1. Denklehre, Grösenlehre.
2. Gröse.
3. Zeichen der Gröse: a, b, c.
4. Einfaches (Element): $e_1, e_2, e_3, \cdots$.
5. Knüpfung, Ergebniss oder Gesammt.
6. Zeichen der Knüpfung: aob, gelesen „a mit b."
7. Klammer: ao(boc), gelesen „a mit Klammer b mit c geschlossen."
8. Fortschreitend knüpfen. Einfache Gröse.
   $$\underset{1,n}{G_e a_a} = a_1 o a_2 o a_3 o \cdots o a_n.$$
9. Formel. foa, Foa, φoa, Φoa; gleichlautend, verschieden, entsprechend.
10. Gleich, ungleich.
11. Zeichen $a = b$, gelesen „a gleich b," $a \gtrless b$, gelesen „a ungleich b."
    Gleichung, linke, rechte Seite.
12. $a = a$.
13. $aobocod = [(aob)oc]od$.
14. $\underset{1,n+1}{G_e a_a} = \underset{1,n}{G_e a_a}\, o \underset{n+1}{a}$.
15. Bedingt gleich $\overset{*}{-}$ * Bedingung.
16. Foa $\overset{*}{=}$ Fob   * wenn $a = b$.
17. aob $\overset{*}{=}$ aoc   * wenn $b = c$.
18. Wenn $a = c$ und $b = c$; so $a = b$.
19. $(a = b) = (b = a)$.
20. Wenn $a = b$ und $b = c$; so $a = c$.
21. Wenn $a = (bocodo\cdots)$; so ist $a = bocodo\cdots$
22. Gerader Beweis: Wenn $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3 \cdots a_{n-1} = a_n$; so $a_1 = a_n$.
23. Fortleitender Beweis: Wenn $Foa_1 = \Phi oa_1$ und sofern $Foa_a = \Phi oa_a$; so auch $Foa_{a+1} = \Phi oa_{a+1}$; so $Foa_n = \Phi oa_n$.
24. Einfacher (elementarer) Beweis.

Die Arten der Grösenknüpfung.

25. Knüpfungsgröse $(\circ b)$.
26. $a\circ(\circ b) = a\circ b$.
27. Drei Arten der Knüpfung.
28. Anreihung: $a\circ b\circ c \gtrless a\circ(b\circ c)$.
29. Einigung.
30. $a\circ(b\circ e) = a\circ b\circ e$.
31. $a\circ b$ eine einfache Gröse.
32. $a\circ(b\circ c) = a\circ b\circ c$.
33. $a\circ(b_1\circ b_2\circ\cdots\circ b_n) = a\circ b_1\circ b_2\circ\cdots\circ b_n$.
34. Jede Gröse als Einfaches (Element) zu ſetzen.
35. Vertauschung.
36. $e_1\circ e_2 = e_2\circ e_1$.
37. $a\circ b\circ c\circ d = d\circ a\circ b\circ c$.
38. Jede Gröse als Einfaches zu ſetzen.

Die Gattungen der Knüpfung und der Zerlegung.

39. Nicht ändernde Gröse. Zeichen μ.
40. $a\circ\mu = a$, $\mu\circ a = a$.
41. Unveränderliche Gröse. Zeichen ν.
42. $a\circ\nu = \nu$ $\nu\circ a = \nu$.
43. Zwei Gattungen der Knüpfung.
44. Zwei Gattungen der Zerlegung.
45. Trennbare Knüpfung.
46. Wenn $a\circ b = a\circ c$ oder $b\circ a = c\circ a$; ſo $b = c$, wo $a \gtrless \nu$.
47. Trennung. Geſammt. Trenner $\gtrless \nu$.
48. Zeichen $a\smile b = c$, geleſen „a trenn b gleich c.“ Geſammt a. Trenner b. Bleibſel c.
49. $a = a\circ b\smile b$; $a = a\smile b\circ b$.
50. Trenngröse $(\smile b)$, geleſen „Trenn b.“ Mitgröse $(\circ b)$, geleſen „Mit b.“
51. $a\circ(\smile b) = a\smile(\circ b) = a\smile b$; $a\smile(\smile b) = a\circ(\circ b) = a\circ b$.
52. Drei Arten des Trennens.
53. Antrennen.
54. $a\circ(b\smile c) \gtrless a\circ b\smile c$.
55. Eintrennen.
56. $a\circ(b\smile c) = a\circ b\smile c$; $a\circ(\smile b\circ c) = a\smile b\circ c$.
57. $b\smile b = \mu$; $\smile b\circ b = \mu$.
58. $a\smile(b\circ c) = a\smile b\smile c$; $a\smile(b\smile c) = a\smile b\circ c$.
59. Geſetz der Einigung und Eintrennung.
60. Jede Gröse als Einfaches zu ſetzen.
61. Abtrennen.
62. Geſetz der Vertauschung und Abtrennung.
63. Jede Gröse als Einfaches zu ſetzen.
64. Untrennbare Knüpfung.
65. Löſung.

66. Zeichen der Löſung $\checkmark$; Gelös, Wurzel.
67. Entsprechend gleich $\backsimeq$.
68. Gelös mehre Werte, kein Geſetz der Grösenlehre gilt.

Die Beziehung zweier Knüpfungen.

69. Fügung, Addition: Stück, Summe.
70. Zeichen der Fügung $+$, geleſen „plus." Plusgröse $(+ b)$, Plusklammer $+ (\;)$. $\underset{1,n}{S} a_\mathfrak{a} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
71. Null. 0.
72. $a + 0 = a$; $0 + a = a$.
73. Drei Arten der Fügung.
74. Anfügung.
75. $a + (b + e) \gtrless a + b + e$.
76. Einfügung.
77. $a + (b + e) = a + b + e$.
78. Geſetz der Einfügung.
79. Zufügung.
80. $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$.
81. Geſetz der Zufügung.
82. Weben, Multipliziren.
83. Zeichen des Webens $a \cdot b$, geleſen „a mal b," oder ab, geleſen „ab." Fach (Faktor), Zeug (Produkt). Malgröse $(\cdot b)$, geleſen „Mal b."
84. Malklammer $a(bc)$; Beziehungsklammer $a(b + c)$.
85. Formelzeichen (Funktionszeichen) fürs ganze folgende Glied gültig.
86. $(a + e)b = ab + eb$; $a(b + e) = ab + ae$; $e_1 e_2 = e$.
87. Das Zeug ae ist wieder eine Einfachgröse.
88. Das Zeug ac ist wieder eine Einfachgröse.
89. $(a + b)c = ac + bc$; $c(a + b) = ca + cb$.
90. $\left(\underset{1,n}{S} a_\mathfrak{a}\right) b = \underset{1,n}{S} a_\mathfrak{a} b$; $b\left(\underset{1,n}{S} a_\mathfrak{a}\right) = \underset{1,n}{S} b a_\mathfrak{a}$.
91. $\left(\underset{1,n}{S} a_\mathfrak{a}\right)\left(\underset{1,m}{S} b_\mathfrak{b}\right) = \underset{1,n;\,1,m}{S} a_\mathfrak{a} b_\mathfrak{b}$.
92. $\left(\underset{1,n}{S} a_\mathfrak{a}\right)\left(\underset{1,m}{S} b_\mathfrak{b}\right)\left(\underset{1,p}{S} c_\mathfrak{c}\right) \cdots = \underset{1,n;\,1,m;\,1,p\ldots}{S} a_\mathfrak{a} b_\mathfrak{b} c_\mathfrak{c} \cdots$.
93. Geſetz des Webens.
94. $0 \cdot a = 0$; $a \cdot 0 = 0$.
95. Eins. 1.
96. $e \cdot 1 = e$; $1 \cdot e = e$.
97. $1 \cdot 1 = 1$.
98. $a \cdot 1 = a$; $1 \cdot a = a$.
99. Drei Arten des Webens.
100. Anweben.
101. Geſetz des Anwebens.
102. Einweben.
103. $e_1(e_2 e_3) = e_1 e_2 e_3$.
104. $a(e_1 e_2) = a e_1 e_2$.
105. $a(bc) = abc$.

106. Gefetz des Einwebens.
107. Verweben.
108. $e_1 e_2 = e_2 e_1$.
109. Gefetz des Verwebens.
110. Formenlehre oder **Mathematik**: Aeusere Fügung.
111. Die Einheit das Einfache der Formenlehre oder Mathematik.
112. Zweige: Rechenlehre oder Analyfis.
Niedere: Zahlenlehre oder Arithmetik.
Höhere: Folgelehre oder Funktionenlehre.
Ausenlehre oder Synthefis.
Niedere: Ausdehnungslehre.
Höhere: Erweiterungslehre.

Erster Abschnitt der Zahlenlehre: Die niedere Zahlenlehre oder ganze Zahlen und Brüche.

113. Zahlenlehre oder Arithmetik: Nur eine Einheit die Eins.
114. Zahlen: Jede Zahl allen andern ungleich.
115. $\underset{1,m+n}{S} \; 1 \gtrless \underset{1,m}{S} 1$.
116. Null. Eins. Zwei. Drei. Vier. Fünf. Sechs. Sieben. Acht. Neun.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
117. Stelle. Nullte Stelle. ate Stelle.
Eins. Zehn. Hundert. Taufend. Zehntaufend. Hunderttaufend. Million.
1 10 100 1000 10000 100000 1000000
118. $a + (b + 1) = a + b + 1$.
119. Auf einer Stelle $9 + 1$ giebt 1 auf der nächst höhern Stelle.
120. $a + (b + 1) = a + b + 1$, $1 + 1' = 1' + 1$.
121. Das Eins und Eins.
122. Zufügen der Zahlen: Gefetz dafür.
123. Zufügen mehrziffriger Zahlen.
124. Rechenregel fürs Zufügen.
125. Zahlenzufügen ist trennbar. Wenn $a + b = a + c$, fo $b = c$.
126. Abziehen (Subtrahiren), Vorrat (minuendus), Abzug (subtractor). Rest oder Unterschied.
127. Zeichen des Abziehens —, gelefen „strich" oder „minus;"
Strichgröse (negative Gröse) $(- b)$, Strichklammer $-(\ \ )$.
„Plus" und „Strich" entgegengefetzte Zeichen.
128. Gliederausdruck (Polynom); Glied, durch Plus oder Strich geknüpft.
129. $a = a + b - b$; $a = a - b + b$;
130. Das Eins von Eins.
131. Gefetz der ersten Ordnung der Zahlenlehre.
132. Jede Zahlgröse ist als Einheit zu fetzen.
133. $+(-a) = -(+a) = -a$; $+(+a) = -(-a) = +a$.
134. $a + 0 = a - 0 = a$.
135. $0 = a - a = -a + a$. Wenn $a = b$, fo ist $a - b = 0$.
136. Das Abziehen mehrziffriger Zahlen.

137. Rechenregel fürs Abziehen. Borgeregeln.
138. Gleichartig, gleichwertig, entgegengefetzt.
139. $+a$ und $-a$ find entgegengefetzte Zahlen.
140. Jede Zahl ist entweder Pluszahl oder Strichzahl oder Null.
141. Die Summe von Pluszahlen, die von Strichzahlen.
142. Grösere Zahl, kleinere Zahl, $a > b$, $b < a$.
Ausschliesendes Mittel $c = \text{Mitt}(b[,]a)$. Einschliesendes Mittel $c = \text{Mitt}[b, a]$.
143. Jede Zahl entweder gröser, gleich oder kleiner als a.
144. Wenn $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3, \cdots a_{n-1} > a_n$, fo $a_1 > a_n$.
145. $+a > 0$, $-a < 0$.
146. Wenn $a > b$, fo ist $a - b$ gleichartig mit a.
147. Wenn $a > b$, fo ist $a \pm c > b \pm c$.
148. Wenn $a + c > a$, fo ist $(a + c) + b > a + b$.
149. Wenn $a_1 + c_1 > a_1$, $a_2 + c_2 > a_2, \cdots$, fo ist
$(a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + b > a_1 + a_2 + b$.
150. Wenn $a + c > a$, fo ist $b - (a + c) < b - a$.
151. Benannte Zahl ae, Anzahl a, Name e, gleichbenannte.
152. In der Zahlenlehre nur gleichbenannte.
153. $ae + be + \cdots = (a + b + \cdots)e$; $ae - be = (a - b)e$.
154. Alle Sätze erster Ordnung gelten für benannte Zahlen.
155. Vervielfachen, Multipliziren. Vielfaches, Produkt.
156. $(a + 1)b = ab + 1 \cdot b$; $a(b + 1) = ab + a \cdot 1$; $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
157. $(+a)(+b) = ab = (-a)(-b)$; $(+a)(-b) = -ab = (-a)(+b)$.
$-(a + b)c = -(ac + bc) = -ac - bc$; $-(a - b)c = -(ac - bc)$
$= -ac + bc$.
158. $(-1)a = -a$.
159. $2\mathfrak{a}$ Strichfache geben $+$; $2\mathfrak{a} + 1$ Strichfache geben Strich.
160. Gefetz der Vervielfachung.
161. $(a \cdot 10^n)(b \cdot 10^m) = ab \cdot 10^{n+m}$.
162. Vervielfachung einer einziffrigen mit einer mehrziffrigen Zahl.
163. Vervielfachung mehrziffriger Zahlen.
164. Trennbares Vervielfachen.
Wenn $ac = bc$, fo $a = b$ wenn $c \gtrless 0$.
165. Teilen, Dividiren; Zuteilende Gröse (dividendus); Teiler (divifor); Quote (quotiens); Bruch, Zähler, Nenner; Vorzahl (Koeffizient). Nenner $\gtrless 0$.
166. Zeichen des Teilens : oder / gelefen „durch,"
Teilgröse $(:b)$, gelefen „durch b," Teilklammer :( ), Teilstrich $\frac{a + b}{c}$.
„Mal" und „durch" umgekehrte Zeichen.
167. $a = \frac{ab}{b} = \frac{a}{b} \cdot b = a \cdot b : b = a : b \cdot b$.
168. $a \cdot (:b) = a : (\cdot b) = a : b$; $a : (:b) = a \cdot (\cdot b) = ab$.
169. $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) : b = a_1 : b + a_2 : b + \cdots + a_n : b$.
170. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.
171. $\cdot(:a) = :(\cdot a) = :a$; $:(:a) = \cdot a$ wo $a \gtrless 0$.

172. $a = a \cdot 1 = \frac{a}{1}$.

173. $1 = a : a = : a \cdot a$, wo $a \gtrless 0$.

174. $\frac{0}{a} = 0 \cdot a = 0$, wo $a \gtrless 0$.

175. Wenn $\frac{a}{b} = 0$ oder $ab = 0$ und $b \gtrless 0$; fo $a = 0$.

176. Brucheinheit. $\frac{1}{a}$ $1 : a$.

177. $\frac{1}{a} = 1 : a = : a$; $\frac{m}{a} = m \cdot \frac{1}{a}$.

178. $1 : (-a) = -(1 : a)$; $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$.

179. $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

180. Gefetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre.

181. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$.

182. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

183. Beziehungsgefetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre.

184. Rechenregel fürs Teilen.

185. Gemeinnenner $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots \frac{a_n}{b_n}$, Gemeinnenner $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$.

186. $\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \cdots \pm \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_1 \pm P_2 \pm \cdots \pm P_n}{P}$

wo $P = b_1 b_2 \cdots b_n$ und $P_a = b_1 b_2 \cdots b_{a-1} \cdot a_a \cdot b_{a+1} \cdots b_n$

187. Jede Zahlgröse ist als Einheit zu fetzen.

188. Zehntbruch (Dezimalbruch).

$a + 1$ Bruchstelle $= {}^1/_{10}$ mal $a + 1$te Bruchstelle; gleichnamige Zehntel. Hundertel. Taufendtel. Zehntaufendtel. Milliontel.

$0_{,1}$ $0_{,01}$ $0_{,001}$ $0_{,0001}$ $0_{,000001}$

189. $0_{,0a} = 0000_{,0a0000}$.

190. Gleichnamig machen der Zehntbrüche.

191. Zufügen der Zehntbrüche.

192. Abziehen der Zehntbrüche.

193. Vervielfachen mit zehn, hundert, taufend, million.

194. Teilen durch zehn, hundert, taufend, million.

195. Vervielfachen mit ${}^1/_{10}$, ${}^1/_{100}$, ${}^1/_{1000}$ u. f. w.

196. Teilen durch ${}^1/_{10}$, ${}^1/_{100}$, ${}^1/_{1000}$ u. f. w.

197. Vervielfachen eines Zehntbruches.

198. Vervielfachen zweier Zehntbrüche.

199. Teilen durch Zehntbrüche.

200. Teilen eines Zehntbruches durch einen Zehntbruch.

201. Vergleichung: Wenn $a > b$ und c Pluszahl, fo ist $ca > cb$ und $-ca < -cb$.

202. Wenn $a + c > a$ und b eine Pluszahl, fo $(a + c)b > ab$.

203. Wenn $a_1 + c_1 > a_1, a_2 + c_2 > a_2, \cdots$, ſo $(a_1 + c_1)(a_2 + c_2) > a_1 a_2$.
204. Wenn $a_1 < 1, a_2 < 1, \cdots$, ſo $a_1 a_2 \cdots < 1$.
Wenn $a_1 > 1, a_2 > 1, \cdots$, ſo $a_1 a_2 \cdots > 1$.
205. Echte Bruchzahl, Zähler kleiner als Nenner.
206. Wenn $\frac{a}{b}$ echte Bruchzahl, ſo $\frac{a}{b} < 1$.
207. $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots < 1$, wenn $\frac{a_a}{b_a}$ echte Bruchzahlen.
208. $\frac{a}{b + c} < \frac{a}{b}$ wenn $b + c > b$.
209. Aufgehen von a in ac, wenn c ganze Zahl.
210. a und 1 gehen in a auf.
211. Wenn a in b aufgeht, ſo $b \leqq a$.
212. Wenn a in b und b in a aufgeht, ſo $a = b$.
213. Wenn $b = \mathfrak{a}a$ und $c = \mathfrak{b}b$, ſo $c = \mathfrak{a}\mathfrak{b}a$.
214. Gemeinmas (gemeinschaftliches Mas). Fremd (primär).
215. Wenn a Gemeinmas von b und c, ſo auch von $\mathfrak{b}b \pm \mathfrak{c}c$, wo $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ganze Zahlen.
216. Auffinden des grösten Gemeinmases von 2 Zahlen.
217. Wenn m gröstes Gemeinmas von a und b, ſo mc das von ac und bc.
218. Wenn c in ab aufgeht und dem a fremd, ſo geht c in b auf.
219. Primzahl, zuſammengeſetzte Zahl, Primfache.
220. Wenn Primzahl a nicht in b aufgeht, ſo ist ſie dem b fremd.
221. Wenn Primzahl a nicht in b und c aufgeht, ſo auch nicht in bc.
222. Wenn ſie nicht in $a_1, a_2, \cdots a_n$ aufgeht, ſo auch nicht in $a_1 a_2 \cdots a_n$.
223. Jede zuſammengeſetzte Zahl lässt ſich in Primfache zerlegen.
224. Wenn $a_1, a_2, \cdots a_n$ Primfache und $a_1 a_2 \cdots a_n = B$, ſo nur Ordnung verschieden.
225. In jede Zahl gehen nur ihre Primfache und die Zeuge derſelben auf.
226. Gröstes Gemeinmas von n Zahlen finden.
227. Kurzer oder reduzirter Bruch.
228. Wenn $a \leqq bb$ und die Primzahlen $< b$ gehen nicht auf, ſo a eine Primzahl.
229. Zwei, vier, acht gehen auf, wenn ſie in die letzte, in die beiden, in die 3 letzten Ziffern aufgehen.
230. Gerade Zahlen, ungerade Zahlen.
231. Fünf geht auf, wenn die letzte Ziffer 5 oder 0 ist.
232. Querſumme einer Zahl.
233. Drei und neun gehen auf, wenn ſie in die Querſumme aufgehen.
234. Neunerrest, gleiche Neunerreste.
235. Neunerprobe beim Zufügen.
236. dgl. beim Abziehen.
237. dgl. beim Vervielfachen.
238. dgl. beim Teilen ohne Rest.
239. dgl. beim Teilen mit Rest.
240. Aufgehen von 11.
241. Aufgehen von 7, 13.
242. Kleinster Gemeinnenner oder Dividuus.
243. Kleinsten Gemeinnenner zweier Zahlen finden.

244. Kleinsten Gemeinnenner mehrer Zahlen finden.
245. Zahlenreihe (arithmetische Reihe) ersten Ranges.
a erstes, t ntes Glied, b Unterschied 2er Glieder, S Summe der n ersten Glieder.
246. $t = a + (n-1)b$; $S = \frac{n(a+t)}{2} = na + \frac{n(n-1)}{2} b$.
247. Summe der ganzen Zahlen von 1 bis $n = \frac{n(n+1)}{2}$.
248. Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2n-1) = n^2$.
249. Zahlenmittel (arithmetisches Mittel) von $a_1, a_2, \cdots a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \frac{1}{n}$.
250. Verwandlung eines Bruches in einen Zehntbruch.
251. Endlicher, unendlicher, gekürzter Zehntbruch. Kürzungsstelle.
252. Wiederkehr (Periode). Rein wiederkehrender (periodischer), gemischter Bruch.
253. Brüche, die nur 2 und 5 als Fache im Nenner, geben endlichen Zehntbruch.
254. Brüche, die nicht 2 und 5 als Fache im Nenner, geben rein wiederkehrenden Zehntbruch.
255. Brüche, die 2, 5 und andere als Fache im Nenner, geben gemischten Zehntbruch.
256. Verwandlung des endlichen Zehntbruches in gewöhnlichen Bruch.
257. Verwandlung des rein wiederkehrenden Zehntbruches in gewöhnlichen Bruch.
258. Verwandlung des gemischten Zehntbruches in gewöhnlichen Bruch.
259. Praktisches Rechnen. Abgekürztes Rechnen.
260. Abgekürztes Zufügen und Abziehen.
261. Abgekürztes Vervielfachen.
262. Abgekürztes Teilen.
263. Wertzahl eines Mases.
264. Auflösen (resolviren) des höhern Mases ins niedere.
265. Zurückführen (reduziren) des niedern Mases ins höhere.
266. Die mehrfach benannte Zahl einnamig machen.
267. Die einnamige Zahl mehrfach benannt machen.
268. Mehrfach benannte Zahlen zufügen.
269. Desgleichen bei zehnteiligen Masen.
270. Mehrfach benannte Zahlen abziehen.
271. Desgleichen bei zehnteiligen Masen.
272. Vervielfachen benannter Zahlen.
273. Alle Gesetze der Vervielfachung gelten.
274. Vervielfachen einer einfach benannten Zahl.
275. Vervielfachen einer mehrfach benannten Zahl.
276. Zweite Art.
277. Teilen benannter Zahlen: Messen und Schneiden.
278. Alle Gesetze der Teilung gelten fürs Schneiden.
279. Teilen einer einfach benannten Zahl.
280. Teilen einer mehrfach benannten Zahl.
281. Zweite Art.
282. Alle Gesetze der Teilung gelten fürs Messen.

283. Einfach benannte Zahl teilen durch gleichnamige.
284. Mehrfach benannte Zahl teilen durch mehrfach benannte.
285. **Bruchgleichung (Proportion)** Verhältniss. Aeusere, innere Grösen, $a:b=c:d$.
286. Wenn $a:b=c:d$, und $b \gtrless 0$, $d \gtrless 0$, ſo $ad=bc$.
287. Wenn $ad=bc$, ſo $a:b=c:d$.
288. Wenn $a:b=c:d$, ſo $d:b=c:a$ und $a:c=b:d$.
289. Wenn $a:b=c:d$ und $a=c \gtrless 0$, ſo $b=d$.
290. Wenn $a:b=c:d$, ſo ist $a=\frac{bc}{d}$ und $b=\frac{ad}{c}$.
291. Wenn $a:b=c:d$, ſo ist $\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{c}{d}$.
292. Wenn $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\cdots$, ſo $\frac{ma+nb+pc+\cdots}{ma_1+nb_1+pc_1+\cdots}=\frac{a}{a_1}$.
293. Wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ſo $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{a}{c}$.
294. Wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{b}=\frac{c}{d}$, ſo $a=e$.
295. Wenn $\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1}$, $\frac{a_2}{b_2}=\frac{c_2}{d_2}$, $\cdots \frac{a_n}{b_n}=\frac{c_n}{d_n}$, ſo $\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}=\frac{c_1c_2\cdots c_n}{d_1d_2\cdots d_n}$.
296. **Bruchkreuz** $\frac{a}{b}\Big|\frac{c}{d}$, Scheitelzeuge ad und bc.
297. Im Bruchkreuze $\frac{a}{b}\Big|\frac{c}{d}$ ist $ad=bc$.
298. **Dreiſatz oder Regeldetri.**
299. Wenn $\frac{x}{a}\Big|\frac{d}{c}$ oder $\frac{a}{x}\Big|\frac{c}{d}$, ſo $x=\frac{ad}{c}$.
300. Die gleichbenannten einnamigen Zahlen unter einander.
301. Erweiterter Dreiſatz.
302. **Gleichung ersten Grades.** Unbekannte, Wurzel, Auflöſung.
303. Wenn $a=b$, ſo $a\pm c=b\pm c$, ferner $ac=bc$, und $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, wo $c \gtrless 0$.
304. Wenn $a+c=b$, ſo $a=b-c$; Wenn $a-c=b$, ſo $a=b+c$.
Wenn $ac=b$, ſo $a=\frac{b}{c}$; Wenn $\frac{a}{c}=b$, ſo $a=bc$.
305. Wegschaffen eines Gliedes, eines Fachs oder eines Nenners.
306. Alle Vorzeichen der Glieder kann man entgegengeſetzt nehmen.
307. Wenn beide Seiten Brüche, ſo kann man ſie umkehren.
308. Eingerichtete Gleichung. Gleichung n ten Grades.
309. Die Gleichung ersten Grades ist aufgelöst, wenn eingerichtet.
310. Löſung der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.
311. Anwendung dieſer Gleichungen.
312. Löſung der Gleichung ersten Grades mit 2 Unbekannten.
313. Löſung der Gleichung ersten Grades mit 3 Unbekannten.
314. Löſung der Gleichung ersten Grades mit n Unbekannten.

Zweiter Abschnitt der Zahlenlehre: Höhere Zahlenlehre oder Höhen, Tiefen und Logen.

315. Höhen, Potenziren.
316. Zeichen des Höhens: a^m, gelefen „a hoch m."
Bafe a, Stufe (Exponent) m, Höhe (Potenz).
317. Bafenklammer $(ab)^c$ und $(a+b)^c$, Stufenklammer a^{bc} und a^{b+c}.
318. $a^{b+1} = a^b \cdot a$; $a^1 = a$; $1^1 = 1$.
319. $a^0 = 1$, wo $a \gtrless 0$.
320. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, wo c eine ganze Zahl.
321. $a_{1,n}^{Sb_b} = Pa_{1,n}^{b_b}$ oder $a^{b_1+b_2+\cdots+b_n} = a^{b_1} \cdot a^{b_2} \cdots a^{b_n}$.
322. $a^1 = a$ $1^a = 1$.
323. $a^c \cdot b^c = (ab)^c$, wo c eine ganze Zahl.
324. $a^{bc} = (a^b)^c$.
325. $(a^b)^c = (a^c)^b$.
326. Gefetz der Zahlenhöhung.
327. $a^n \overset{*}{=} P_n a = a \cdot a \cdots a$, * wo n ganze Pluszahl.
Vorläufig foll die Stufe stets ganze Pluszahl fein.
328. $0^n = 0$.
329. $1^n = 1$; $(-1)^{2n} = 1$; $(-1)^{2n+1} = -1$.
330. $(+a)^n = +(a^n)$; $(-a)^{2n} = +(a^{2n})$; $(-a)^{2n+1} = -(a^{2n+1})$.
331. Desgleichen.
332. $a^{-n} \overset{*}{=} \frac{1}{a^n}$; $a^n \overset{*}{=} \frac{1}{a^{-n}}$ * wo $a \gtrless 0$.
333. Zahl vervielfachen bez. teilen durch 10^n.
334. $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$ wo $a \gtrless 0$.
335. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$ wo $b \gtrless 0$.
336. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$ wo a und $b \gtrless 0$.
337. Echter Plusbruch erhöht.
338. Wenn $a^n = 1$, und $n \gtrless 0$, fo $a = 1$.
339. Wenn $a^b = 1$ und $a \gtrless 1$, fo $b = 0$.
340. Wenn $a^c = b^c$, wo $c \gtrless 0$, fo $a = b$.
Wenn $a^c = a^d$, wo $a \gtrless 1$, fo $c = d$.
341. Tiefen, Radiziren. Stufe $\gtrless 0$.
342. Zeichen des Tiefens $a^{\frac{1}{n}}$, gelefen „a hoch $\frac{1}{n}$" oder „a tief n."
Zutiefende Gröse (radicandus), Senke (radicator), Tiefe (radix).
343. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.
344. $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$.

345. $1^{\frac{1}{a}} = 1$.
346. Für das Tiefen gelten alle Gesetze des Höhens.
347. $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$.
348. $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.
349. $a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$. $a^{\frac{1}{m:n}} = a^{\frac{n}{m}}$.
350. Logen, Logarithmiren. Loghöhe (potentia log.) Logbase (basis log.) Log (Logarithmus).
351. Zeichen des Logens $\frac{b}{a}$, gelesen „b gelogt nach a;" $l_a b$, gelesen „log b nach a."
352. $c = \frac{a^c}{a}$.
353. $\frac{1}{b} = 0$.
354. $\frac{b}{b} = 1$.
355. $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.
356. $\frac{a:b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$.
357. $\frac{a^b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}$. $l_c a^b = b \cdot l_c a$.
358. $\frac{a^{\frac{1}{b}}}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}$. $l_c a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} l_c a$.
359. Gesetz des Logens.
360. $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$. $l_c a = l_c a \cdot l_c \cdot b$.
361. $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b}$. $l_c a = \frac{1}{b} a : l_b c$.
362. Zehnlog (gemeiner, briggischer Logarithmus), $\log a = l_{10} a$.
363. $\log a = \log_{10} a = \frac{a}{10}$, $\log abc^n = \log (abc^n)$.
364. $\log a \cdot 10^n = \log a + n$; $\log a : 10^n = \log a - n$.
365. Desgleichen.
366. Stellenlog (characteristica), Ziffernlog (mantissa).
367. Dieselben Ziffern haben denselben Ziffernlog.
368. Logtafel (Logarithmentafel): Tafel der Ziffernloge.
369. Stellenlog gleich der Stelle der höchsten Ziffer.

370. Auffinden des Logs zur Zahl.
371. Auffinden der Zahl zum Loge.
372. $\log ab = \log a + \log b$; $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.
373. $\log a^n = n \cdot \log a$; $\log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a$.
374. Elog (natürlicher, neperscher Log). $e = 2{,}718281828459$. $\log e = 0{,}4342944819$.
375. $\frac{a}{e} = \frac{a}{10} : \frac{e}{10}$; $l_e a = 2{,}3025851 \cdot \log a$.
376. $\frac{a}{10} = \frac{a}{e} \cdot \frac{e}{10}$; $\log a = 0{,}4342945\, l_e a$.
377. Wenn $a > b$ und a, b, c Pluszahlen, ſo $a^n > b^n$ und $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$.
378. Wenn $a > b$ und $c > 1$ und a, b Pluszahlen, ſo $c^a > c^b$ und $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
379. Wenn $a > 1$, ſo ist log a Pluszahl, wenn $a < 1$, ſo Strichzahl.
380. Wenn p in a^b aufgeht, ſo auch in a; wo p, a, b ganze Pluszahlen.
381. Wenn a und b fremde und n ganze Zahl, ſo a^n und b^n fremde.
382. Endzahl (Rationalzahl), Unzahl (Irrationalzahl).
383. Alle Sätze der Zahlenlehre gelten für Unzahlen.
384. $a^{\frac{1}{n}}$ ganze Zahl oder Unzahl, wenn a ganze Pluszahl.
385. log a Unzahl, wenn a weder Höhe, noch Tiefe von 10.
386. Wenn a eine Primzahl auser 2 und 5, ſo ist $a^{4a+2} = b \cdot 10 + 1$ oder $= b \cdot 10 + 9$, und ist $a^{4a} = b \cdot 10 + 1$, wo b eine ganze Pluszahl.
387. Geschiedszahl und Geänderzahl von n zur mten Stufe, wo n ganze Zahl.

$$n^{\cdot m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot\ 2 \cdot\ 3 \cdots\ n}; \quad n'^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Tauschzahl von $m = m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$.

388. Zeichen der Geschiedszahl $n^{\cdot m}$, geleſen „n Punkt m,“ Geänderzahl n'^m geleſen „n Schlag m,“ Tauschzahl m!, geleſen „m Tausche.“
389. $n^{\cdot m} = \frac{n'^m}{m!}$ $n'^m = m! \cdot n^{\cdot m}$.
390. $n^{\cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.
391. $(n+1)^{\cdot m} = n^{\cdot m} + n^{\cdot m-1}$.
392. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
393. Binomischer Lehrſatz:

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot\ 2} a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n,$$

$$= S n^{\cdot a} a^{n-a} b^a$$ wo n ganze Pluszahl.

394. Rechenregel für zweite Tiefe.
395. Abgekürztes Berechnen der zweiten Tiefe.
396. Log der Summe.

397. Log des Unterschiedes.
398. **Zahlenreihe** (arithmetische Reihe) p ten Ranges.
399. Die p ten Unterschiede find gleich.
Das $\mathfrak{a}$te Glied der c ten Unterschiede ${}^{c}a_{\mathfrak{a}}$.
400. ${}^{c}a_{n+1} = {}^{c}a_n + {}^{c+1}a_n$.
401. ${}^{p+\mathfrak{a}}a_{\mathfrak{b}+1} - {}^{p+\mathfrak{a}}a_{\mathfrak{b}} = 0$.
402. ${}^{c}a_{n+1} = Sn^{\cdot\mathfrak{a}}({}^{c+\mathfrak{a}}a_1)$.
403. ${}^{c-1}a_{n+1}(-{}^{c-1}a_1) = \underset{1,n}{S}{}^{c}a_{\mathfrak{a}}$.
404. $\underset{1,n}{S}{}^{c}a_{\mathfrak{a}} = \underset{1,}{S}n^{\cdot\mathfrak{a}}({}^{c+\mathfrak{a}-1}a_1)$.
405. **Stufenreihe** (geometrische Reihe) ersten Ranges. $a_{\mathfrak{a}+1} : a_{\mathfrak{a}} = b$.
a erstes, t n tes Glied, b Folgebruch, S Summe der n ersten Glieder.
406. $t = ab^{n-1}, \qquad S = \frac{tb-a}{b-1} = a\frac{b^n-1}{b-1} = a\frac{1-b^n}{1-b}$.
407. **Zinfen und Renten**: Vermögen k, Zinsfus p, Zinsfach $z = 1 + \frac{p}{100}$.
Jährlicher Beitrag b, Jahresrente r.
408. Vermögen k hat nach n Jahren Wert $x = kz^n$.
409. Vermögen k hatte vor n Jahren Wert $x = kz^{-n}$.
410. Jährlicher Beitrag b giebt nach n Jahren Vermögen $x = bz\frac{z^n-1}{z-1}$.
411. Anfangsvermögen x giebt für n Jahre die Rente r; $x = r\frac{z^n-1}{(z-1)z^n-1}$.
412. Jährlicher Beitrag x für n Jahre giebt nach n + 1 Jahren die Rente r auf q Jahre $x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q-1}{z^n-1}$.
413. **Höhenreihe** (Potenzreihe) von x. $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots$
Entsprechende Vorzahlen; Vorzahl Null.
414. $(ax^n + bx^{n-1} + \cdots) + (\mathfrak{a}x^n + \mathfrak{b}x^{n-1} + \cdots) = (a + \mathfrak{a})x^n + (b + \mathfrak{b})x^{n-1} + \cdots$
415. $(ax^n + bx^{n-1} + \cdots) - (\mathfrak{a}x^n + \mathfrak{b}x^{n-1} + \cdots) = (a - \mathfrak{a})x^n + (b - \mathfrak{b})x^{n-1} + \cdots$
416. $(ax^n + bx^{n-1} + \cdots)\mathfrak{a}x^m = a\mathfrak{a}x^{n+m} + b\mathfrak{a}x^{n+m-1} + \cdots$
417. $(ax^n + bx^{n-1} + \cdots) : \mathfrak{a}x^m = \frac{a}{\mathfrak{a}}x^{n-m} + \frac{b}{\mathfrak{a}}x^{n-m-1} + \cdots$
418. $(ax^n + bx^{n-1} + \cdots)(\mathfrak{a}x^m + \mathfrak{b}x^{m-1} + \mathfrak{c}x^{m-2} + \cdots)$
$= a\mathfrak{a}x^{n+m} + (b\mathfrak{a} + a\mathfrak{b})x^{n+m-1} + (c\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + a\mathfrak{c})x^{n+m-2} + \cdots$
419. Vorzahlen für jede Stufe.
420. $\frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B}$.
421. **Reihenzahl, Systemzahl.** Grundzahl, Reihenbruch.
Zehntzahl (dekadische Systemzahl), Zehntbruch (Dezimalbruch).
422. a auf n ter Stelle $= a \cdot 10^n$; 0 te Stelle links neben Komma.

Dritter Abschnitt der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre.

423. Das J (**die imaginäre Eins**) = i. **die Jgröse (imaginäre Gröse)** = ia.
424. $i = (-1)^{1/2}; \qquad i^2 = -1$.

425. $(-a)^{1/2} = i \cdot a^{1/2}$.

426. **Richtgröse** (**komplexe Gröse**) $= a + ib$. Erste, zweite Zahl.
Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$; **Richteinheit** $(a^2 + b^2)^{1/2} = 1$.
$a + ib = \alpha + i\beta$, dann und nur dann, wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$.
Die **Zahlgrösen** umfassen die Zahlen und die Richtgrösen.

427. $r^2 \stackrel{*}{=} a^2 + b^2$ * wenn $a + ib$ gegeben.

428. **Lotseiten** (**Katheten**) a und b, **Spannseite** (**Hypotenuse**) r.

429. Alle Gesetze der niedern Zahlenlehre gelten für Richtgrösen.

430. $(a + ib) \pm (\alpha + i\beta) = (a \pm \alpha) + i(b \pm \beta)$.

431. $(a + ib)(\alpha + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i(a\beta + b\alpha)$.

432. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2$.

433. $\frac{a + ib}{\alpha + i\beta} = \frac{(a + ib)(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$.

434. $\frac{a + ib}{r} = \frac{a}{r} + i\frac{b}{r}$ ist eine Richteinheit.

435. **Winkel der Richteinheit** β.
Kreisumfang: $2\pi = 2 \cdot 3{,}14159265359 = 360^0$ à $60'$ à $60''$.

Echter Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$. **Rechter Winkel** $\frac{1}{2}\pi = 90^0$.

Erster Plusrechter 0 bis $\frac{\pi}{2}$, zweiter $\frac{\pi}{2}$ bis π.

Erster Strichrechter 0 bis $-\frac{\pi}{2}$, zweiter $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$.

436. **Ergänzungswinkel** $= 90^0 - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$.
Nebenwinkel $= 180^0 - \beta = \pi - \beta$.

437. In Richteinheit 1te Zahl Cosinus $\beta = \cos\beta$, 2te Zahl Sinus $\beta = \sin\beta$.

438. $\cos\beta = \frac{a}{r}$; $\sin\beta = \frac{b}{r}$; $\cos\beta + i\sin\beta$ = Richteinheit.

439. $(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta) = 1$.
$\cos\beta - i\sin\beta = \frac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}$.

440. $a + ib = r(\cos\beta + i\sin\beta)$ wo $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

441. $(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$; $\cos\beta = (1 - (\sin\beta)^2)^{1/2}$; $\sin\beta = (1 - (\cos\beta)^2)^{1/2}$.

442. $\cos\beta =$ Mitt. $[-1, +1]$; $\sin\beta =$ Mitt. $[-1, +1]$.

443. Im ersten Plusrechten sin und cos Pluszahl.

444. $\sin(-\beta) = -\sin\beta$; $\cos(-\beta) = \cos\beta$.

445. $\sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$; $\cos(180^0 - \beta) = -\cos\beta$.

446. Sin Pluszahl von $2a\pi$ bis $(2a + 1)\pi$,
Strichzahl von $(2a + 1)\pi$ bis $(2a + 2)\pi$.

Cos Pluszahl von $\left(2a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$,

Strichzahl von $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $\left(2(a + 1) - \frac{1}{2}\right)\pi$.

447. $\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)=\cos\beta-i\sin\beta=\frac{1}{\cos\beta+i\sin\beta}$.

448. $\cos(180^0-\beta)+i\sin(180^0-\beta)=-\cos\beta+i\sin\beta=-\frac{1}{\cos\beta+i\sin\beta}$.
$\cos(180^0+\beta)+i\sin(180^0+\beta)=-\cos\beta-i\sin\beta=-(\cos\beta+i\sin\beta)$.

449. $\sin n\pi=0$; $\cos 2n\pi=1$; $\cos(2n+1)\pi=-1$; wo n ganze Zahl.

450. Wenn $a(\cos\alpha+i\sin\alpha)=b(\cos\beta+i\sin\beta)$ und $a\ \mathsf{Z}\ 0$, $b\ \mathsf{Z}\ 0$,
und α und $\beta=\mathrm{Mitt}[+\pi,-\pi]$, so ist $a=b$ und $\alpha=\beta$.

451. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$.

452. $\cos(\alpha+\beta)=(\cos\alpha)\cos\beta-(\sin\alpha)\sin\beta$.
$\sin(\alpha+\beta)=(\sin\alpha)\cos\beta+(\cos\alpha)\sin\beta$.

453. $\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha)\cos\beta+(\sin\alpha)\sin\beta$.
$\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha)\cos\beta-(\cos\alpha)\sin\beta$.

454. $\sin 2\alpha=2(\sin\alpha)\cos\alpha$.
$\cos 2\alpha=(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2=1-2(\sin\alpha)^2=2(\cos\alpha)^2-1$.

455. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^{1/2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^{1/2}$.

456. $\cos(n+{}^1/_2)\pi=0$; $\sin(2n+{}^1/_2)\pi=1$; $\sin(2n-{}^1/_2)\pi=-1$; n ganze Zahl.

457. $\cos 90^0=0$; $\sin 90^0=1$.

458. $\cos 45^0=\sin 45^0=\frac{1}{2^{1/2}}={}^1/_2\cdot 2^{1/2}$.

459. Sin x wächst von -1 bis $+1$ für x von $(2n-{}^1/_2)\pi$ bis $(2n+{}^1/_2)\pi$
nimmt ab von $+1$ bis -1 für x von $(2n+{}^1/_2)\pi$ bis $(2n+1{}^1/_2)\pi$.
Cos x wächst von -1 bis $+1$ für x von $(2n-1)\pi$ bis $2n\pi$
nimmt ab von $+1$ bis -1 für x von $2n\pi$ bis $(2n+1)\pi$.

460. $\cos(90^0-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$; $\sin(90^0-\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

461. $\cos\alpha+i\sin\alpha=\sin(90^0-\alpha)+i\cos(90^0-\alpha)$.

462. $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$
$=(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\cdots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)$.

463. $\cos n\alpha+i\sin n\alpha\overset{*}{=}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$ * n ganze Zahl.

464. $\cos nx\overset{*}{=}S(-1)^a n^{\cdot 2a}(\cos x)^{n-2a}\cdot(\sin x)^{2a}$ * n ganze Zahl.
$\sin nx\overset{*}{=}S(-1)^a n^{\cdot 2a+1}(\cos x)^{n-(2a+1)}\cdot(\sin x)^{2a+1}$ * n ganze Zahl.

465. $[a(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n\overset{*}{=}a^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ * n ganze Zahl.

466. Tan = Tangente; Cot = Cotangente.

467. $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$; $\cot\beta=\frac{\cos\beta}{\sin}$; $\cot\beta=\frac{1}{\tan\beta}$;
$1+(\tan\beta)^2=\frac{1}{(\cos\beta)^2}$; $1+(\cot\beta)^2=\frac{1}{(\sin\beta)^2}$.

468. $\tan(-\beta)=\tan(180^0-\beta)=-\tan\beta$.
$\cot(-\beta)=\cot(180^0-\beta)=-\cot\beta$.

469. Tan und Cot Pluswert im 1. Plus-, 2. Strichrechten.
Strichwert im 2. Plus-, 1. Strichrechten.

470. $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-(\tan\alpha)\tan\beta}$; $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+(\tan\alpha)\tan\beta}$.

471. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}$.

472. $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

473. $\tan n\pi = 0 = \cot(n+{}^1/_2)\pi$; $\tan(n+{}^1/_2)\pi = \infty = \cot n\pi$; n ganze Zahl

474. Tan x wächst von $-\infty$ bis $+\infty$ für x von $(n-{}^1/_2)\pi$ bis $(n+{}^1/_2)\pi$.
Cot x nimmt ab von $+\infty$ bis $-\infty$ für x von $n\pi$ bis $(n+1)\pi$.

475. $\cot(90^0-\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$; $\tan(90^0-\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$.

476. $\sin(n\pi+(-1)^n x) = \sin x$; $\sin(n\pi-(-1)^n x) = -\sin x$.
$\cos(2n\pi \pm x) = \cos x$; $\cos((2n+1)\pi \pm x) = -\cos x$.
$\tan(n\pi+x) = \tan x$; $\tan(n\pi-x) = -\tan x$.
$\cot(n\pi+x) = \cot x$; $\cot(n\pi-x) = -\cot x$.

477. Winkeltafel, trigonometrische Logarithmentafel.

478. Praktischste Einrichtung der Winkeltafel.

479. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2(\sin\alpha)\cos\beta$.
$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2(\cos\alpha)\sin\beta$.
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2(\cos\alpha)\cos\beta$.
$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = 2(\sin\alpha)\sin\beta$.

480. $\sin\alpha+\sin\beta = 2(\sin{}^1/_2(\alpha+\beta))\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)$.
$\sin\alpha-\sin\beta = 2(\cos{}^1/_2(\alpha+\beta))\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)$.
$\cos\alpha+\cos\beta = 2(\cos{}^1/_2(\alpha+\beta))\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)$.
$\cos\beta-\cos\alpha = 2(\sin{}^1/_2(\alpha+\beta))\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)$.

481. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \tan{}^1/_2(\alpha+\beta)$; $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \tan{}^1/_2(\alpha-\beta)$.
$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} = \cot{}^1/_2(\alpha-\beta)$; $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} = \cot{}^1/_2(\alpha+\beta)$.

482. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = (\cot{}^1/_2(\alpha+\beta))\tan{}^1/_2(\alpha-\beta)$;
$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta} = (\tan{}^1/_2(\alpha+\beta))\tan{}^1/_2(\alpha-\beta)$.

483. $(\sin\alpha)^2-(\sin\beta)^2 = (\sin(\alpha+\beta))\sin(\alpha-\beta)$;
$(\cos\beta)^2-(\cos\alpha)^2 = (\sin(\alpha+\beta))\sin(\alpha-\beta)$.

484. $\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2^{1/2}\sin(\alpha \pm 45^0) = 2^{1/2}\cos(\alpha \mp 45^0)$.
$\cos\alpha \pm \sin\alpha = 2^{1/2}\sin(45^0 \pm \alpha) = 2^{1/2}\cos(45^0 \mp \alpha)$.

485. $\left(\frac{1\pm\sin 2\alpha}{2}\right)^{1/2} = \sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha)$;
$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \tan(45^0+{}^1/_2\alpha) = \cot(45^0-{}^1/_2\alpha)$.

486. $\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{(\cos\alpha)\cos\beta}$; $\cot\beta \pm \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{(\sin\alpha)\sin\beta}$.

487. $1 \pm \tan\alpha = 2^{1/2}\cdot\frac{\sin(45^0\pm\alpha)}{\cos\alpha} = 2^{1/2}\frac{\cos(45^0\mp\alpha)}{\cos\alpha}$;
$\cot\alpha \pm 1 = 2^{1/2}\frac{\sin(45^0\pm\alpha)}{\sin\alpha} = 2^{1/2}\frac{\cos(45^0\mp\alpha)}{\sin\alpha}$.

488. $\frac{1 \pm \tan\alpha}{1 \mp \tan\alpha} = \tan(45^0 \pm \alpha) = \cot(45^0 \mp \alpha)$.

489. $\frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{\cot\alpha - 1} = \tan\alpha$.

490. **Bogen, arcus** β, wo der Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$.

491. Zeichen: $\operatorname{arc}(\sin = x)$, $\operatorname{arc}(\cos = x)$, $\operatorname{arc}(\tan = x)$, $\operatorname{arc}(\cot = x)$.

492. $\operatorname{arc}(\sin = x) = \operatorname{arc}\left(\cos = (1 - x^2)^{1/2}\right) = \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}}\right)$

$= \operatorname{arc}\left(\cot = \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{x}\right)$.

$\operatorname{arc}(\tan = z) = \operatorname{arc}\left(\cot = \frac{1}{z}\right) = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}}\right)$

$= \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{1}{(1 + z^2)^{1/2}}\right)$.

493. $\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} = 90^0$.

$\operatorname{arc}(\tan = z) + \operatorname{arc}(\cot = z) = \frac{\pi}{2} = 90^0$.

494. $\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\sin = y) \overset{*}{=} \operatorname{arc}\left(\sin = x(1 - y^2)^{1/2} + y(1 - x^2)^{1/2}\right)$,
$* \; x^2 + y^2 \leqq 1$.

$\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\sin = y) \overset{*}{=} \pi - \operatorname{arc}\left(\sin = x(1 - y^2)^{1/2} + y(1 - x^2)^{1/2}\right)$,
$* \; x^2 + y^2 > 1$.

$\operatorname{arc}(\sin = x) - \operatorname{arc}(\sin = y) = \operatorname{arc}\left(\sin = x(1 - y^2)^{1/2} - y(1 - x^2)^{1/2}\right)$.

495. $\operatorname{arc}(\tan = x) + \operatorname{arc}(\tan = y) \overset{*}{=} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right)$, $\quad * \; xy \leqq 1$.

$\operatorname{arc}(\tan = x) + \operatorname{arc}(\tan = y) \overset{*}{=} \pi - \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right)$, $\quad * \; xy > 1$.

$\operatorname{arc}(\tan = x) - \operatorname{arc}(\tan = y) = \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{x - y}{1 - xy}\right)$.

496. **Allgemeiner Bogen Aarc.**

497. $\operatorname{Aarc}(\sin = x) \cong a\pi + (-1)^a \operatorname{arc}(\sin = x)$.
$\operatorname{Aarc}(\cos = x) \cong 2a\pi \pm \operatorname{arc}(\cos = x)$.
$\operatorname{Aarc}(\tan = x) \cong a\pi + \operatorname{arc}(\tan = x)$.
$\operatorname{Aarc}(\cot = x) \cong a\pi + \operatorname{arc}(\cot = x)$.

498. Wenn $x^n = 1$, wo n eine ganze Zahl, ſo $x = \cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}$, wo a alle ganzen Werte von 0 bis $n - 1$.

499. **Richtgröse in der Baſe.**
$[a(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^c = a^c(\cos c\alpha + i\sin c\alpha)$, wo c reine Zahl.
$\varepsilon = \cos 1 + i\sin 1$.

500. $a(\cos c + i\sin c) = a\varepsilon^c$.

501. $(a\varepsilon^c)^n \overset{*}{=} a^n \cdot \varepsilon^{cn}$ $\quad$ * wo entweder n ganze Zahl, oder c echter Winkel.

502. $a^{b+c} \overset{*}{=} a^b \cdot a^c$ $\quad$ * wo b und c Zahlen, a eine Zahlgröse.

503. $a^{b-c} \overset{*}{=} a^b : a^c$ $\quad$ * wo b und c Zahlen, $a \gtrless 0$.

504. $\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $\varepsilon^{-\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

505. $\cos\alpha = \dfrac{\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}}{2}$.

506. $\varepsilon^{\alpha} = \varepsilon^{2n\pi + \alpha}$.

507. $a^q \cdot b^q \cdot c^q \cdots \overset{*}{=} (abc\cdots)^q \cdot \varepsilon^{2n\pi q}$ * wo q Zahl und $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 2n\pi + p$, wo $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ wie p echte Winkel.

508. $a^{bc} \overset{*}{=} (a^b)^c \varepsilon^{2n\pi c}$ * wo b und c Zahlen und $\alpha b = 2n\pi + p$, wo α und p echte Winkel.

509. $a^{\beta\gamma\delta\zeta} \overset{*}{=} \left(\left((a^{\beta})^{\gamma}\right)^{\delta}\right)^{\zeta} \cdot \varepsilon^{2\pi(m\gamma\delta + n\delta + o)\zeta}$

* wo $a = a_1\varepsilon^{\alpha}$ und α echt, $\beta, \gamma, \delta, \zeta$ Zahlen und $\alpha\beta = 2m\pi + r_1$, $r_1\gamma = 2n\pi + r_2$, $r_2\delta = 2o\pi + r_3$ und r_1, r_2, r_3 echte Winkel.

510. Richtgröse in der Stufe.

a) $e^i = \varepsilon$ $(e^{\alpha})^i = \varepsilon^{\alpha}$.

b) $(a\varepsilon^{\alpha})^{i\beta} \overset{*}{=} a^{i\beta}(\varepsilon^{\alpha})^{i\beta}$ $a^{i\beta} = (a^{\beta})^i$ $(\varepsilon^{\alpha})^{i\beta} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\alpha\beta}$

* wo a eine Pluszahl, β eine reine Zahl und α eine echte Zahl.

c) $a^{\alpha + i\beta} \overset{*}{=} a^{\alpha} \cdot a^{i\beta}$ * wo α und β Zahlen, a eine beliebige Zahlgröse.

511. $(e^{\alpha})^i = (e^i)^{\alpha} = e^{i\alpha} = \varepsilon^{\alpha}$.

512. $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}$.

513. $2^n \cdot (\cos\alpha)^n \overset{*}{=} S n^{*a} \cos(n - 2a)\alpha$ * n ganze Pluszahl,

oder für gerades n:

$$2^{n-1}(\cos\alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^{*2} \cdot \cos(n-4)\alpha + \cdots$$
$$+ n^{*(\frac{1}{2}n - 1)} \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2} \cdot n^{*(\frac{1}{2}n)},$$

für ungerades n:

$$2^{n-1}(\cos\alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^{*2} \cdot \cos(n-4)\alpha + \cdots$$
$$+ n^{*(\frac{1}{2}n - 3)} \cos 3\alpha + n^{*\frac{1}{2}(n-1)} \cos\alpha.$$

514. Für gerades n, wo n eine ganze Pluszahl:

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}n}(\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^{*2} \cdot \cos(n-4)\alpha - \cdots$$
$$+ (-1)^{(\frac{1}{2}n - 1)} n^{*(\frac{1}{2}n - 1)} \cos 2\alpha + (-1)^{\frac{1}{2}n} n^{*\frac{1}{2}n} \cdot \tfrac{1}{2},$$

für ungerades n:

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(\sin\alpha)^n = \sin n\alpha - n\sin(n-2)\alpha + n^{*2} \cdot \sin(n-4)\alpha - \cdots$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(n-3)} n^{*\frac{1}{2}(n-3)} \sin 3\alpha + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{*\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \sin\alpha.$$

515. $\varepsilon^i = \dfrac{1}{e}$.

516. $e = \cos i - i \sin i$.

517. $a^{ib} \overset{*}{=} \cos b \cdot l_e a + i \sin b l_e a$ * wo a reine Pluszahl.

518. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{ib} = (\varepsilon^{\alpha})^{ib} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\alpha b}$.

519. $e^{2n\pi i} = 1$.

520. $(a + ib)^{c+id} = (e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta))^{c+id} = (e^{\alpha}\varepsilon^{\beta})^{c+id} = e^{\alpha c - \beta d} . \varepsilon^{\beta c + \alpha d}$
wo β echter Winkel.

521. $a + ib = e^{\beta + i\alpha}$ und zwar α echter Winkel. $e^{\beta + i\alpha} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$.

522. $(e^{a+ib})^{c+id} \overset{*}{=} e^{(a+ib)(c+id)}$ * wenn b echter Winkel.

523. $(e^{a}\varepsilon^{b})^{c+id} \overset{*}{=} e^{ac-bd}\varepsilon^{bc+ad}\varepsilon^{-2n\pi(c+id)}$ * wenn $b = 2n\pi + p$, wo p echter Winkel.

524. $e^{(a+ib)(c+id)} \overset{*}{=} (e^{a+ib})^{c+id}\varepsilon^{-2n\pi(c+id)}$ * wenn $b = 2n\pi + p$, wo p echter Winkel.

525. $e^{a+ib} . e^{c+id} = e^{a+c+i(b+d)}$.

526. $(a + ib)^{c+id} . (a + ib)^{f+ig} = (a + ib)^{c+f+i(d+g)}$.

527. $(a + ib)^{-(c+id)} = \left(\frac{1}{a+ib}\right)^{c+id}$.

528. $(a + ia_1)^{n+im} . (b + ib_1)^{n+im} \cdots \overset{*}{=} ((a + ia_1)(b + ib_1)\cdots)^{n+im} . \varepsilon^{2p\pi(n+im)}$,
wo $\alpha_1 + \beta_1 + \cdots = 2p\pi + r$, und r echter Winkel, auch $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1} \ldots$.

529. $(a + ia_1)^{(m+im_1)(n+in_1)} \overset{*}{=} ((a + ia_1)^{m+im_1})^{n+in_1} . \varepsilon^{2p\pi(n+in_1)}$,
wo $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$, $\alpha(m + im_1) = 2p\pi + r$, und α_1 und r echte Winkel.

530. Wenn $e^{a+ia_1} = e^{b+ib_1}$, so ist $a_1 = b_1 + 2a\pi$, $a + ia_1 = b + ib_1 + i2a\pi$.

531. Wenn $(a + ia_1)^x = b + ib_1$, so ist $x = \frac{\beta + i\beta_1 + i2a\pi}{\alpha + i\alpha_1}$.

532. Richtgröse im Loge. Mehrwertiger Log $\frac{b + ib_1}{a + ia_1}$.

Einwertiger $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} = \frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + i\alpha_1}$, wo α_1 und β_1 echte Winkel.

533. $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \cong \frac{\beta + i\beta_1 + i2a\pi}{\alpha + i\alpha_1}$; $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \overset{*}{=} \frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + i\alpha_1}$ * $\alpha_1\,\beta_1$ echt.

534. $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e} \cong \beta + i\beta_1 + i2a\pi$; $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e} \overset{*}{=} \beta + i\beta_1$ * β_1 echt.

535. $\mathbf{l}_e(a + ib) \cong {}^1/_2\, l_e(a^2 + b^2) + i\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm a\pi\right]$, wo $\frac{b}{a}$ echter Winkel;

$l_e(a + ib) \overset{*}{=} {}^1/_2\, l_e(a^2 + b^2) + i\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right)$ * wo $\frac{b}{a}$ echt.

Für a Plusgröse $\mathbf{l}_e(a + ib) \cong {}^1/_2\, l_e(a^2 + b^2) + i\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm 2a\pi\right]$.

Für a Strichgröse $\mathbf{l}_e(a + ib) \cong {}^1/_2\, l_e(a^2 + b^2) + i\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm (2a - 1)\pi\right]$.

536. $\mathbf{l}_e\frac{a + ia_1}{a - ia_1} \cong 2i\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{a_1}{a}\right) \pm a\pi\right]$;

$l_e\frac{a + ia_1}{a - ia_1} \overset{*}{=} 2i\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{a_1}{a}\right)\right]$ * wo $\frac{a_1}{a}$ echt.

537. $\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha}} \cong \frac{\beta + 2a\pi}{\alpha}$; $\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha}} \overset{*}{=} \frac{\beta}{\alpha}$ * wo β und α echte Winkel.

538. $\frac{b + ib_1}{a + ia_1} \cong \frac{b + ib_1}{a + ia_1} + i2a\pi \frac{e}{a + ia_1}$.

539. $\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon^\alpha} \stackrel{*}{=} \frac{\beta}{\alpha}$ $\quad$ * β und α echte Winkel.

540. $(a + ia_1)\frac{e^{\alpha + i\alpha_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + (b + ib_1)\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + \cdots$

$$\stackrel{*}{=} \frac{\left(e^{\alpha + i\alpha_1}\right)^{a + ia_1} \cdot \left(e^{\beta + i\beta_1}\right)^{b + ib_1} \cdots}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + i2n\pi \frac{e}{e^{\varrho + i\varrho_1}}$$

* wo $a\alpha_1 + \alpha a_1 + b\beta_1 + \beta b_1 + \cdots = 2n\pi + p$, und $\alpha_1, \beta_1 \cdots$ und p echte Winkel.

541. $\frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \cdots \stackrel{*}{=} \frac{(a + ia_1)(b + ib_1)\cdots}{r + ir_1} + i2n\pi \frac{e}{r + ir_1}$
* wo $\alpha_1 + \beta_1 + \cdots = 2n\pi + p$, wo $\alpha_1, \beta_1, \cdots p$ echte Winkel und $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1} \ldots$.

542. $(a + ia_1)\frac{e^{\alpha + i\alpha_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} \stackrel{*}{=} \frac{\left(e^{\alpha + i\alpha_1}\right)^{a + ia_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + i2n\pi \frac{e}{e^{\varrho + i\varrho_1}}$
* wo $a\alpha_1 + \alpha a_1 = 2n\pi + p$ und wo α_1, p echte Winkel.

543. $\frac{a + ia_1}{\left(e^{\varrho + i\varrho_1}\right)^{b + ib_1}} \stackrel{*}{=} \frac{a + ia_1}{e^{\varrho + i\varrho_1}} : (b + ib_1)$ $\quad$ * wenn $\varrho b_1 + b\varrho_1 = c$ und c echter Winkel.

544. $\alpha \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \beta \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \cdots \cong \frac{(a + ia_1)^\alpha (b + ib_1)^\beta \cdots}{r + ir_1}$
dann und nur dann, wenn $\alpha, \beta \cdots$ ganze Zahlen und zwei von ihnen Eins zum grösten gemeinschaftlichen Mase haben.

545. $\frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \cdots \cong \frac{(a + ia_1)(b + ib_1)\cdots}{r + ir_1}$

546. Richtgröse im Winkel.

547. $\sin iy = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}$; $\quad \cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$.

548. $\sin(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x$
$= (\sin x)\cos iy + (\cos x)\sin iy.$

$\cos(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x$
$= (\cos x)\cos iy - (\sin x)\sin iy.$

549. $\tan(x + iy) = \frac{2\sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} = \frac{\sin 2x + \sin 2iy}{\cos 2x + \cos 2iy}$;

$\cot(x + iy) = \frac{\sin 2x - \sin 2iy}{\cos 2x - \cos 2iy}$.

550. $\operatorname{arc}(\tan = x) = \frac{1}{2i} l_e \frac{1 + ix}{1 - ix}$.

551. $\operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{1}{2i} l_e \frac{(1-x^2)^{1/2} + ix}{(1-x^2)^{1/2} - ix}$.

552. $\operatorname{arc}(\sin = a + ib) = x + iy$; $\operatorname{arc}(\cos = a + ib) = \frac{\pi}{2} - (x + iy)$.

553. $\operatorname{arc}(\sin = a + ib) + \operatorname{arc}(\cos = a + ib) = \frac{\pi}{2}$.

554. $\operatorname{arc}(\tan = c + id) = x + iy$; $\operatorname{arc}(\cot = c + id) = \frac{\pi}{2} - (x + iy)$.

555. $\operatorname{arc}(\tan = c + id) + \operatorname{arc}(\cot = c + id) = \frac{\pi}{2}$.

Vierter Abschnitt der Zahlenlehre: Die Gleichungslehre.

556. **Gleichung.** Unbekannte x, Wurzeln. Entfernen (eliminiren).
557. Gleiches zufügen, abziehen, mit Gleichem vervielfachen, teilen.
558. Wenn $a + c = b$, ſo $a = b - c$, wenn $a - c = b$, ſo $a = b + c$.
Wenn $ac = b$, ſo $a = \frac{b}{c}$, wenn $\frac{a}{c} = b$, ſo $a = bc$.
559. Wegschaffen eines Gliedes, Faches oder Nenners.
560. Wenn $a^n = b$, ſo $a = b^{\frac{1}{n}}$, wenn $a^{\frac{1}{n}} = b$, ſo $a = b^n$.
Wenn $n^a = b$, ſo $a = \frac{b}{n}$, wenn $\frac{a}{n} = b$, ſo $a = n^b$.
561. Alle Vorzeichen entgegengeſetzt nehmen.
562. Die Brüche umkehren, wenn Zähler ungleich Null.
563. Gleichung nten Grades, eingerichtet.
564. Gleichung mit einer Unbekannten einzurichten.
565. Gleichung ersten Grades auflöſen.
566. Wenn $x^n = a$, ſo $x_a = a^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}}$, wo a ganze Zahl von 1 bis $n - 1$.
567. Jede Gleichung nten Grades eine Wurzel.
568. 569. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1})(x - \alpha)$, wo $\alpha_0 = a_0 + \alpha a_1$; $\alpha_a = a_a + \alpha a_{a+1}$; $\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \alpha$.
570. 571. $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$.
572. In $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ist $a_{n-r} = S\alpha_a\alpha_b\alpha_c \cdots (-1)^r$, wo $\alpha_a\alpha_b\alpha_c \cdots$ r Fache enthält und a, b, c jede Gröse.
573. Wenn $a + ib$ eine Wurzel, ſo auch $a - ib$.
574. Jede Gleichung nten Grades lässt ſich ſo einrichten, dass die Vorzahl von x^{n-1} Null wird.
575. Gleichung und Wurzel zweiten Grades.
576. Reine, gemischte, reine Jgröse $i = (-1)^{1/2}$.
577. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
578. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
579. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
580. Wenn $x^2 = a^2$, ſo $x \cong \pm a$.
Wenn $x^2 = -b^2$, ſo $x \cong \pm ia$.

581. Wenn $x^2 + ax = b$, ſo ist $x = -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$.

582. Wenn $x^2 - ax = b$, ſo ist $x = \frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$.

583. Wenn $x^2 + ax = b$, ſo ist $x_1 = b^{1/2}\tan{}^1/_2\varphi$, $x_2 = -b^{1/2}\cot{}^1/_2\varphi$, wo $\tan\varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$.

584. Wenn $x^2 + ax = -b$, ſo ist $x_1 = -a(\sin{}^1/_2\varphi)^2$, $x^2 = -a(\cos{}^1/_2\varphi)^2$, wo $\sin\varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$.

585. Wenn $x^3 + 3px = 2q$, ſo ergiebt ſich

Für $+p$ ist $(\tan\varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}$; $\tan\psi = \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}$;

$x_1 = 2p^{1/2} : \tan 2\psi$; $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \pm i\left(3(p + {}^1/_4x_1^2)^{1/2}\right)$.

Für $-p$ und $p^3 < q^2$ ist $(\sin\varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}$; $\tan\psi = \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{1/3}$;

$x_1 = 2p^{1/2} : \sin 2\psi$; $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \pm \left((3(p - {}^1/_4x_1^2)^{1/2}\right)$.

Für $-p$ und $p^3 > q^2$ ist $\sin 3\varphi = \left(\frac{q^2}{p^3}\right)^{1/2}$.

$-x_1 = 2p^{1/2} \cdot \sin\varphi$; $\left.\begin{matrix} x^2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = 2p^{1/2}\sin(60^\circ \mp \varphi)$.

586. Wenn $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ und $e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2$, auch $d = {}^1/_2(a + e)$, $f = -\frac{b}{2e}$ ist, ſo ist

$x = \pm\, {}^1/_2e^{1/2} \pm \left({}^1/_4e \pm f \cdot e^{1/2} - d\right)^{1/2}$.

587. Wenn $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$, ſo läſst ſich eine andere Gleichung finden, deren Wurzeln die Quader der Wurzeln dieſer Gleichung.

588. Näherung nach Newton: $x = c + z$, $f_0x = f_0c + zf_0'c$.

589. $\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$.

590. Hier ist $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-(\alpha+1)} = a_{n-\alpha} + b_{n-\alpha}c$, $f_0c = a_0 + b_0c$.

591. Gleichung, wo die Wurzeln um c kleiner.

592. Näherung nach Horner.

593. Näherung nach Graeffe (Pluswerte der Wurzeln).

594. „ Zahlwurzeln (reelle Wurzeln).

595. „ eine Unbekannte entfernen.

596. „ nach Encke (Richtwurzeln).

Formelbuch

der

Folgelehre oder Funktionenlehre.

Zweiter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

Zweiter Zweig der Formenlehre: Die Folgelehre oder Funktionenlehre.

Einleitung.

1. Folgelehre oder Funktionenlehre, höhere Analyfis.
2. Folge (Funktion) von x, Veränderliche (Variable), Beständige (Konstante).
3. Zeichen der Folge f_0, F_0, φ_0, Φ_0, der Veränderlichen x, y, der Beständigen a, b.
4. Folge einer Veränderlichen.
5. Reinfolge (reelle Funktion), Richtfolge (komplexe Funktion) $f_0(x, i)$.
   Die Zahlfolgen umfassen die Reinfolgen und die Richtfolgen.
6. Richtfolge $f_0(x, i) = \varphi_0 x + i \psi_0 x$.
7. Gefolge (Funktional) von x ist die mehrwertige Formel $G_0 x$.
8. $G_0 x \cong G_0' x$, die Gefolge können nur entsprechend gleich gefetzt werden.
9. Unendlicher Zehntbruch, abgebrochner Zehntbruch, Rest.
10. $\left(\frac{1}{10}\right)^n > \left(\frac{1}{10}\right)^n \left[a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right]$, wo $a_1, a_2 \cdots < 10$.
11. Stetig wachfende Reihe von Zahlen.
12. Satz der Zahlenreihe.
13. Satz der Richtreihe.
14. Die Zahl x wächst stetig von a bis b. $x =$ Mitt. $[a, b]$.
    Die Zahl x wächst stetig zwischen a und b. $x =$ Mitt. $(a[,]b)$.
15. Reinfolge, die stetig wächst, bez. abnimmt, von a bis b.
16. Richtfolge, die stetig wächst, bez. abnimmt, von a bis b,

Erster Abschnitt: Niedere Folgelehre oder echte Reihen.

17. Unendliche Reihe $= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = S u_a$.
    Fortschreitungsfach $u_{a+1} : u_a$; der nte Rest $r_n = S_{n+1} u_a$.

18. Echte (konvergente) Reihe, wo der Pluswert von $r_n < c$, und c eine beliebige gegebene Pluszahl.
Unechte (divergente) Reihe entweder Uebergangs- oder fehlerhafte Reihe.

19. Jede echte Reihe ist einwertig, man kann ſich dem Werte beliebig nähern.

20. $\underset{,n}{S} u_\alpha < \frac{u_0}{1-p}$, wo $pu_\alpha > u_{\alpha+1}$ und $+p < 1$ ist.

21. Wenn $a > 1$, ſo $a^n > k$ } was auch k ſein mag, wenn n hinlänglich grose
Wenn $a < 1$, ſo $a^n < k$ } ganze Pluszahl.

22. Su_α ist echt, wenn $\frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} \leqq p$, wo p echter Bruch.

23. Wenn $r_n < c$, ſo ist $u_{n+\alpha} < 2c$.

24. $Sa_\alpha x^\alpha$ echt, wenn $x^2 < 1$ und a_α endliche Zahl.

25. $Sa_\alpha x^{-\alpha}$ echt, wenn $x^2 > 1$ und a_α endliche Zahl.

26. Jede echte fallende Reihe und jede echte Reihe mit gebrochner Stufe lässt ſich in eine echte steigende Höhenreihe verwandeln.

27. Wenn $Sa_\alpha x^\alpha = 0$ für jeden Wert des x von 0 bis c, ſo ist $a_\alpha = 0$.

28. Wenn $Sa_\alpha x^\alpha = Sb_\alpha x^\alpha$ für jeden Wert des x von 0 bis c, ſo $a_\alpha = b_\alpha$.

29. $f_0 x = Sa_\alpha x^\alpha$, wenn $x^2 < 1$ und $f_0 x$ stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn x wächst, auch a_α stets endlich ist.

30. $Sa_\alpha x^\alpha + iSb_\beta x^\beta$ echt, wenn $x^2 < 1$ und a_α, b_β endliche Zahlen.

31. Geschiedszahl $a^{\cdot n}$ (geleſen a Punkt n), wo n stets ganze Pluszahl.

$$a^{\cdot n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ \ 3\ \cdots\ n}.$$

32. Tauschzahl von $n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.

33. $a^{\cdot 0} = 1$; $a^{\cdot -n} = 0$; $0! = 1$.

34. $a^{\cdot 1} = a$; $a^{\cdot n} \overset{*}{=} \frac{a!}{n!\,(a-n)!}$ * wo $a \geqq n$.

35. $a^{\cdot n} = 0$ nur, entweder wenn n Strichzahl, oder wenn n ganze Pluszahl und zugleich $n > a$.

36. $(-a)^{\cdot n} = (-1)^n (a+n-1)^{\cdot n} = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{1\cdot\ 2\cdot\ \ 3\ \cdots\ n}$.

37. $\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{(a-1)(2a-1)\cdots((n-1)a-1)}{2\cdot\ \ 3\cdot\ \cdots\ n}$.

38. $\left(-\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = (-1)^n\left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{(a+1)(2a+1)\cdots((n-1)a+1)}{2\cdot\ \ 3\ \cdots\ n}$.

39. $(a+1)^{\cdot n} = a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1}$.

40. $(a+b)^{\cdot n} = a^{\cdot n} + a^{\cdot n-1} b + a^{\cdot n-2} b^{\cdot 2} + \cdots = Sa^{\cdot n-\alpha} b^{\cdot \alpha}$.

41. Zweigliederreihe (Binomialreihe) $Sa^{\cdot \alpha} x^\alpha$.
x die Baſe, a der Zeiger (Index).

42. $Sn^{\cdot \alpha} x^\alpha$ hat $n+1$ Glieder, wenn $x \gtrless 0$ und n ganze Pluszahl.

43. $Sa^{\cdot \alpha} x^\alpha$ echt, wenn $x^2 < 1$ ist.

44. $(Sa^{\cdot \alpha} x^\alpha)(Sb^{\cdot \alpha} x^\alpha) \overset{*}{=} S(a+b)^{\cdot \alpha} x^\alpha$ * wo $x^2 < 1$ oder $a = 0$ oder a ganze Pluszahl.

45. $(Sa^{\cdot \alpha} x^\alpha)^n \overset{*}{=} S(na)^{\cdot \alpha} x^\alpha$ * wo $x^2 < 1$ oder a ganze Pluszahl oder 0.

46. $(1+x)^n \overset{*}{=} Sn^{\cdot \alpha} x^\alpha$ * wo $x^2 < 1$ oder n ganze Pluszahl oder 0.

47. $(1-x)^n \overset{*}{=} S(-1)^\alpha n^{\cdot \alpha} x^\alpha$ * wo $x^2 < 1$ oder n ganze Pluszahl.

48. $\frac{1}{1 \pm x} \overset{*}{=} 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \cdots = S(\mp 1)^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}}$ * wo $x^2 < 1$.

49. Binomischer Lehrſatz:
$(a + b)^n \overset{*}{=} S n^{\cdot \mathfrak{a}} a^{n - \mathfrak{a}} b^{\mathfrak{a}}$ * wo $b^2 < a^2$ oder n ganze Pluszahl.

50. Polynomischer Lehrſatz.
$(a + b + c + \cdots)^n \overset{*}{=} S \frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots\mathfrak{b}\cdot 1\cdot 2\cdots\mathfrak{c}\cdots} a^{n-\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}} \cdots$
* wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$ und entweder n ganze Pluszahl oder $a^2 > b^2 > c^2 > \cdots$

51. $(1 + a)^n \overset{*}{=} 1 + nc + n^{\cdot 2} c^2 + \cdots = S \frac{n(n+1)\cdots(n+\mathfrak{a}-1)}{1\cdot\ 2\cdot\ \cdots\ \mathfrak{a}} c^{\mathfrak{a}}$.
* wo $c = \frac{a}{1+a}$ und $c^2 < 1$ oder $a > -{}^1/_2$.

52. $(1 + a)^{\frac{1}{n}} = S \frac{(n+1)(2n+1)\cdots((\mathfrak{a}-1)n+1)}{2\cdot\ 3\ \cdots\ \mathfrak{a}} \left(\frac{1}{n(a+1)}\right)^{\mathfrak{a}}$.

53. $(1 - a)^{\frac{1}{n}} = 1 - \underset{1}{S} \frac{(n-1)(2n-1)\cdots((\mathfrak{a}-1)n-1)}{2\cdot\ 3\ \cdots\ \mathfrak{a}} \left(\frac{1}{na}\right)^{\mathfrak{a}}$.

54. $(1 + a)^x \overset{*}{=} 1 + x\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots\right) + x^2 P$ * wo $c = \frac{a}{1+a}$, $c^2 < 1$, oder $a > -{}^1/_2$.

55. $\log(1 + a) \overset{*}{=} \log \frac{1}{1-c} = M\left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \cdots\right)$ *wo $c^2 < 1$.

56. $\log(1 - x) = -MS\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}}$; $\log(1 + x) = MS(-1)^{\mathfrak{a}-1}\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}}$.

57. $\log(1 + x) = \log\frac{1+z}{1-z} \overset{*}{=} 2M\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right)$ * wo $z^2 < 1$.

58. $\log(1 - x) = \log\frac{1-z}{1+z} \overset{*}{=} -2M\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right)$ * wo $z^2 < 1$.

59. Für Zehntloge ist $M = 0{,}4342944819$; $\frac{1}{M} = 2{,}30258509$.

60. Berechnung der Zehnloge für Primzahlen von 1 bis 100.

61. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, ſo $\log(a - b) = \log(c - d) = \log(e - f)$.

62. Berechnung der Zehnloge für Primzahlen von 100 bis 1000.

63. Berechnung der Tafel der Zehnloge.

64. Die Eloge (Neperschen oder natürlichen). Zeichen l_e; $M_e = 1$.

65. $l_e(1 \pm x) \overset{*}{=} \pm 2\left(\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right)$ * wo $z^2 < 1$.

66. $l_{10} x = M \cdot l_e x$; $l_e x = \frac{1}{M} l_{10} x$

67. $e = S\frac{1}{\mathfrak{a}!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}718281828459$.

68. $\sin x \overset{*}{=} x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots$ * wo $x^2 < 1$.
$\tan x \overset{*}{=} x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots$ * wo $x^2 < 1$.

69. $\cos x \overset{*}{=} 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots$ * wo $x^2 < 1$.

70. $\operatorname{arc}(\tan = x) \overset{*}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} = S(-1)^{\mathfrak{a}} \frac{x^{2\mathfrak{a}+1}}{2\mathfrak{a}+1}$ * wo $x^2 < 1$.

71. $\pi = 3{,}1415926535\,89793$; $1^0 = 0{,}01745\,32925$.
$1' = 0{,}00029\,08882$; $1'' = 0{,}00000\,48481\,36811$.

72. $\operatorname{arc}(\sin = x) \overset{*}{=} S\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2a-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2a}\cdot\frac{x^{2a+1}}{2a+1}$ * wo $x^2 < 1$

$\operatorname{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}(\sin = x)$.

73. $\sin x \overset{*}{=} S(-1)^a\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}$; $\cos x \overset{*}{=} S(-1)^a\frac{x^{2a}}{(2a)!}$ * wo $x^2 < 1$.

74. $\tan x \overset{*}{=} x + \frac{x^3}{1\cdot3} + \frac{2x^5}{1\cdot3\cdot5} + \frac{17x^7}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot3} + \frac{62x^9}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot3} + \cdots$

$\cot x \overset{*}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{1\cdot3} - \frac{x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot3} - \frac{2x^5}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9} - \frac{x^7}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot5} - \frac{2x^9}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot9}$

* wo $x^2 < 1$ und $x \gtrless 0$.

75. Berechnung der Loge für cos, tan und cot aus log sin.
76. Berechnung der Loge von sin für Sekunden von 0 bis $0^0\,30'$.
77. dgl. für 45^0, 30^0, 15^0, 18^0, 3^0, $1\frac{1}{2}^0$, 2^0, 1^0.
78. Berechnung der Winkeltafel von 0^0 bis 15^0.
79. dgl. von 15^0 bis 90^0.

Zweiter Abschnitt der Folgelehre: Höhere Folgelehre oder Diffe und Integern.

Die Diffe oder Differentialquotienten.

80. $f_0(x+y) \overset{*}{=} S\frac{y^a}{a!}f_0^{\,a}x$ * wo $f_0(x+y)$ stets wächst oder stets abnimmt, wenn y wächst und $y^2 < 1$.

81. Abgeleitete Folgen $f_0'x$, $f_0^{\,a}x$,   wo $f_0(x+y)$ echt und

$f_0(x+y) = f_0x + yf_0'x + \frac{y^2}{1\cdot2}f_0''x + \cdots = S\frac{y^a}{a!}f_0^{\,a}x$.

82. Diff x (Differentialquotient von x). Zeichen: $\underset{x}{\mathfrak{d}}f_0x$; $\underset{x}{\mathfrak{d}}^a f_0x$.

83. $\underset{x}{\mathfrak{d}}f_0x = f_0'x$.

84. $\underset{x}{\mathfrak{d}}^{a+1}f_0x = \underset{xx}{\mathfrak{d}\mathfrak{d}^a}f_0x$.

85. $\underset{x}{\mathfrak{d}}a = 0$; $\underset{x}{\mathfrak{d}}bx = b$; $\underset{x}{\mathfrak{d}}(a+bx) = b$.

86. $\underset{x}{\mathfrak{d}}x = 1$.

87. $\underset{x}{\mathfrak{d}}(u \pm v \pm z \pm \cdots) \overset{*}{=} \underset{x}{\mathfrak{d}}u \pm \underset{x}{\mathfrak{d}}v \pm \underset{x}{\mathfrak{d}}z \pm \cdots$

88. $\underset{x}{\mathfrak{d}}^n(u \pm v \pm z \pm \cdots) \overset{*}{=} \underset{x}{\mathfrak{d}}^n u \pm \underset{x}{\mathfrak{d}}^n v \pm \underset{x}{\mathfrak{d}}^n z \pm \cdots$

} * wo u, v, z, ... Folgen von x.

89. $\underset{x}{\mathfrak{d}}uv \overset{*}{=} u\underset{x}{\mathfrak{d}}v + v\underset{x}{\mathfrak{d}}u$ * wo u, v Folgen von x.

$\underset{x}{\mathfrak{d}}(f_0x)\varphi_0x = (f_0x)\underset{x}{\mathfrak{d}}\varphi_0x + (\varphi_0x)\underset{x}{\mathfrak{d}}f_0x$.

90. $\underset{x}{\mathfrak{d}}au \overset{*}{=} a\underset{x}{\mathfrak{d}}u$; $\underset{xa}{\mathfrak{d}}\frac{u}{} \overset{*}{=} \frac{1}{a}\underset{x}{\mathfrak{d}}u$ * wo u Folge von x.

91. $\frac{\mathfrak{d}_x uvz\cdots}{uvz\cdots} = \frac{\mathfrak{d}_x u}{u} + \frac{\mathfrak{d}_x v}{v} + \frac{\mathfrak{d}_x z}{z} + \cdots$.

92. $\mathfrak{d}^n_x uv \overset{*}{=} \mathfrak{S} n_{\cdot a}\left(\mathfrak{d}^a_x u\right)\mathfrak{d}^{n-a}_x v$ * wo u, v Folgen von x.

93. $\mathfrak{d}^n_x uvz\cdots \overset{*}{=} \mathfrak{S}\frac{n(n-1)\cdots(n-a+1)}{1\cdot 2\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdots c\cdots}\left(\mathfrak{d}^{n-a}_x u\right)\left(\mathfrak{d}^b_x v\right)\left(\mathfrak{d}^c_x z\right)$.

* wo u, v, z, ··· Folgen von x und $a = b + c + \cdots$.

94. $\mathfrak{d}_x \frac{u}{v} = \frac{v\,\mathfrak{d}_x u - u\,\mathfrak{d}_x v}{v^2}$.

95. $\mathfrak{d}_x f_o y \overset{*}{=} \left(\mathfrak{d}_y f_o y\right)\mathfrak{d}_x y$ oder $\mathfrak{d}_x f_o y \overset{*}{=} y' f_o' y$ * wo y Folge von x.

96. $\mathfrak{d}_y x = \frac{1}{\mathfrak{d}_x y}$ oder $\mathfrak{d}_{f_o x} x = \frac{1}{\mathfrak{d}_x f_o x}$.

97. $\mathfrak{d}_x f_o(y, v) \overset{*}{=} \left(\mathfrak{d}_x y\right)\mathfrak{d}_y f_o(y, v) + \mathfrak{d}_x v\,\mathfrak{d}_v f_o(y, v)$ oder

$\mathfrak{d}_x f_o(y, v) \overset{*}{=} y' f_o' y + v' f_o' v$ * wo y, v Folgen von x.

98. $\mathfrak{d}_x f_o(x, y) \overset{*}{=} f_o' x + y' f_o' y$ * wo y Folge von x.

99. $\mathfrak{d}_x f_o(y, u, v, \cdots) \overset{*}{=} \left(\mathfrak{d}_x y\right)\mathfrak{d}_y f_o(y, u, v, \cdots) + \left(\mathfrak{d}_x u\right)\mathfrak{d}_u f_o(y, u, v, \cdots) + \cdots$

$\overset{*}{=} y' f_o' y + u' f_o' u + v' f_o' v + \cdots$ * wo y, u, v, ·· Folgen von x.

100. **Taylorscher Lehrsatz:**

$f_o(x + y) \overset{*}{=} f_o x + y\,\mathfrak{d}_x f_o x + \frac{y^2}{1\cdot 2}\mathfrak{d}^2_x f_o x + \cdots = \mathfrak{S}\frac{y^a}{a!}\mathfrak{d}^a_x f_o x$.

* wo $y^2 < 1$, $f_o(x + y)$ stets wächst, oder stets abnimmt, wenn y wächst und $\mathfrak{d}^a_x f_o x$ endlich.

101. **Mac Laurinscher Lehrsatz:**

$f_o y \overset{*}{=} f_o x + y\,\mathfrak{d}_x f_o x + \frac{y^2}{1\cdot 2}\mathfrak{d}^2_x f_o x + \cdots = \mathfrak{S}\frac{y^a}{a!}\mathfrak{d}^a_x f_o x$

* wo für $\mathfrak{d}^a_x f_o x$ $x = 0$ gesetzt $y^2 < 1$ und $\mathfrak{d}^a_x f_o x$ endlich.

102. Wenn $F_o(x, f_o x) = 0$, so ist $\mathfrak{d}^a_x F_o(x, f_o x) = 0$.

103. Wenn $F_o(x, y) \overset{*}{=} 0$, so ist $\mathfrak{d}_x y = -\frac{\mathfrak{d}_x F_o(x, y)}{\mathfrak{d}_y F_o(x, y)}$ oder $y' = -\frac{F_o' x}{F_o' y}$.

* wo y Folge von x.

104. $\mathfrak{d}_x x^m = m x^{m-1}$; $\mathfrak{d}^a_x x^m = m(m-1)\cdots(m-a+1)x^{m-a} = \frac{m!}{(m-a)!}x^{m-a}$.

105. $\mathfrak{d}_x\left(\mathfrak{S} a_a x^a\right) = \mathfrak{S} a a_a x^{a-1}$; $\mathfrak{d}^m_x\left(\mathfrak{S} a_a x^a\right) = \mathfrak{S}\frac{a!}{(a-m)!}a_a x^{a-m}$.

106. $\mathfrak{d}^m_x x^m = m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots m$; $\mathfrak{d}^{m+1}_x x^m = 0$.

107. $\mathfrak{d}^a_x x^{-m} = (-1)^a\frac{(m+a-1)!}{(m-1)!}x^{-(m+a)}$.

108. $\mathfrak{d}_x x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n \cdot x^{1-\frac{1}{n}}}$; $\quad \mathfrak{d}^a_x x^{\frac{1}{n}} = (-1)^{a-1} \frac{n!}{(n-a)!} \frac{1}{n^a x^{a-\frac{1}{n}}}$.

109. $\mathfrak{d}^a_x x^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a (n+1)(2n+1)\cdots((2a-1)n-1)}{n^a x^{a+\frac{1}{n}}}$.

110. $\mathfrak{d}_x y^m = m y^{m-1} \mathfrak{d}_x y$.

111. $\mathfrak{d}_x \left(\mathfrak{S} a_a y^a\right) = \left(\mathfrak{d}_x y\right)\left(\mathfrak{S} a a_a y^{a-1}\right)$.

112. $\mathfrak{d}_x l_e x \overset{*}{=} \frac{1}{x}$ $\quad \mathfrak{d}_x l_e y \overset{*}{=} \frac{\mathfrak{d}_x y}{y}$ $\quad$ * wo $x = \mathbf{M}(0|,]2)$.

113. $\mathfrak{d}_x l_a x = \frac{1}{x l_e a} = \frac{l_a e}{x}$; $\quad \mathfrak{d}_x l_a y = \frac{l_a e}{y} \cdot \mathfrak{d}_x y = \frac{1}{y \cdot l_e a} \cdot \mathfrak{d}_x y$.

114. $\mathfrak{d}^n_x l_a x = l_a e (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{x^n}$.

115. $\mathfrak{d}^n_x l_e (a + bx) = l_e e\, (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot \frac{b^n}{(a+bx)^n}$.

116. $\mathfrak{d}_x l_a l_a x = (l_a e)^2 \frac{1}{x \cdot l_a x}$; $\quad \mathfrak{d}_x l_e l_e x = \frac{1}{x l_e x}$.

117. $\mathfrak{d}_x a^x = a^x l_e a$; $\quad \mathfrak{d}_x a^y = a^y l_e a \mathfrak{d}_x y$.

118. $\mathfrak{d}_x e^x = e^x$; $\quad \mathfrak{d}_x e^{ax} = a e^{ax}$.

119. $\mathfrak{d}^m_x a^x = a^x (l_e a)^m$.

120. $\mathfrak{d}^m_x e^x = e^x$; $\quad \mathfrak{d}^m_x e^{ax} = a^m \cdot e^{ax}$. $\quad e^{ax} = \mathfrak{S} \frac{(ax)^a}{a!}$.

121. $e^{ax} = \mathfrak{S} \frac{(ax)^a}{a!}$.

122. $\mathfrak{d}_x u^z = u^z \left(l_e u\, \mathfrak{d}_x z + z \frac{\mathfrak{d}_x u}{u} \right)$.

123. $\mathfrak{d}_x u^{z^t} = u^{z^t} \left(l_e (u^z)\, \mathfrak{d}_x t + t \cdot l_e u\, \mathfrak{d}_x z + z \frac{\mathfrak{d}_x u}{u} \right)$.

124. $\mathfrak{d}_x u^{(z^t)} = u^{(z^t)} \cdot z^t \left(l_e u \cdot l_e z\, \mathfrak{d}_x t + t\, l_e u \cdot \frac{\mathfrak{d}_x z}{z} + \frac{\mathfrak{d}_x u}{u} \right)$.

125. $\mathfrak{d}_x \sin x = \cos x$; $\quad \mathfrak{d}_x \cos x = -\sin x$;

$\mathfrak{d}_x (\sin x)^2 = \sin 2x$; $\quad \mathfrak{d}_x (\cos x)^2 = -\sin 2x$.

126. $\mathfrak{d}^n_x \sin x = \sin\left(\frac{n}{2}\pi + x\right)$; $\quad \mathfrak{d}^n_x \cos x = \cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right)$.

127. $\mathfrak{d}_x \tan x = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$; $\quad \mathfrak{d}_x \cot x = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -(1 + (\cot x)^2)$.

128. $\mathfrak{d}_x \sec x = \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = (\tan x) \sec x$; $\quad \mathfrak{d}_x \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -(\cot x) \operatorname{cosec} x$.

129. $\underset{x}{\mathfrak{d}}\,\mathrm{arc}(\sin = x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$; $\quad \underset{x}{\mathfrak{d}}\,\mathrm{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$.

130. $\underset{x}{\mathfrak{d}}\,\mathrm{arc}(\tan = x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\quad \underset{x}{\mathfrak{d}}\,\mathrm{arc}(\cot = x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

131. $\underset{x}{\mathfrak{d}}\,\mathrm{arc}(\sec = x) = \frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}$; $\quad \underset{x}{\mathfrak{d}}\,\mathrm{arc}(\mathrm{cosec} = x) = -\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}$.

132. $\underset{x}{\mathfrak{d}} l_e \sin x = \cot x$; $\quad \underset{x}{\mathfrak{d}} l_e \cos x = -\tan x$.

133. $\underset{x}{\mathfrak{d}} l_e \,\mathrm{cosec}\, x = -\cot x$; $\quad \underset{x}{\mathfrak{d}} l_e \sec x = \tan x$.

134. $\underset{x}{\mathfrak{d}} l_e \tan x = \frac{2}{\sin 2x}$; $\quad \underset{x}{\mathfrak{d}} l_e \cot x = \frac{-2}{\sin 2x}$.

135. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}} F_0(x+iy) = f_0(x+iy)$ dann und nur dann, wenn sowohl $\underset{x}{\mathfrak{d}}$ als auch $\underset{iy}{\mathfrak{d}} F_0(x+iy) = f_0(x+iy)$.

136. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}} (x+iy)^c \overset{*}{=} c(x+iy)^{c-1}$ $\qquad$ * wo c reine Zahl.

137. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} (x+iy)^c \overset{*}{=} c(c-1)\cdots(c-m+1)(x+iy)^{c-m}$.

138. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} Sa_a(x+iy)^a = \mathfrak{S}\frac{a!}{(a-m)!}a_a(x+iy)^{a-m}$.

139. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^a} (x+iy)^{-n} = (-1)^a n(n+1)\cdots(n+a-1)(x+iy)^{-(n+a)}$.

140. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^a} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{a-1}(n-1)(2n-1)\cdots((a-1)n-1)(x+iy)^{\frac{1}{n}-a}$.

141. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^a} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a(n+1)(2n+1)\cdots((a-1)n+1)}{n^a}(x+iy)^{-\left(a+\frac{1}{n}\right)}$.

142. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} e^{x+iy} = e^{x+iy}$.

143. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} a^{x+iy} = (l_e a)^m a^{x+iy}$; $\quad \underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} e^{a(x+iy)} = a^m e^{a(x+iy)}$.

144. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} l_e(x+iy) \cong (-1)^{m-1}(m-1)!\frac{1}{(x+iy)^m}$.

145. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}} \sin(x+iy) = \cos(x+iy)$; $\quad \underset{x+iy}{\mathfrak{d}} \cos(x+iy) = -\sin(x+iy)$.

146. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} \sin(x+iy) = \sin\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$

$\underset{x+iy}{\mathfrak{d}^m} \cos(x+iy) = \cos\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$.

147. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}} \tan(x+iy) = \frac{1}{(\cos(x+iy))^2}$; $\quad \underset{x+iy}{\mathfrak{d}} \cot(x+iy) = -\frac{1}{(\sin(x+iy))^2}$.

148. $\underset{x+iy}{\mathfrak{d}} \sec(x+iy) = \frac{\sin(x+iy)}{(\cos(x+iy))^2} = \tan(x+iy)\sec(x+iy)$.

$\underset{x+iy}{\mathfrak{d}} \mathrm{cosec}(x+iy) = -\frac{\cos(x+iy)}{(\sin(x+iy))^2} = -\cot(x+iy)\,\mathrm{cosec}(x+iy)$.

149. $\mathfrak{d}_{x+iy}\,\mathrm{Aarc}(\sin = x+iy) \cong \frac{1}{[1-(x+iy)^2]^{1/2}}$.

150. $\mathfrak{d}_{x+iy}\,\mathrm{Aarc}(\tan = x+iy) \cong \frac{1}{1+(x+iy)^2}$.

151. $\mathfrak{d}_{x+iy}\,\mathrm{Aarc}(\sec = x+iy) \cong \frac{1}{(x+iy)[1+(x+iy)^2]^{1/2}}$.

152. Alle Grundformeln für Diſſe ſind auch für die Richtgrösen gültig.

153. Wenn $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, ſo ist

$\mathfrak{d}_x y = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$ und $\mathfrak{d}^a_x y = n(n-1)\cdots$

$(n-a)a_n x^{n-a} + \cdots + (a+1)\cdot a \cdots 2\cdot a_{a+1} x + a(a-1)\cdots 1\cdot a_a = 0$.

154. Wenn x stetig von $-a$ bis $+a$, ſo $\frac{1}{x}$ stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{a}$.

155. $f_\circ x$ stetig, ſo lange $\mathfrak{d}_x \gtrless 0 \gtrless \frac{1}{0}$.

156. Beſondere Werte von $f_\circ x$, wo $\mathfrak{d}_x f_\circ x = 0$, bez. $\mathfrak{d}_{f_\circ x}\, x = 0$.

157. Fortbeugung von $f_\circ x$, wenn $S \frac{(\pm v)^{2+a}}{(2+a)!} \mathfrak{d}_x^{2+a} f_\circ x$ für $+v$ = für $-v$ und alle Diffe endlich.
Hohle Fortbeugung, wenn Strich-. Erhabene, wenn Plusgröse.

158. Fortbeugung, wenn $\mathfrak{d}_x^{2a} f_\circ x$ der erste Diff, der auser dem ersten $\gtrless 0$.

159. Grenzwert, wenn bei Fortbeugung auch $\mathfrak{d}_x f_\circ x \underset{.}{=} 0$.

160. Umbeugung von $f_\circ x$, wenn $S \frac{v^{2+a}}{(2+a)!} \mathfrak{d}_x^{2+a} f_\circ x$ für $+v$ und für $-v$ entgegengeſetzt und alle Diffe endlich.
Senkende Umbeugung, wenn für $+v$ Strich-, Erhebende, wenn für $+v$ Plusgröse.

161. Umbeugung, wenn $\mathfrak{d}_x^{2a+1} f_\circ x$ der erste Diff, der auser dem ersten $\gtrless 0$.

162. x^n stetig von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x ganze Zahl.

163. x^n hat für $x = 0$, wenn n Pluszahl, für $\frac{1}{x} = 0$, wenn n Strichzahl, eine Beugung.

164. $x^{\frac{m}{n}}$ stetig, wenn x eine Pluszahl.

165. $S_{0,n}\, a_a x^a$ stetig, wenn a_a und x Pluszahlen und a_a endlich.

166. Für $z = S_{0,n}\, a_a x^a$, $\mathfrak{d}_x z = S_{1,n}\, a a_a x^{a-1}$, $\mathfrak{d}^c_x z = S_{c,n}\, a(a-1)\cdots(a-c+1) a_a x^{a-c}$.

167. Für $y^m = z = S_{0,n}\, a_a x^a$ ist $y = z^{\frac{1}{m}}$, $\mathfrak{d}_x y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \cdot \frac{\mathfrak{d}_x z}{z}$;

$$\mathfrak{d}^2_x y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\mathfrak{d}^2_x z}{z} - \frac{(m-1)\left(\mathfrak{d}_x z\right)^2}{m \cdot z^2}\right];$$

$$\mathfrak{d}^3_x y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\mathfrak{d}^3_x z}{z} - \frac{3(m-1)\left(\mathfrak{d}^2_x z\right)\mathfrak{d}_x z}{m \cdot z^2} + \frac{(m-1)(2m-1)\left(\mathfrak{d}_x z\right)^3}{m^2 \cdot z^3}\right].$$

168. Gleichung n ten Grades $\mathfrak{d}^c_x z$ und $\mathfrak{d}^c_x y$ abzuleiten.

169. Jede Gleichung n ten Grades, wenn $a_n \gtrless 0$ die Form
$z = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ und
$z = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) = 0$, wo c_a die Wurzeln.

170. Für alle Wurzeln werden $\mathfrak{d}^c_x y$ unendlich und muss man entweder $x = c_a \pm h$ oder $\mathfrak{d}_y x$, oder $y'^m = y^m + a^m$ nehmen.

171. Für alle $x \gtrless c_a$ ist $y \gtrless 0$ und $\mathfrak{d}^c_x y$ endlich.

172. y ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn $\mathfrak{d}^{2a}_x y = \pm a \gtrless 0$ und alle vorher gehenden Diffe $= 0$.

173. Wenn $x \gtrless c_a$ und $\mathfrak{d}_x y \gtrless 0$, dagegen $\mathfrak{d}^2_x y, \mathfrak{d}^3_x y \cdot\cdot \mathfrak{d}^c_x y = 0$, $\mathfrak{d}^{c+1}_x y \gtrless 0$, fo ist

$$\mathfrak{d}^{c+1}_x y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{\mathfrak{d}^{c+1}_x z}{z} - \frac{m(m-1)\cdot\cdot(m-c)}{m^{c+1}} \frac{\left(\mathfrak{d}_x z\right)^{c+1}}{z^{c+1}}\right], \text{ wo } y^m = z = \mathfrak{S}_{0,n} a_a x^a.$$

174. Wenn $x \gtrless c_a$ und $\mathfrak{d}^a_x y = 0$ für $a = 2, 3 \cdot\cdot c$ und ungleich 0 für $c + 1 = 2b$, fo Fortbeugung, und zwar hohle, wenn $\mathfrak{d}^{2b}_x y$ eine Strichzahl, erhabene, wenn Pluszahl.

175. Wenn $x \gtrless c_a$ und $\mathfrak{d}^a_x y = 0$ für $a = 2, 3 \cdot\cdot c$, und ungleich 0 für $c + 1 = 2b + 1$, fo Umbeugung, und zwar fenkende, wenn $\mathfrak{d}^{2b+1}_x y$ Strichzahl, erhebende, wenn Pluszahl.

176. a^x stetig von $x = -\infty$ bis $+\infty$, wenn a Pluszahl ungleich 1.

177. $l_a x$ stetig für a und x Pluszahl, wenn a ungleich 1.

178. sin x und cos x stetig für $x = -\infty$ bis $+\infty$

179. tan x und cot x stetig für $x = -\infty$ bis $+\infty$.

180. sec x und cosec x stetig für $x = -\infty$ bis $+\infty$.

181. arc (sin $= x$) und arc (cos $= x$) stetig für $x = M[-1$ bis $+1]$.

182. arc (tan $= x$) und arc (cot $= x$) stetig für $x = M[-\infty$ bis $+\infty]$.

183. arc (sec $= x$) und arc (cosec $= x$) stetig für $x = \left\{\begin{matrix} M[-1, -\infty]. \\ M[+\infty, +1]. \end{matrix}\right.$

184. $F_0(x, i) = \varphi_0 x + i\psi_0 x$ stetig, wenn $\varphi_0 x$ stetig und $\psi_0 x$ stetig.

Die Integern und die Integrale.

185. Erstes Integral nach $x = \mathfrak{S}^1_x f_0 x$ (gewöhnlich $\int f_0 x$).

186. Mtes Integral nach x $\mathfrak{S}^m_x f_0 x$, w_a willkürliche Konstante.

187. $\mathfrak{S}^m_x f_0 x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + \varphi_0 x.$

188. Mte Integre nach x $\mathfrak{d}^{-m}_x f_0 x$, wo $w_a = 0$ geſetzt.

189. $\mathfrak{d}^m_x \mathfrak{d}^{-m}_x f_0 x = f_0 x = \mathfrak{d}^m_x \mathfrak{S}^m_x f_0 x.$

190. $\mathfrak{d}^{-m}_x \mathfrak{d}^m_x \varphi_0 x = \mathfrak{d}^m_x \mathfrak{d}^{-m}_x \varphi_0 x = \varphi_0 x.$

191. $\mathfrak{S}^m_x f_0 x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + w_{m-1} x^{m-1} + \mathfrak{d}^{-m}_x f_0 x.$

192. $\mathfrak{d}^{-m}_x (f_{0_1} x + f_{0_2} x + \cdots + f_{0_n} x) = \mathfrak{d}^{-m}_x f_{0_1} x + \mathfrak{d}^{-m}_x f_{0_2} x + \cdots + \mathfrak{d}^{-m}_x f_{0_n} x.$

193. $\mathfrak{d}^{-m}_x a f_0 x = a \mathfrak{d}^{-m}_x f_0 x.$

194. $\mathfrak{d}^{-1}_x a_n x^n = \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$; $\quad \mathfrak{d}^{-m}_x a_n x^n = \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n}.$

195. $\mathfrak{d}^{-m}_x \mathfrak{S} a_{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{S} \frac{\mathfrak{a}!}{(m+\mathfrak{a})!} a_{\mathfrak{a}} x^{m+\mathfrak{a}}.$

196. $\mathfrak{d}^{-1}_x a_n x^{-(n+1)} = -\frac{1}{n} a_n x^{-n}$;

$\mathfrak{d}^{-m}_x a_n x^{-(m+n)} = (-1)^m \frac{(n-1)!}{(m+n-1)!} a_n x^{-n}.$

197. $\mathfrak{d}^{-1}_x \frac{1}{x} = l_e x.$

198. $\mathfrak{d}^{-1}_x x^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = n x^{-\frac{1}{n}}.$

199. $\mathfrak{d}^{-m}_x x^{-\left(m-\frac{1}{n}\right)} = (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!}{n!} n^m x^{\frac{1}{n}}.$

200. $\mathfrak{d}^{-1}_x ex = ex$; $\quad \mathfrak{d}^{-1}_x e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$; $\quad \mathfrak{d}^{-m}_x ex = ex.$

201. $\mathfrak{d}^{-1}_x \sin x = -\cos x$; $\quad \mathfrak{d}^{-1}_x \cos x = \sin x.$

202. $\mathfrak{d}^{-m}_x \sin x = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right)$; $\quad \mathfrak{d}^{-m}_x \cos x = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right).$

203. $\mathfrak{d}^{-1}_x \frac{1}{(\cos x)^2} = \tan x$; $\quad \mathfrak{d}^{-1}_x \frac{1}{(\sin x)^2} = -\cot x.$

204. $\mathfrak{d}^{-1}_x \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \sec x$; $\quad \mathfrak{d}^{-1}_x \frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -\operatorname{cosec} x.$

205. $\mathfrak{d}^{-1}_x \cot x = l_e \sin x$; $\quad \mathfrak{d}^{-1}_x \tan x = -l_e \cos x.$

206. $\mathfrak{d}^{-1}_x \cot x = -l_e \operatorname{cosec} x$; $\quad \mathfrak{d}^{-1}_x \tan x = l_e \sec x.$

207. $\mathfrak{d}^{-1}_x \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = l_e \tan x = -l_e \cot x$;

$\mathfrak{d}^{-1}_x \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2} l_e \tan x = -\frac{1}{2} l_e \cot x.$

208. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{1+x^2} = \mathrm{arc}(\tan = x)$; $\quad \mathfrak{d}_x^{-1}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = \mathrm{arc}(\cot = x)$.

209. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \mathrm{arc}(\sin = x)$; $\quad \mathfrak{d}_x^{-1} - \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \mathrm{arc}(\cos = x)$.

210. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}} = \mathrm{arc}(\sec = x)$;

$\mathfrak{d}_x^{-1}\left(-\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}\right) = \mathrm{arc}(\mathrm{cosec} = x)$.

211. $\mathfrak{d}_x^{-1}(f\circ y)\mathfrak{d}_x y \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1} f\circ y$; $\quad \mathfrak{d}_x^{-1} f\circ y \overset{*}{=} \left(\mathfrak{d}_y^{-1} f\circ y\right)\mathfrak{d}_y x$ * wo y Folge von x.

212. $\mathfrak{d}_x^{-1} U \mathfrak{d}_x V \overset{*}{=} UV - \mathfrak{d}_x^{-1} V \mathfrak{d}_x U$;

$\mathfrak{d}_x^{-1} UW \overset{*}{=} U \mathfrak{d}_x^{-1} W - \mathfrak{d}_x^{-1}\left(\mathfrak{d}_x^{-1} W\right)\mathfrak{d}_x U$

* wo U und V Folgen von x und $W = \mathfrak{d}_x V$ gefetzt.

213. $\mathfrak{d}_x^{-1} U \mathfrak{d}_x V = U \mathfrak{d}_x^{-1} \mathfrak{d}_x V - \mathfrak{d}_x^{-1}\left(\mathfrak{d}_x^{-1}\mathfrak{d}_x V\right)\mathfrak{d}_x U$.

214. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-1}(x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+1}}{c+1}$.

215. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-m}(x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+m}}{(c+1)(c+2)\cdots(c+m)}$.

216. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-m}[S a_a (x+iy)^a] = \mathfrak{S}(x+iy)^{a+m} a_a \frac{a!}{(a+m)!}$.

217. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-1}(x+iy)^{-n} \overset{*}{=} -\frac{(x+iy)^{-(n-1)}}{n-1}$ * wo $n > 1$.

218. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-1}\frac{1}{x+iy} = l_e(x+iy)$.

219. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-m}(x+iy)^{-(m+1)} = (-1)^m \frac{1}{m!\,(x+iy)}$.

220. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-1}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n(x+iy)^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}$;

$\mathfrak{d}_{x+iy}^{-a}(x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^a(x+iy)^{\frac{1}{n}+a}}{(n+1)(2n+1)\cdots(an+1)}$.

221. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-1}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}(x+iy)^{1-\frac{1}{n}}$;

$\mathfrak{d}_{x+iy}^{-a}(x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n^a(x+iy)^{a-\frac{1}{n}}}{(n-1)(2n-1)\cdots(an-1)}$.

222. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-1} e^{x+iy} = e^{x+iy}$; $\quad \mathfrak{d}_{x+iy}^{-a} e^{x+iy} = e^{x+iy}$.

223. $\mathfrak{d}_{x+iy}^{-m} a^{x+iy} = \frac{a^{x+iy}}{(l_e a)^m}$; $\quad \mathfrak{d}_{x+iy}^{-m} e^{a(x+iy)} = \frac{e^{a(x+iy)}}{a^m}$.

224. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\sin(x+iy) = -\cos(x+iy);\quad \mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\cos(x+iy) = \sin(x+iy).$

225. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-m}\sin(x+iy) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x + iy\right);$

$\mathfrak{S}_{x+iy}^{-m}\cos(x+iy) = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x + iy\right).$

226. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\frac{1}{(\cos(x+iy))^2} = \tan(x+iy);\quad \mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\frac{1}{(\sin(x+iy))^2} = -\cot(x+iy).$

227. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\frac{\sin(x+iy)}{(\cos(x+iy))^2} = \mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}(\tan(x+iy))\sec(x+iy) = \sec(x+iy).$

228. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\frac{1}{[1-(x+iy)^2]^{1/2}} \cong \mathrm{Aarc}(\sin = x+iy) \cong -\mathrm{Aarc}(\cos = x+iy).$

229. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\frac{1}{1+(x+iy)^2} \cong \mathrm{Aarc}(\tan = x+iy) \cong -\mathrm{Aarc}(\cot = x+iy).$

230. $\mathfrak{S}_{x+iy}^{-1}\frac{1}{(x+iy)[1+(x+iy)^2]^{1/2}} \cong \mathrm{Aarc}(\sec = x+iy) \cong -$
$\mathrm{Aarc}(\mathrm{cosec} = x+iy).$

231. Alle Grundformeln für Integre gelten auch für Richtgrößen.

232. $\mathfrak{S}_{x}^{-1}(a+bx)^n = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b};\quad \mathfrak{S}_{x}^{-m}(a+bx)^n = \frac{n!\,(a+bx)^{n+m}}{(n+m)!\,b^m}.$

233. $\mathfrak{S}_{x}^{-1}\frac{1}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}};$

$\mathfrak{S}_{x}^{-m}\frac{1}{(a+bx)^n} = \frac{(-1)^m\cdot m!}{b^m(n-m)!\,(a+bx)^{n-m}}.$

234. $\mathfrak{S}_{x}^{-1}\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b}l_e(a+bx).$

235. $\mathfrak{S}_{x}^{-1}(a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+1}}{b\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)};$

$\mathfrak{S}_{x}^{-p}(a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+p}}{b^p\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m}{n}+2\right)\cdots\cdots\left(\frac{m}{n}+p\right)}.$

236. $\mathfrak{S}_{x}^{-1}(a+bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{1-\frac{m}{n}}}{b\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right)};$

$\mathfrak{S}_{x}^{-p}(a+bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{p-\frac{m}{n}}}{b^p\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(2-\frac{m}{n}\right)\cdots\cdots\left(p-\frac{m}{n}\right)}.$

237. $\mathfrak{S}_{x}^{-1}l_e x = x l_e x - x.$

238. $\mathfrak{d}_x^{-m} l_e x = \frac{x^m}{m!}\left[l_e x - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right].$

239. $\mathfrak{d}_x\, l_e(a+bx) = \frac{(a+bx)^m}{b^m \cdot m!}\left[l_e(a+bx) - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right].$

240. $\mathfrak{d}_x^{-(m+n)} \frac{1}{(a+bx)^n} =$

$$(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!\,(a+bx)^m}{m!\,b^{m+n}}\left[l_e(a+bx) - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right].$$

241. $\mathfrak{d}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^m)^{\mu} = \frac{(a+bx^m)^{\mu+1}}{b(\mu+1)}.$

242. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{x}{(a+bx^2)^{1/2}} = \frac{(a+bx^2)^{1/2}}{b};\quad \mathfrak{d}_x^{-1} \frac{x}{(a+bx^2)^{3/2}} = -\frac{1}{b(a+bx^2)^{1/2}}.$

243. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{(a+bx^2)^{3/2}} = \frac{x}{a(a+bx^2)^{1/2}}.$

244. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{x^{n-1}}{a+bx^n} = \frac{1}{n\cdot b} l_e(a+bx^n).$

245. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} l_e \frac{a+bx}{a-bx};\quad \mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{a-bx^2} = \frac{1}{2(ab)^{1/2}} l_e \frac{a^{1/2}+xb^{1/2}}{a^{1/2}-xb^{1/2}}.$

246. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{(a^2+b^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} l_e\left(bx+(a^2+b^2x^2)^{1/2}\right);$

$\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{(a+bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} l_e\left[xb^{1/2}+(a+bx^2)^{1/2}\right].$

247. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{bx}{a}\right);$

$\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{a+bx^2} = \frac{1}{(ab)^{1/2}}\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$

248. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{(a^2-b^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{bx}{a}\right);$

$\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{(a-bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$

249. $\mathfrak{d}_x^{-1} \cos(a+bx) = \frac{1}{b}\sin(a+bx);\quad \mathfrak{d}_x^{-1} \cos bx = \frac{1}{b}\sin bx.$

250. $\mathfrak{d}_x^{-1} \sin(a+bx) = -\frac{1}{b}\cos(a+bx);\quad \mathfrak{d}_x^{-1} \sin(bx = -\frac{1}{b}\cos bx.$

251. $\mathfrak{d}_x^{-1} \cot(a+bx) = \frac{1}{b} l_e \sin(a+bx);\quad \mathfrak{d}_x^{-1} \cot x = l_e \sin x.$

252. $\mathfrak{d}_x^{-1} \tan(a+bx) = -\frac{1}{b} l_e \cos(a+bx);\quad \mathfrak{d}_x^{-1} \tan x = -l_e \cos x.$

253. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2+b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{b\cdot\tan x}{a}\right).$

254. $\mathfrak{d}_x^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2-b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{2ab} l_e \frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}.$

255. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,\text{arc}(\sin = ax) = x\cdot\text{arc}(\sin = ax) + \frac{(1-a^2x^2)^{1/2}}{a}$.

256. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,\text{arc}(\tan = ax) = x\cdot\text{arc}(\tan = ax) - \frac{1}{2a}l_e(1+a^2x^2)$.

257. $\mathfrak{d}_x^{-1}(S a_a x^a) \overset{*}{=} \mathfrak{S}\frac{a_a}{a+1}x^{a+1}$; $\quad \mathfrak{d}_x^{-m}(S a_a x^a) \overset{*}{=} \mathfrak{S}\frac{a!\cdot x^{m+a}}{(m+a)!}$.

* wo a_a endlich und $x^2 < 1$.

258. $\mathfrak{d}_x^{-1}(S a_a x^a \varphi x) \overset{*}{=} S a_a \mathfrak{d}_x^{-1} x^a \varphi x$; $\quad \mathfrak{d}_x^{-m}(S a_a x^a \varphi x) \overset{*}{=} S a_a \mathfrak{d}_x^{-m} x^a \varphi x$.

* wo a_a endlich, $x^2 < 1$ und $\left(\mathfrak{d}_x^{-m} x^a \varphi x\right)^2 < 1$ ist.

259. Bruch ganzer Höhenreihen, echter, unechter.

$$\text{Form } \frac{A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a}.$$

260. Jeder unechte Bruch lässt fich in eine ganze Höhenreihe und einen echten Bruch zerlegen.

261. $$\frac{Fox}{fox} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a} \overset{*}{=} \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \cdots + \frac{B_{b-1}}{x-b}$$
$$+ \frac{C_0}{(x-c)^c} + \frac{C_1}{(x-c)^{c-1}} + \cdots + \frac{C_{c-1}}{x-c}$$
$$+ \cdots$$
$$+ \frac{L_0}{(x-l)^l} + \frac{L_1}{(x-l)^{l-1}} + \cdots + \frac{L_{l-1}}{x-l}.$$

* wo $fox = (x-b)^b(x-c)^c\cdots(x-l)^l$ und B_0 bis L_{l-1} Konstante.

262. $$\frac{Fox}{fox} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a} \overset{*}{=} \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{L}{x-l} \text{ und } \frac{Fox_b}{f_0 x_b} = B$$

* wo $fox = (x-b)(x-c)\cdots(x-l)$.

263. Wenn in $\frac{Fox}{fox}$ das $b = p + iq$, $c = -iq$, fo ist $\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px+Q}{(x-p)^2+q^2}$.

264. $$\frac{Fox}{fox} = \frac{\underset{0,m}{S} A_a x^a}{\underset{0,n}{S} a_a x^a} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \cdots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \frac{F_{0b}x}{\varphi x} \text{ und}$$

$$B_0 = x_b B_1 = \mathfrak{d}_x x_b \qquad a!\,B_a = \mathfrak{d}_x^a x_b \qquad \text{und } \mathfrak{d}_x^a x_b = \mathfrak{S}\frac{m!}{(m-a)!}.$$

265. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{Ax^m}{(a+bx)^n} = \mathfrak{S}\frac{(-1)^a A\cdot m^{a|a}\cdot a^a}{(m-n-a+1)\cdot b^{m+1}}(a+bx)^{m-n-a+1}.$$

266. $$\mathfrak{d}_x^{-p}\frac{Ax^m}{(a+bx)^n} = \mathfrak{S}\frac{(-1)^a A\cdot a^a\cdot m^{a|a}(m-n-a)!}{b^{m+p}(m+p-n-a)!}(a+bx)^{m+p-n-a}.$$

267. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{B}{x-b} \overset{*}{=} Bl_e(x-b)$ $\quad$ * wo $x > b$.

268. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{F_e x}{f_e x} \overset{*}{=} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{\underset{0,m}{S}A_a x^a}{\underset{0,n}{S}a_a x^a} \overset{*}{=} B l_e(x-b) + C l_e(x-c) + \cdots + L l_e(x-l)$$

* wo $f_e x = (x-b)(x-c)\cdots(x-l)$ und $x > b,\ x > c,\ \cdots x > l$ ist.

269. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-(r+1)}\frac{B}{x-b} \overset{*}{=} \frac{B(x-b)^r}{r!}\left[l_e(x-b) + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}\right)\right]$$

* wo $x > b,\ r > 0$ ist.

270. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-(r+1)}\frac{F_a x}{f_a x} = \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-(r+1)}\frac{\underset{0,m}{S}A_a x^a}{\underset{0,n}{S}a_a x^a} \overset{*}{=} \frac{B(x-b)^r}{r!}l_e(x-b)$$

$$+\frac{C(x-c)^r}{r!}l_e(x-c) + \cdots + \frac{L(x-l)^r}{r!}l_e(x-l)$$

$$+\left[B(x-b)^r + C(x-c)^r + \cdots + L(x-l)^r\right]\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right)\Big]$$

* wo $f_a x = (x-b)(x-c)\cdots(x-l)$ und $x > b,\ x > c, \cdots x > l,\ r > 0$.

271. Wenn $n > 1$, $x > b$ und $r > 0$ ist, fo ist

für $r < n$ $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{B}{(x-b)^n} = \frac{(-1)^r\, r!\, B}{(n-r)!\,(x-b)^{n-r}}$$

für $r = n$ $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{B}{(x-b)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, B\, le(x-b)$$

für $r > n$ $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{B}{(x-b)^n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,B}{(r-n)!}(x-b)^{r-n}\left[le(x-b) - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right].$$

272. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-n}\frac{F_e x}{f_e x} = \frac{\underset{0,m}{S}A_a x^a}{\underset{0,n}{S}a_a x^a} \overset{*}{=} \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{B_0}{(x-b)^{\mathfrak{b}}} + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{B_1}{(x-b)^{\mathfrak{b}-1}} + \cdots + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{B_{\mathfrak{b}-1}}{x-\mathfrak{b}}$$

$$+\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{C_0}{(x-c)^{\mathfrak{c}}} + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{C_1}{(x-c)^{\mathfrak{c}-1}} + \cdots + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{C_{\mathfrak{c}-1}}{x-c} + \cdots$$

$$+\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{L_0}{(x-l)^{\mathfrak{l}}} + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{L_1}{(x-l)^{\mathfrak{l}-1}} + \cdots + \underset{x}{\mathfrak{d}}^{-r}\frac{L_{\mathfrak{l}-1}}{x-l}.$$

* wo $f_e x = (x-b)^{\mathfrak{b}}(x-c)^{\mathfrak{c}}\cdots(x-l)^{\mathfrak{l}}$ und $x > b,\ x > c \cdots x > l$, $r > 0$ und $B_0, B_1, \cdots L_{\mathfrak{l}-1}$ nach 264 bestimmt find.

273. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2} \overset{*}{=} \frac{2}{(4ac-b^2)^{1/2}}\,\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{b+2cx}{(4ac-b^2)^{1/2}}\right)$$ * wo $4ac - b^2 > 0$

$$\overset{*}{=} -\frac{2}{b+2cx}$$ * wo $4ac - b^2 = 0$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\, l_e\frac{(b^2-4ac)^{1/2}+b+2cx}{(b^2-4ac)^{1/2}-b-2cx}$$ * wo $4ac - b^2 < 0$ und $(b^2-4ac)^{1/2} > b + 2cx$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\, l_e\frac{b+2cx+(b^2-4ac)^{1/2}}{b+2cx-(b^2-4ac)^{1/2}}$$ * wo $4ac - b^2 < 0$ und $(b^2-4ac)^{1/2} < b + 2cx$.

274. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c}l_e(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c}\cdot\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

275. $$\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} = \frac{B}{2c}l_e(a+bx+cx^2) + \frac{2Ac-Bb}{2c}\underset{x}{\mathfrak{d}}^{-1}\frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

Für 276 bis 290 setzen wir $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$.

276. $$\mathfrak{S}^{-1}_x \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a+1}} = \frac{b+2cx}{a(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)^a} + \frac{(2a-1)2c}{a(4ac-b^2)} \mathfrak{S}^{-1}_x \frac{1}{(a+bx+cx^2)^a}$$
$$\mathfrak{S}^{-1}_x \frac{1}{T^{a+1}} = \frac{\alpha}{a\lambda T^a} + \frac{(2a-1)2c}{a\lambda}\mathfrak{S}^{-1}_x \frac{1}{T^a}.$$

277. $$\mathfrak{S}^{-1}_x \frac{1}{T^{n+1}} \overset{*}{=} \underset{0,n-1}{S} \frac{(2n+1-2c)!\,2^c C^c \alpha}{n(n-1)\cdots(n-c)\,\lambda^{c+1}\,T^{n-c}} + \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1\cdot2^n c^n}{n!\,\lambda^n}\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{T}$$

* wo $(2n+1-2c)! = (2n+1-2)(2n+1-4)\cdots(2n+1-2c)$ und für $c = 0$ das $(2n+1-2c)! = 1$.

278. $$\mathfrak{S}^{-1}_x \frac{x^m}{T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n-m+1)c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^n} - \frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c}\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{x^{m-1}}{T^{n+1}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c}\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}.$$

279. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{x\cdot T^{n+1}} \overset{*}{=} \mathfrak{S}^{-1}_y \frac{y^{2n+1}}{(c+by+ay^2)^{n+1}}$$ * wo $y = \frac{1}{x}$ oder $x = \frac{1}{y}$ ist.

280. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{x^m T^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)a\cdot x^{m-1}T^n} - \frac{(n+m-1)b}{(m-1)a}\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{x^{m-1}T^{n+1}} - \frac{(2n+m-1)c}{(m-1)a}\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{x^{m-2}T^{n+1}}.$$

281. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{(a+bx)^n}{(a+bx)^{1/2}} = \mathfrak{S}^{-1}_x(a+bx)^{n-1/2} = \frac{2(a+bx)^{n+1/2}}{(2n+1)b}.$$

282. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{x^m(a+bx)^n}{(a+bx)^{1/2}} = \mathfrak{S}^{-1}_x x^m(a+bx)^{n-1/2}$$
$$= \frac{2x^m(a+bx)^{n+1/2}}{(2m+2n+1)b} - \frac{2ma}{(2m+2n+1)b}\mathfrak{S}^{-1}_x x^{m-1}(a+bx)^{n-1/2}.$$

283. $$\mathfrak{S}^{-1}_x(A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m)(a+bx)^{n-1/2} = \underset{0,m}{S} A_a \mathfrak{S}^{-1}_x x^a(a+bx)^{n-1/2}.$$

284. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}} \overset{*}{=} \frac{1}{c^{1/2}}\, l_e\left[\frac{1}{2}b + cx + c^{1/2}(a+bx+cx^2)^{1/2}\right]$$ * wo $c > 0$ ist.
$$\overset{*}{=} \frac{1}{(-c)^{1/2}} \operatorname{arc}\left[\sin = \frac{-2cx-b}{(b^2-4ac)^{1/2}}\right]$$ * wo $c < 0$ ist.

285. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{T^{a+1/2}} = \frac{2\alpha}{(2a-1)\lambda}\,\frac{1}{T^{a-1/2}} + \frac{(a-1)8c}{(2a-1)\lambda}\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{T^{a-1/2}}.$$

286. $$\mathfrak{S}^{-1}_x\frac{1}{T^{n+1/2}} \overset{*}{=}$$
$$\frac{2\alpha}{(2n-1)\lambda}\,\frac{1}{T^{n-1/2}} + \underset{1,n-1}{S}\frac{2\alpha(n-1)(n-2)\cdots(n-c)(8c)^c}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-(2c+1))\lambda^{c+1}}\,\frac{1}{T^{n-\frac{2c+1}{2}}}$$

287. $$\mathfrak{S}^{-1}_x T^{n+1/2} \overset{*}{=} \frac{2\alpha}{(n+1)8c}T^{n+1/2} + \frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c}\mathfrak{S}^{-1}_x T^{n-1/2}.$$

288. $\mathfrak{S}_x^{-1} T^{n+\frac12} \overset{*}{=} \frac{2\alpha T^{n+\frac12}}{(n+1)8c} + \underset{1,n}{S}\frac{2\alpha(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+3-2c)\lambda^c T^{n+\frac12-c}}{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-c)(8c)^{c+1}}$
$+ \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+1-2c)\lambda^{c+1}}{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-c)(8c)^{c+1}} \mathfrak{S}_x^{-1}\frac{1}{T^{\frac12}}.$

289. $\mathfrak{S}_x^{-1}\frac{x^m}{T^{n+\frac12}} \overset{*}{=}$
$-\frac{1}{(2n-m)c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^{n-\frac12}} - \frac{(2n+1-2m)b}{(2n-m)2c}\mathfrak{S}_x^{-1}\frac{x^{m-1}}{T^{n+\frac12}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m)c}\mathfrak{S}_x^{-1}\frac{x^{m-2}}{T^{n+\frac12}}.$

290. $\mathfrak{S}_x^{-1}\frac{1}{x^m\cdot T^{n+\frac12}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}T^{n-\frac12}} - \frac{(2n+2m-3)b}{(m-1)2a}\mathfrak{S}_x^{-1}\frac{1}{x^{m-1}T^{n+\frac12}}$
$- \frac{(2n-m-2)c}{(m-1)a}\mathfrak{S}_x^{-1}\frac{1}{x^{m-2}T^{n+\frac12}}.$

291. Die Brüche mit Tiefen verwandelt man in Brüche mit Höhen durch neue Veränderliche.

292. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac pq}$, wenn $\frac mn$ ganze Zahl; setze $a+bx^n = z^q$, dann ist
$\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac pq} = \frac{q}{2b^{\frac mn}}\mathfrak{S}_z^{-1}(z^q-a)^{\frac mn-1} z^{p+q-1}.$

293. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac pq}$, wenn $\frac mn+\frac pq$ eine ganze Zahl; setze $a+bx^n = z^q$,
dann ist $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac pq} = -\frac{q\cdot a^{\frac mn+\frac pq}}{n}\cdot\frac{z^{p+q-1}}{(z^q-b)^{\frac mn+\frac pq+1}}.$

294. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^s - \frac{bns}{m}\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}.$

295. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{bn(s+1)}$
$- \frac{bn(s+1)}{m-n}\mathfrak{S}_x^{-1}x^{m-n-1}(a+bx^n)^{s+1}.$

296. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{am} - \frac{b(m+ns+n)}{am}\mathfrak{S}_x^{-1}x^{m+n-1}(a+bx^n)^s.$

297. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{b(m+ns)} - \frac{a(m-n)}{b(m+ns)}\mathfrak{S}_x^{-1}x^{m-n-1}(a+bx^n)^s.$

298. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m\cdot(a+bx^n)^s}{m+ns} + \frac{ans}{m+ns}\mathfrak{S}_x^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1}.$

299. $\mathfrak{S}_x^{-1} x^{m-1}(a+bx^n)^s = -\frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{an(s+1)} + \frac{m+n+ns}{an(s+1)}\mathfrak{S}_x^{-1}x^{m-1}(a+bx^n)^{s+1}.$

300. $\mathfrak{S}_x^{-1} f_0 e^{ax} \overset{*}{=} \frac1a \mathfrak{S}_y^{-1}\frac1y f_0 y$ * wo $y = e^{ax}$.

301. $\mathfrak{S}_x^{-1}x^m e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac ma \mathfrak{S}_x^{-1}x^{m-1}e^{ax}.$

302. $\mathfrak{S}_x^{-1}x^m e^{ax} \overset{*}{=} e^{ax}\left[\frac{x^m}{a} - \frac{m}{a^2}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^3}x^{m-2} - \cdots + (-1)^m\frac{m!}{a^{m+1}}\right]$
$\overset{*}{=} e^{ax}\left[S\frac{(-1)^\alpha m(m-1)\cdots(m-\alpha+1)}{a^{\alpha+1}}x^{m-\alpha}\right]$ * m ganze Pluszahl.

303. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x^m}e^{ax} = -\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x^{m-1}}e^{ax}.$

304. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{e^{ax}}{x} = l_e x + \underset{1,}{S}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(ax)^\alpha}{\alpha\,!} = l_e x + \frac{1}{1}\frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\frac{(ax)^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\frac{(ax)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$

305. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x^m}e^{ax} = -e^{ax}\left[\underset{1,m-1}{S}\frac{a^{\alpha-1}}{(m-1)(m-2)\cdots(m-\alpha)x^{m-\alpha}}\right] + \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{e^{ax}}{x}.$

306. $\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax} f_0 x = \frac{1}{a}e^{ax} f_0 x - \frac{1}{a}\mathfrak{d}_x^{-1} e_{ax}\,\mathfrak{d}_x f_0 x.$

307. $\mathfrak{d}_x^{-1} f_0 l_e x \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1} e^y f_0 y$ $\qquad$ * wo $l_e x = y$.

308. $\mathfrak{d}_x^{-1}(l_e x)^m \overset{*}{=} x\left[S(-1)^\alpha m(m-1)\cdots\big(n-(\alpha-1)\big)(l_e x)^{m-\alpha}\right]$

* m ganze Pluszahl.

309. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{l_e x} = l_e(l_e x) + \frac{1}{1}\frac{l_e x}{1} + \frac{1}{2}\frac{(l_e x)^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\frac{(l_e x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = l_e(l_e x) + \underset{1,}{S}\frac{1}{\alpha}\frac{(l_e x)^\alpha}{\alpha\,!}.$

310. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{(l_e x)^m} = -x\left[\underset{1,m-1}{S}\frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-\alpha)(l_e x)^{m-\alpha}}\right] + \frac{1}{(m-1)!}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{l_e x}.$

311. $\mathfrak{d}_x^{-1} x^\mu f_0(l_e x) \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1} e^{(\mu+1)y} f_0 y$ $\qquad$ * wo $l_e x = y$ ist.

312. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x}(l_e x)^m \overset{*}{=} \frac{(l_e x)^{m+1}}{m+1}$ $\qquad$ * wo $m \gtrless -1$ ist.

313. $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x\, l_e x} = l_e(l_e x).$

314. $\mathfrak{d}_x^{-1} x^\mu (l_e x)^m = x^{\mu+1}\left[\frac{(l_e x)^m}{\mu+1} - \frac{m(l_e x)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1(l_e x)^{m-2}}{(\mu+1)^3} + \frac{(-1)^m\cdot m!}{(\mu+1)^{m+1}}\right]$

$$= x^{\mu+1}\left[\underset{0,m}{S}\frac{m(m-1)\cdots\big(m-(\alpha-1)\big)(l_e x)^{m-\alpha}}{(\mu+1)^{\alpha+1}}\right].$$

315. $\mathfrak{d}_x^{-1} f_0 \sin x \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1}\frac{f_0 y}{(1-y^2)^{1/2}}$ $\qquad$ * wo $\sin x = y$.

316. $\mathfrak{d}_x^{-1}\sec x = l_e \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)\right).$

317. $\mathfrak{d}_x^{-1}\operatorname{cosec} x = l_e \tan\frac{1}{2}x.$

318. $\mathfrak{d}_x^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^q = \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\mathfrak{d}_x^{-1}(\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q-2}.$ (1)

$$= -\frac{(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\mathfrak{d}_x^{-1}(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q+2}. \quad (2)$$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q+1}}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\mathfrak{d}_x^{-1}(\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q}. \quad (3)$$

$$= -\frac{(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q+1}}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\mathfrak{d}_x^{-1}(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q}. \quad (4)$$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^{q-2}. \quad (5)$$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^{q+2}. \quad (6)$$

319. $$\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x)^p(\cos x)^q \overset{*}{=} -\frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q}\Big[\sin x^{p-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(p-1)}{S}\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+q-2a)}\Big]$$ * p ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{-(\cos x)^{q+1}}{p+q}\Big[\sin x^{p-1} + \underset{0,\frac{1}{2}p-1}{S}\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{p+q-2)(p+q-4)\cdots p+q-2a)} + \frac{(p-1)\cdots5\cdot3\cdot1\,\mathfrak{S}_x^{-1}(\cos x)^q}{(p+q-2)\cdots(q+2)}\Big]$$ * wo p gerade.

320. $$\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x^p\cdot(\cos x)^q \overset{*}{=} \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q}\Big[(\cos x)^{q-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(q-1)}{S}\frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(p+q-2)(p+q-4)\cdots(p+q-2a)}\Big]$$ * q ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q}\Big[(\cos x^{q-1} + \underset{0,\frac{1}{2}q-1}{S}\frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(p+q-2)\cdots(p+q-2a)} + \frac{(q-1)\cdots5\cdot3\cdot1\,\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x)^p}{(p+q-2)\cdots(p+2)}.$$ * wo q gerade.

321. $$\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x)^p \overset{*}{=} -\frac{\cos x}{p}\Big[(\sin x)^{p-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(p-1)}{S}\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p-2)(p-4)\cdots(p-2a)}\Big]$$ * p ungerade.

$$\overset{*}{=} -\frac{\cos x}{p}\Big[(\sin x)^{p-1} + \underset{0,\frac{1}{2}p-1}{S}\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p-2)(p-4)\cdots(p-2a)} + \frac{(p-1)\cdots5\cdot3\cdot1\cdot x}{(p-2)(p-4)\cdots4\cdot2}\Big]$$ * p gerade.

322. $$\mathfrak{S}_x^{-1}(\cos x)^q \overset{*}{=} \frac{\sin x}{q}\Big[(\cos x)^{q-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(q-1)}{S}\frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(q-2)(q-4)\cdots(q-2a)}\Big]$$
* q ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{\sin x}{q}\Big[(\cos x)^{q-1} + \underset{0,\frac{1}{2}(q-1)}{S}\frac{(q-1)(q-3)\cdots(q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(q-2)(q-4)\cdots(q-2a)} + \frac{(q-1)\cdots5\cdot3\cdot1\cdot x}{(q-2)\cdots6\cdot4\cdot2}\Big]$$ * q gerade.

323. $$\mathfrak{S}_x^{-1}(\sin x)^p \overset{*}{=} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}}{2^{p-1}}\Big[\underset{0,\frac{1}{2}(p-1)}{S}(-1)^a\frac{p^{\cdot a}\cos(p-2a)x}{p-2a}\Big]$$ * wo p ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}p}}{2^{p-1}}\Big[\underset{0,\frac{1}{2}p-1}{S}(-1)^a p^{\cdot a}\frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} + (-1)^{\frac{1}{2}p}p^{\cdot\frac{1}{2}p}\cdot\frac{x}{2}\Big]$$
* wo p gerade.

324. $$\mathfrak{S}_x^{-1}(\cos x)^p \overset{*}{=} \frac{1}{2^{p-1}}\Big[\underset{0,\frac{1}{2}(p-1)}{S}p^{\cdot a}\frac{\sin(p-2a)x}{p-2a}\Big]$$ * wo p ungerade.

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2^{p-1}}\Big[\underset{0,\frac{1}{2}p-1}{S}p^{\cdot a}\frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} + p^{\cdot\frac{1}{2}p}\frac{x}{2}\Big]$$ * wo p gerade.

325. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1}(\tan x)^p \overset{*}{=} \underset{0,{}^1/_2(p-3)}{S}(-1)^a \frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{{}^1/_2(p+1)} l_e \cos x$

* wo p ungerade.

$\overset{*}{=} \underset{0,{}^1/_2 p-1}{S}(-1)^a \frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{{}^1/_2 p} x$

* wo p gerade.

326. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} f \circ \cos x \overset{*}{=} -\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{f \circ y}{(1-y^2)^{1/2}}$ * wo $\cos x = y$.

327. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} f \circ \tan x \overset{*}{=} \underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{f \circ y}{1+y^2}$ * wo $\tan x = y$.

328. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc}(\tan = \frac{b}{a} \tan x)$.

329. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{(\cos x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(\cos x)\sin x}{2a^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]}$
$+ \frac{1}{2a^3 b} \operatorname{arc}(\tan = \left(\frac{b \tan x}{a}\right)$.

330. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{(\sin x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = -\frac{(\cos x)\sin x}{2b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]}$
$+ \frac{1}{ab^3} \operatorname{arc}(\tan = \frac{b}{a} \tan x)$.

331. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{1}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(b^2 - a^2)(\cos x)\sin x}{2a^2 b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]}$
$+ \frac{b^2+a^2}{2a^3 b^3} \operatorname{arc}(\tan = \frac{b}{a} \tan x)$.

332. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} F \circ \tan {}^1/_2 x \overset{*}{=} \underset{t}{\mathfrak{a}}^{-1} (F \circ t)_1 \frac{2}{+ t^2}$ * wo $\tan {}^1/_2 x = t$.

333. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c} \overset{*}{=} \frac{2}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \operatorname{arc}(\tan = \frac{b + (c-a)\tan {}^1/_2 x}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}}$

* $a^2 + b^2 < c^2$.

$\overset{*}{=} -\frac{2}{b + (c-a)\tan {}^1/_2 x}$ * wo $a^2 + b^2 = c^2$.

$\overset{*}{=} \frac{-1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} l_e \left[\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} + b + (c-a)\tan {}^1/_2 x}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} - (b + (c-a)\tan {}^1/_2 x)}\right]$

* wo $a^2+b^2 > c^2$ u. auch $(a^2+b^2-c^2)^{1/2} > b+(c-a)\tan {}^1/_2 x$.

$\overset{*}{=} \frac{-1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} l_e \left[\frac{b + (c-a)\tan {}^1/_2 x + (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}{b + (c-a)\tan {}^1/_2 x - (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}\right]$

* wo $a^2+b^2 > c^2$ u. auch $(a^2+b^2-c^2)^{1/2} < b+(c-a)\tan {}^1/_2 x$.

334. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{1}{a\cos x+b\sin x+c} \overset{*}{=} \underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} \frac{1}{a(1+\cos x)+b\sin x} = \frac{1}{b} l_e(a+b\tan {}^1/_2 x)$ * wo $a = c$.

335. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} x^n \sin ax = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n x^{n-1} \sin ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} x^{n-2} \sin ax$.

336. $\underset{x}{\mathfrak{a}}^{-1} x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a} \cos ax + S \frac{n(n-1)\cdots(n-2a)}{a^{2a+2}} x^{n-1-2a} \sin ax$
$- S \frac{n(n-1)\cdots(n-2a-1)}{a^{2a+3}} x^{n-2-2a} \cos ax$.

337. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x^n} = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{(n-1)}} - \frac{a\cos ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(n-2)}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x^{n-2}}.$$

338. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x^n} \overset{*}{=} \underset{0,\frac{1}{2}(n-3)}{S}(-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$
$$+\underset{0,\frac{1}{2}(n-5)}{S}(-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha+1}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$
$$+(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{a^{n-2}}{(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x} \quad \text{* wo n ungerade.}$$
$$\overset{*}{=} \underset{0,\frac{1}{2}n-2}{S}(-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$
$$+\underset{0,\frac{1}{2}n-2}{S}(-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha+1}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$
$$+(-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{a^{n-2}}{(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x} \quad \text{* wo n gerade.}$$

339. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x} = \frac{1}{1}\frac{ax}{1} - \frac{1}{3}\frac{(ax)^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{5}\frac{(ax)^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \cdots = S\frac{(-1)^\alpha}{2\alpha+1}\frac{(ax)^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)!}.$$

340. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x} = l_e x - \frac{1}{2}\frac{(ax)^2}{1\cdot2} + \frac{1}{4}\frac{(ax)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \cdots = l_e x + \underset{1,}{S}(-1)^\alpha\frac{1}{2\alpha}\frac{(ax)^{2\alpha}}{(2\alpha)!}.$$

341. $$\mathfrak{d}_x^{-1} x^n\cos ax = \frac{x^n\sin ax}{a} + \frac{nx^{n-1}\cos ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2}\mathfrak{d}_x^{-1} x^{n-2}\cos ax.$$

342. $$\mathfrak{d}_x^{-1} x^n\cos ax = \frac{x^n}{a}\sin ax + S(-1)^\alpha\frac{n(n-1)\cdots(n-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}\cdot\cos ax}{a^{2\alpha+2}}$$
$$+S(-1)^\alpha\frac{n(n-1)\cdots(n-2\alpha-1)x^{n-2-2\alpha}}{a^{2\alpha+3}}\cdot\sin ax.$$

343. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x^n} = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a\sin ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(n-2)}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x^{n-2}}.$$

344. $$\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x^n} \overset{*}{=} \underset{0,\frac{1}{2}(n-3)}{S}(-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$
$$+\underset{0,\frac{1}{2}(n-5)}{S}(-1)^{\alpha}\frac{a^{2\alpha+1}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$
$$+(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\sin ax}{x}$$
* wo n ungerade.
$$\overset{*}{=} \underset{0,\frac{1}{2}n-2}{S}(-1)^{\alpha+1}\frac{a^{2\alpha}\cos ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-2\alpha)x^{n-1-2\alpha}}$$
$$+\underset{0,\frac{1}{2}n-2}{S}(-1)^{\alpha}\frac{a^{2\alpha+1}\sin ax}{(n-1)(n-2)\cdots(n-2-2\alpha)x^{n-2-2\alpha}}$$
$$+(-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{a^{n-2}}{(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{\cos ax}{x} \quad \text{* wo n gerade.}$$

345. $$\mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\sin bx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2};\quad \mathfrak{d}_x^{-1} e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

346. $$\mathfrak{d}_x^{-1} x^n e^{ax}\sin bx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[x^n e^{ax}(a\sin bx - b\cdot\cos bx) - na\,\mathfrak{d}_x^{-1} x^{n-1}e^{ax}\sin bx$$
$$+ nb\,\mathfrak{d}_x^{-1} x^{n-1}e^{ax}\cos bx\Big].$$

347. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, x^n e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[x^n e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) - na\,\mathfrak{d}_x^{-1}\, x^{n-1} e^{ax}\cos bx$
$- nb\,\mathfrak{d}_x^{-1}\, x^{n-1} e^{ax}\sin bx\Big].$

348. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, x e^{ax}\sin bx = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\Big[\big(a(a^2+b^2)x - (a^2-b^2)\big)\sin bx$
$- \big(b(a^2+b^2)x - 2ab\big)\cos bx\Big].$

$\mathfrak{d}_x^{-1}\, x e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\Big[\big(a(a^2+b^2)x - (a^2-b^2)\big)\cos bx$
$+ \big(b(a^2+b^2)x - 2ab\big)\sin bx\Big].$

349. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0\mathrm{arc}(\sin = x) \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1}\,(f_0 y)\cos y$ * wo arc (sin = x) = y.

350. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0\mathrm{arc}(\cos = x) \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1}\,(f_0 y)\sin y$ * wo arc (cos = x) = y.

351. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0\mathrm{arc}(\tan = x) \overset{*}{=} \mathfrak{d}_y^{-1}\,(f_0 y)(\sec y)^2$ * wo arc (tan = x) = y.

352. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0\mathrm{arc}(\cot = x) \overset{*}{=} - \mathfrak{d}_y^{-1}\,(f_0 y)(\mathrm{cosec}\, y)^2$ * wo arc (cot = x) = y.

353. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\,\mathrm{arc}(\sin = x) = \mathrm{arc}(\sin = x)\,\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0 x - \mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$

354. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\,\mathrm{arc}(\cos = x) = \mathrm{arc}(\cos = x)\,\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0 x + \mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$

355. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\,\mathrm{arc}(\tan = x) = \mathrm{arc}(\tan = x)\,\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0 x - \mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\frac{1}{1+x^2}.$

356. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\,\mathrm{arc}(\cot = x) = \mathrm{arc}(\cot = x)\,\mathfrak{d}_x^{-1}\, f_0 x + \mathfrak{d}_x^{-1}\,(f_0 x)\frac{1}{1+x^2}.$

357. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,\mathrm{arc}(\sin = x) = x\cdot\mathrm{arc}(\sin = x) + (1-x^2)^{1/2}.$

358. $\mathfrak{d}_x^{-1}\,\mathrm{arc}\tan = x = x\cdot\mathrm{arc}(\tan = x) - {}^1/_2\, l_e(1+x^2).$

359. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, x^{m-1}\,\mathrm{arc}(\sin = x) = \frac{x^m}{m}\,\mathrm{arc}(\sin = x) - \frac{1}{m}\,\mathfrak{d}_x^{-1}\,\frac{x^m}{(1-x^2)^{1/2}}.$

360. $\mathfrak{d}_x^{-1}\, x^{m-1}\,\mathrm{arc}(\tan = x) = \frac{x^m}{m}\,\mathrm{arc}(\tan = x) - \frac{1}{m}\,\mathfrak{d}_x^{-1}\,\frac{x^m}{1+x^2}.$

Dritter Abschnitt der Folgelehre: Dehnende Folgelehre oder Folgen zweier und mehrer Veränderlichen.

361. **Folge zweier Veränderlichen. Zeichen $f_0(x, y)$.**

362. **Folge mehrer Veränderlichen. Zeichen $f_0(x, y, z, \cdots)$.**

363. **$f_0(x, y, z, \cdots)$ ist stetig, wenn sie für x stetig, für y stetig, u. s. w.**

364. **Steigende Höhenreihe ist echt, wenn $x^2, y^2, \cdots < 1$ und alle Vorzahlen endlich.**

365. Jede stetige Reinfolge $\frac{R}{x-y,\cdots}$ kann, wenn $x^2, y^2, \cdots < 1$, einer steigenden Höhenreihe gleich gesetzt werden, welche echt, wenn alle Vorzahlen endlich.

366. Jede stetige Richtfolge kann, wenn $x^2, y^2, \cdots < 1$, einer Richtgrösse $a + ib$ gleich gesetzt werden, wo a und b echte steigende Höhenreihen sind.

367. $\frac{R}{x,y} = S\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{a}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} = \underset{00}{a} + \underset{10}{a}x + \underset{01}{a}y + \underset{20}{a}x^2 + \underset{11}{a}xy + \cdots$.

368. $\frac{R}{x,y} = 00, 10, 01, 20, 11, 02, 30, 21, 12, 03, 40, 31, 22, 13, 04, \cdots,$
wo das Zeichen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Glied $\underset{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{a}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}}$ bezeichnet.

Die Diffe oder Differentialquotienten.

369. Volldiff: $\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}} f_0 = \underset{x}{\mathfrak{d}} f_0 + \underset{y}{\mathfrak{d}} f_0 + \underset{z}{\mathfrak{d}} f_0 + \cdots$.

370. Der $(m+1)$te Volldiff:
$$\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}}\left(\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}^m} f_0\right) = \underset{x}{\mathfrak{d}}\,\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}^m} f_0 + \underset{y}{\mathfrak{d}}\,\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}^m} f_0 + \underset{z}{\mathfrak{d}}\,\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}^m} f_0 + \cdots$$

371. Teildiff: $\underset{x}{\mathfrak{d}^{\mathfrak{a}}}\underset{y}{\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}}}\underset{z}{\mathfrak{d}^{\mathfrak{c}}}\cdots f_0(x,y,z,\cdots)$

372. $\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n} f_0(x,y) = \underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{x}{\mathfrak{d}^m} f_0(x,y)$.

373. $\underset{x}{\mathfrak{d}}\,\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{x}{\mathfrak{d}^m} f_0(x,y) = \underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{x}{\mathfrak{d}^{m+1}} f_0(x,y)$.

374. Volldiff: $\underset{x,y}{\mathfrak{d}^n} f_0(x,y) = \mathbf{S}\, n^{\cdot\mathfrak{a}} \underset{x}{\mathfrak{d}^{n-\mathfrak{a}}}\underset{y}{\mathfrak{d}^{\mathfrak{a}}} f_0(x,y)$.

375. $\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\underset{u}{\mathfrak{d}^q}\cdots F_0(x,y,z,u,\cdots) = \underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\underset{u}{\mathfrak{d}^q}\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\cdots F_0(x,y,z,u,\cdots)$.

376. $\underset{u}{\mathfrak{d}}\,\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\underset{u}{\mathfrak{d}^q}\cdots F_0(x,y,z,u,\cdots) = \underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\underset{u}{\mathfrak{d}^{q+1}}\cdots F_0(x,y,z,u,\cdots)$.

377. Volldiff: $\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}^n} F_0(x,y,z,\cdots) \overset{*}{=}$
$$\mathbf{S}\frac{n(n-1)\cdots(n-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot2\cdots\mathfrak{b}\cdot1\cdot2\cdots\mathfrak{c}\cdots}\underset{x}{\mathfrak{d}^{n-\mathfrak{a}}}\underset{y}{\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}}}\underset{z}{\mathfrak{d}^{\mathfrak{c}}}\cdots F_0(x,y,z,\cdots)$$
* wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$.

378. Der mte Eckdiff nach x: $\underset{x}{\mathfrak{d}^m} f_0(x,y,z,\cdots) = \underset{x}{\mathfrak{d}^m}\left(S\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots\right)$.

379. Mitteldiff: $\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\cdots f_0(x,y,z,\cdots)$ oder $\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\cdots\left(S\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots\right)$.

380. $\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\left(S\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots\right) = \mathbf{S}\frac{\mathfrak{a}!}{(\mathfrak{a}-m)!}\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}-m} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots$.

381. $\underset{x}{\mathfrak{d}^m}\underset{y}{\mathfrak{d}^n}\underset{z}{\mathfrak{d}^p}\cdots\left(S\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots\right) = \mathbf{S}\frac{\mathfrak{a}!}{(\mathfrak{a}-m)!}\frac{\mathfrak{b}!}{(\mathfrak{b}-n)!}\frac{\mathfrak{c}!}{(\mathfrak{c}-p)!}\cdots\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}-m} y^{\mathfrak{b}-n} z^{\mathfrak{c}-p}\cdots$

Die Integern und die Integrale.

382. Der getrennte mte Eckdiff nach x: $\underset{x}{{}^1\mathfrak{d}^m}\left(S\underset{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}\cdots\right)$
$$= \underset{x}{\mathfrak{d}^m}\left(S\underset{\mathfrak{a},0,0,\cdots}{a} x^{\mathfrak{a}} y^0 z^0\cdots\right).$$

383. $\overset{1}{\underset{x}{\mathfrak{d}}}{}^{m}(S^{a}_{a,b,c,..}\, x^{a}\, y^{b}\, z^{c}\cdots) = S\frac{a!}{(a-m)!}{}^{a}_{a,0,0}\,.\, x^{a-m}.$

384. $\overset{1}{\underset{x,y,z,\cdots}{\mathfrak{d}}}{}^{-m}(S a_a\, x^{a} + S b_b\, y^{b} + S c_c\, z^{c} + \cdots)$

$$= S\frac{a!}{(a-m)!}\, x^{a+m} + S\frac{b!}{(b-m)!}\, y^{b+m} + S\frac{c!}{(c-m)!}\, z^{c+m} + \cdots.$$

Integral $=$ Integre $+ S^{w}_{a',b',c',..}\, x^{a'}\, y^{b'}\, z^{c'}\cdots$ wo $a' + b' + c' + \cdots < m.$

385. Wenn $\overset{1}{\underset{x}{\mathfrak{d}}}{}^{m} f_0(x,y,z,\cdots) = S a_a\, x^{a},\ \overset{1}{\underset{y}{\mathfrak{d}}}{}^{n} f_0(x,y,z,\cdots) = S b_b y^{b},\ \overset{1}{\underset{z}{\mathfrak{d}}}{}^{p} f_0(x,y,z,\cdots) = S c_c z^{c}\cdots$

fo ist $f_0(x,y,z,\cdots) = S\frac{a!}{(m+a)!}a_a x^{m+a} + S\frac{b!}{(n+b)!}b'_b y^{n+b} + S\frac{c!}{(p+c)!}c_c z^{p+c} + \cdots$

Integral $=$ Integre $+ S^{w}_{a',b',c',..}\, x^{a'}\, y^{b'}\, z^{c'}\cdots$, wo $a' < m,\ b' < n,\ c' < p, \cdots.$

386. Trennbarer mter Eckdiff nach x.

387. $\underset{x}{\mathfrak{d}}{}^{-m}(f_0 x)\varphi_0 y + \underset{y}{\mathfrak{d}}{}^{-n}(F_0 x)\Phi_0 y = 0$ wird getrennt $\underset{x}{\mathfrak{d}}{}^{-m}\frac{f_0 x}{F_0 x} + \underset{y}{\mathfrak{d}}{}^{-n}\frac{\Phi_0 y}{\varphi_0 y} = 0.$

388. Ergänzungsdiffe oder einander ergänzende Diffe: Zeichen $\mathfrak{d}$.

$\underset{x}{\mathfrak{d}}{}^{m} S^{a}_{a_1,b_1,c_1,..}\, x^{a_1}\, y^{b_1}\, z^{c_1},\ \underset{y}{\mathfrak{d}}{}^{n} S^{a}_{a_2,b_2,c_2,..}\, x^{a_2}\, y^{b_2}\, z^{c_2};\ \underset{z}{\mathfrak{d}}{}^{p} S^{a}_{a_3,b_3,c_3,..}\, x^{a_3}\, y^{b_3}\, z^{c_3}, \cdots$

find ergänzend, wenn $a_2, a_3, \cdots < m,\ b_1, b_3, \cdots < n,\ c_1, c_2, c_4 \cdots < p$ find.

389. Wenn $\underset{x}{\mathfrak{d}}{}^{m} f_0(x,y,z,\cdots) = S^{a}_{a_1,b_1,c_1,..}\, x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1}\cdots,\ \underset{y}{\mathfrak{d}}{}^{n} f_0(x,y,z,\cdots) = S^{a}_{a_2,b_2,c_2,..}\, x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2}\cdots$

$\underset{z}{\mathfrak{d}}{}^{p} f_0(x,y,z,\cdots) = S^{a}_{a_3,b_3,c_3,..}\, x^{a_3}\, y^{b_3}\, z^{c_3}\cdots$ u. s. w., wo $a_2, a_3, \cdots < m,$

$b_1, b_3, \cdots < n,\ c_1, c_2, c_4 \cdots < p, \cdots$ fo ist

$f_0(x,y,z,\cdots) = S\frac{a_1!}{(m+a_1)!}{}^{a}_{a_1,b_1,c_1,..}\, x^{m+a_1}\, y^{b_1}\, z^{c_1}\cdots$

$+ S\frac{b_2!}{(n+b_2)!}{}^{a}_{a_2,b_2,c_2,..}\, x^{a_2}\, y^{n+b_2}\, z^{c_2}\cdots + S\frac{c_3!}{(p+c_3)!}{}^{a}_{a_3,b_3,c_3,..}\, x^{a_3}\, y^{b_3}\, z^{p+c_3}\cdots + \cdots$

Integral $=$ Integre $+ S^{c}_{a,b,c}\, x^{a}\, y^{b}\, z^{c}$, wo zugleich $a < m,\ b < n,\ c < p, \cdots$

390. Ergänzbare Eckdiffe.

391. Mitteldiffe: Wenn $\mathfrak{d}^{m}\,\mathfrak{d}^{n}\,\mathfrak{d}^{p}\cdots F_0(x,y,z,\cdots)$ gegeben, fo find im Integral $F_0(x,y,z,\cdots) = S^{a}_{a,b,c}\, x^{a}\, y^{b}\, z^{c}$ alle Beständigen willkürlich, wo entweder $a < m$, oder $b < n$, oder $c < p, \cdots$ ist.

Die Diffgleichungen.

392. Einfache Diffe: Wenn alle Diffe nach derfelben Veränderlichen genommen $\underset{x}{\mathfrak{d}}x,\ \underset{x}{\mathfrak{d}}y,\ \underset{x}{\mathfrak{d}}z, \cdots$ kurz $\mathfrak{d}x,\ \mathfrak{d}y,\ \mathfrak{d}z, \cdots.$

393. Die einfachen Diffe $\mathfrak{d}x,\ \mathfrak{d}y,\ \mathfrak{d}z, \cdots = \underset{u}{\mathfrak{d}}x,\ \underset{u}{\mathfrak{d}}y,\ \underset{u}{\mathfrak{d}}z, \cdots.$

394. $\underset{x}{\mathfrak{d}}y = \mathfrak{d}y : \mathfrak{d}x.$

395. Diffgleichung erster Ordnung:

$$\underset{x}{\mathfrak{d}}x\, f_0(x,y,z,\cdots) + \underset{x}{\mathfrak{d}}y\, f_0(x,y,z,\cdots) + \underset{x}{\mathfrak{d}}z\, f_0(x,y,z,\cdots) + \cdots = 0.$$

396. Form: $\mathfrak{d}x\, f_{01}(x,y,z,\cdots) + \mathfrak{d}y\, f_{02}(x,y,z,\cdots) + \mathfrak{d}z\, f_{03}(x,y,z,\cdots) + \cdots = 0.$

397. $\mathfrak{d}_x^{-1}\left[\mathfrak{d}_x x\, f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_x y\, f_{o2}(x, y, z,) + \mathfrak{d}_x z f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot\right]$
$= \mathfrak{d}_x^{-1} f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_y^{-1} f_{o2}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_z^{-1} f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot)$.

398. **Abhängig** ist x von den Veränderlichen t, u, v, wenn $x = f_o(t, u, v, \cdot\cdot)$ **Unabhängig** ist x von den Veränderlichen t, u, v, · ·, wenn x (nicht als $f_o(t, u, v, \cdot\cdot)$ darstellbar.

399. Wenn y abhängig von x, fo auch x abhängig von y.

a. **Diffgleichungen von einander abhängiger Veränderlicher.**

400. **Gleichstufige (homogene) Folgen**, wo die Summe der Stufen aller Veränderlichen gleich ist.

401. Für $\mathfrak{d}x(Sa_a x^{m-a} y^a) + \mathfrak{d}y(Sb_b x^{m-b} y^b) = 0$ ist, wenn $y = xz$,
Integre $\mathfrak{d}_x^{-1}\frac{1}{x} + \mathfrak{d}_z^{-1}\frac{Sb_b z^b}{Sa_a z^a + Sb_b z^{b+1}} = 0$.

402. **Gleichstufbare Folgen** folche, die fich gleichstufig machen lassen.

403. $\mathfrak{d}x(a + bx + cy) = \mathfrak{d}y(e + fx + gy)$ gleichstufbar $x = t + \alpha$, $y = a + \beta$.

b. **Diffgleichungen von einander unabhängiger Veränderlicher.**

404. Wenn x und u unabhängig von einander, ist $\mathfrak{d}_x^a y$ entweder 0 oder $\frac{1}{0}$.

405. Wenn $\mathfrak{d}_x x\, f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_x y\, f_{o2}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_x z\, f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot) \overset{*}{=} 0$, * alle unabhängig, fo ist $f_{o1}(x,y,z,\cdot\cdot) = 0$, $f_{o2}(x,y,z,\cdot\cdot) = 0$, $f_{o3}(x,y,z,\cdot\cdot) = 0, \cdots$.

406. Wenn $\varphi_o(x, y, z, \cdot\cdot)$
$= \mathfrak{d}_x x\, f_{o1}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_x y\, f_{o2}(x, y, z, \cdot\cdot) + \mathfrak{d}_x z\, f_{o3}(x, y, z, \cdot\cdot) + \cdot\cdot \overset{*}{=} 0$
* wo alle unabhängig, fo ist $f_{o1}(x,y,z,\cdot\cdot) = 0$, $f_{o2}(x,y,z,\cdot\cdot) = 0$,
$f_{o3}(x,y,z,\cdot\cdot) = 0, \cdots$ und ist $\mathfrak{d}_x^{-1}\varphi_o(x,y,z,\cdot\cdot) = \mathfrak{d}_x^{-1} f_{o1}(x,y,z,\cdot\cdot)$,
$\mathfrak{d}_y^{-1}(\varphi_o(x, y, z, \cdot\cdot) = \mathfrak{d}_y^{-1} f_2(x, y, z, \cdot\cdot) \cdots$.

407. Für die Gleichungen Unabhängiger gelten die Gefetze der Ausdehnungslehre, Abschnitt 1.

Vierter Abschnitt der Folgelehre: Erweiternde Folgelehre oder die erweiterten Folgen.

408. Die erweiterten Folgen (Fouriersche-, Bernouillische-, Gamma-, Elliptische Funktionen).

Formelbuch

der

Ausdehnungslehre.

Dritter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

Einleitung in die Ausdehnungslehre.

1. Ausdehnungslehre: $a + e \gtrless b + e$, wenn $a \gtrless b$.
   $e + (-e) = 0$ $ee \gtrless e$.
2. Vielfachenſumme: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \underset{1,n}{S}\alpha_a a_a$.
   $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ die Vorzahlen, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ die Grösen.
3. $a + (b + c) = a + b + c$; $a + b = b + a$; $a(bc) = abc$; $ab \gtreqless ba$.
   $a(b + c) = ab + ac$; $(a + b)c = ac + bc$.
4. Für Zufügen und Abziehen, für Vervielfachen und Teilen mit Zahlen gelten alle Geſetze der Zahlenlehre.
   $\alpha a = a\alpha$, $\frac{1}{\alpha}a = \frac{a}{\alpha} = a\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha a}{\alpha} \overset{*}{=} a$,   * wo $\alpha \gtrless 0$.
5. Einander erſetzende Vereine von Gleichungen.
6. $\frac{\alpha a}{a} \overset{*}{=} \alpha$ * wenn $a \gtrless 0$.
7. $\frac{\alpha c}{\beta c} \overset{*}{=} \frac{\alpha}{\beta}$ * wenn $\beta c \gtrless 0$.
8. Wenn $\alpha a + \beta a + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \cdots$, ſo ist $\alpha + \beta + \cdots = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots$.

Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

9. Hörige Gröse: $a = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n = \underset{1,n}{S}\beta_a b_a$.
   Freie Gröse: $a \gtrless \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n$.
   Deckende oder kongruente Gröse: $a \cong b$, wenn $a \overset{*}{=} \beta b$, wo $\beta b \gtrless 0$.
10. Jede Einheit ist frei, jede Vielfachenſumme ist zu ihren Einheiten hörig.
11. Null ist zu jeder Grösenreihe hörig.
12. $\alpha \underset{1,n}{S}\beta_a b_a = \underset{1,n}{S}\alpha\beta_a b_a$; $\frac{1}{\alpha}\underset{1,n}{S}\beta_a b_a = \underset{1,n}{S}\frac{\beta_a}{\alpha}b_a$.
13. $\underset{1,n}{S}\alpha_a b_a \pm \underset{1,n}{S}\gamma_a b_a = \underset{1,n}{S}(\alpha_a \pm \gamma_a)b_a$.

14. Wenn $\mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a b_a = 0$ und $\alpha_m \gtrless 0$, ſo ist b_m hörig und umgekehrt.
15. Wenn $\mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a b_a = 0$ und b_a frei, ſo ist $\alpha_a = 0$ und umgekehrt.
16. Wenn $\mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a c_a = \mathop{S}\limits_{1,n}\beta_a c_a$, wo c_a frei, ſo ist $\alpha_a = \beta_a$ und umgekehrt.
17. Wenn $\alpha a + \beta b + \cdots \overset{*}{=} \varkappa k + \lambda l + \cdots$
* wo $a = \mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a g_a$, $b = \mathop{S}\limits_{1,n}\beta_a g_a, \cdots k = \mathop{S}\limits_{1,n}\varkappa_a g_a$, $l = \mathop{S}\limits_{1,n}\lambda_a g_a, \cdots$ und g_a frei, ſo ist
$\alpha\alpha_a + \beta\beta_a + \cdots = \varkappa\varkappa_a + \lambda\lambda_a + \cdots$.
18. Wenn die erste Gröse $\gtrless 0$ und jede folgende von den vorhergehenden frei ist, ſo ist die Reihe eine freie Grösenreihe.
19. Wenn zwischen n Grösen eine Hörigkeit besteht, ſo stets eine Reihe freier auszuſondern.
20. Jede Gröse $a = \mathop{S}\limits_{1,n}\beta_a b_a$, wo b_a frei.
21. Gebiet n ter Stufe: Alle Grösen $\mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a a_a$, wo α_a beliebig, a_a frei. Zeichen $o(a_1, \cdots a_n)$.
22. $o(a_1, b_2, \cdots b_n) \overset{*}{=} o(b_1, b_2, \cdots b_n)$ * wenn $a_1 = \mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a b_a$, wo $\alpha_1 \gtrless 0$.
23. Wenn $a_1 = \mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a b_a$, $a_2 = \mathop{S}\limits_{1,n}\beta_a b_a, \cdots a_m = \mathop{S}\limits_{1,n}\mu_a b_a$, und $a_1, a_2, \cdots a_m$ frei, ſo kann man $o(a_1, \cdots a_m, a_{m+1}, \cdots a_n) \cong o(b_1, \cdots b_n)$ machen.
24. Wenn $a_1 = \mathop{S}\limits_{1,n}\alpha_a b_a$, $a_2 = \mathop{S}\limits_{1,n}\beta_a b_a, \cdots a_n = \mathop{S}\limits_{1,n}\nu_a b_a$, und $a_1, a_2, \cdots a_n$ frei, ſo ist $o(a_1, a_2, \cdots a_n) = o(b_1, b_2, \cdots b_n)$.
25. Jedes Gebiet n ter Stufe ist aus n freien Grösen desſelben abzuleiten.
26. Wenn n Grösen erster Klasse einem Gebiete kleinerer Stufe als n angehören, ſo herrscht zwischen ihnen eine Hörigkeit.
27. Wenn $o(a_1, \cdots a_n)$ zu $b_1, b_2, \cdots b_n$ hörig, ſo ſind dieſe frei und umgekehrt.
28. Zurückleitung einer Gröse n ter auf ein Gebiet m ter Stufe, wo $m < n$.
29. Wenn $\alpha a + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots$, ſo auch $\alpha a' + \beta b' + \cdots = \varkappa k' + \lambda l' + \cdots$, wo $a', b', \cdots k', l', \cdots$ die Zurückleitungen auf dasſelbe Gebiet.
30. Verbindendes Gebiet: $\overset{n}{o} + \overset{m}{o}$; gemeinſames Gebiet $\overset{n}{o} \times \overset{m}{o}$.
$[o(a_1, a_2, \cdots a_n)] \times [o(b_1, b_2, \cdots b_m)] = 0$, wenn keine Gröse gemein.
31. Sei g die Stufe des gemeinſamen, v die des verbindenden Gebietes, ſo ist $m + n = g + v$.
32. Wenn $h > m + n$, ſo ist $g \geqq m + n - h$.
33. $[o(e_{a1} e_{a2} \cdots e_{an})] \times [o(e_{b1} e_{b2} \cdots e_{bm})] \overset{*}{=} 0$ * wenn $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n \gtrless \mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_m$.
34. Für die Gebiete der Ausdehnungslehre gelten alle Sätze der Logik.
35. Für die Gebiete gelten alle Geſetze der Zufügung und Verwebung.
36. $^oA + {^oA} = {^oA}$. $\quad ^oA \cdot {^oA} = {^oA}$.
37. $1 \cdot {^oA} = {^oA}$. $\quad (^oA)^n = {^oA}$.
38. $^oA = {^oA} + {^oA}{^oB}$. $\quad ^oA = {^oA}(^oA + {^oB})$.
39. Wenn $^oA + {^oB} = {^oB}$, ſo ist $^oA \cdot {^oB} = {^oA}$. Wenn $^oA \cdot {^oB} = {^oB}$, ſo ist $^oA + {^oB} = {^oA}$.
40. $^oA + 1 = 1$. $\quad ^oA \cdot 0 = 0$.
$^oA + 0 = {^oA}$. $\quad ^oA \cdot 1 = {^oA}$.

41. Wenn $\circ A + \circ C = \circ B + \circ C$ und auch $\circ A \cdot \circ C = \circ B \cdot \circ C$ ist, fo ist $\circ A = \circ B$.

42. Wenn $\circ A + \circ B = 0$, fo ist $\circ A = 0$ und $\circ B = 0$. Wenn $\circ A \cdot \circ B = 1$, fo ist $\circ A = 1$ und $\circ B = 1$.

43. Nichtgebiet $\circ\overline{A}$. Selbstgebiet $\circ A$.

44. $\circ A + \circ\overline{A} = 1$. $\circ A \cdot \circ\overline{A} = 0$.

45. Für jedes Gebiet giebt es nur ein Nichtgebiet.

46. $\circ\overline{\overline{A}} = A$.

47. $\overline{1} = 0$. $\overline{0} = 1$.

48. Wenn $\circ A \circ\overline{B} + \circ\overline{A}\, \circ B = 0$, fo ist $\circ A = \circ B$. Wenn $(\circ A + \circ\overline{B}) \cdot (\circ\overline{A} + \circ B) = 1$, fo ist $\circ A = \circ B$.

49. $\circ A + \circ B = \circ A \circ B + \circ A \circ\overline{B} + \circ\overline{A} \cdot \circ B$.

50. $\circ A + \circ B + \circ\overline{A} \cdot \circ\overline{B} = 1$.

51. $\overline{(\circ A + \circ B)} = \circ\overline{A} \cdot \circ\overline{B}$. $\overline{(\circ A \cdot \circ B)} = \circ\overline{A} + \circ\overline{B}$.

52. Deckgebiete; Eingebiete; Schneidgebiete; Trenngebiete.

53. Summe der Gebiete. Zeug der Gebiete.

54. $\circ A + \circ B \geqq \circ B$. $\circ A \cdot \circ B \leqq \circ B$.

55. $1 \geqq \circ A$. $0 \leqq \circ A$.

56. $(\circ A + \circ B = \circ B) = (\circ A \leqq \circ B)$. $(\circ A \cdot \circ B = \circ A) = (\circ A \leqq \circ B)$.

57. $(\circ A \circ B = 0) = (\circ B \leqq \circ\overline{A})$ $= (\circ A \leqq \circ\overline{B})$. $(\circ\overline{A} \cdot \circ B = 0) = (\circ B \leqq \circ A)$. $= (\circ\overline{A}\, ! \leqq \circ\overline{B})$.

58. $(\circ A < \circ B) = (\circ\overline{B} < \circ\overline{A})$.

59. $(\circ A + \circ B = \circ B)(\circ A \cdot \circ B = \circ B) = (\circ A = \circ B)$.

60. $(\circ A < \circ B)(\circ B < \circ A) = (\circ A = \circ B)$.

61. $(\circ A < \circ B)(\circ\overline{A} < \circ\overline{B}) = (\circ A = \circ B)$.

62. Gleichungen für Deck- und Eingebiete:

1. $\circ A \leqq \circ B$.	3. $\circ A + \circ B = \circ B$.	5. $\circ A \cdot \circ B = \circ A$.	7. $\circ A \circ\overline{B} = 0$.
2. $\circ\overline{B} \leqq \circ\overline{A}$.	4. $\circ\overline{A} + \circ\overline{B} = \circ\overline{A}$.	6. $\circ\overline{A} \cdot \circ\overline{B} = \circ\overline{B}$.	8. $\circ\overline{A} + \circ B = 1$.

63. Gleichungen für Trenngebiete:

1. $\circ A \leqq \circ\overline{B}$.	3. $\circ A + \circ\overline{B} = \circ\overline{B}$.	5. $\circ A \cdot \circ\overline{B} = \circ A$.	7. $\circ A \cdot \circ B = 0$.
2. $\circ B \leqq \circ\overline{A}$.	4. $\circ\overline{A} + \circ B = \circ\overline{A}$.	6. $\circ\overline{A} \cdot \circ B = \circ B$.	8. $\circ\overline{A} + \circ\overline{B} = 1$.

64. Hauptgebiet $\circ H$.

65. Ergänzung zum Hauptgebiet für $\circ A$ ist $\circ\overline{A} \cdot H$.

66. Jedes Gebiet mit $\circ H$ verwebt oder multiplizirt.

67. Die Sätze 34 bis 63 gelten auch für die Hauptgebiete.

68. Einheit n ter Klasse: Zeug von n Einheiten erster, fofern $\gtrless 0$. Einheit n ter Klasse von andern n ter Klasse frei, wenn eine andere Einheit erster Klasse.

69. Wenn $\alpha E + \beta F + \gamma G + \cdots = 0$, fo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ $\cdots$.

70. $(\alpha a)(\beta b) = (\alpha\beta)(ab)$.

71. $P(\alpha a, \beta b, \cdots) = (\alpha\beta \cdots) P(a, b, \cdots)$ wo P ein Zeug aus den Grösen.

72. $P(\alpha a, \beta a, \cdots) = P(\beta a, \alpha a, \cdots)$.

73. $P(\alpha a + \beta b + \cdots) c = \alpha Pac + \beta Pbc + \cdots$.

74. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b) = S\alpha_a \beta_b (a_a b_b)$.

75. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b) \cdots (S\nu_n n_n) = S\alpha_a \beta_b \cdots \nu_n (a_a b_b \cdots n_n)$.

76. Zeug von Grösen erster Klasse ist eine Vielfachenfumme n ter Klasse, foweit die Zeuge $\gtrless 0$.

77. Innere Webung: $e_a e_b = 0$; $e_a e_a = 1$.

78. Aeusere Webung: $e_a e_b \gtrless 0$; $e_a e_b e_c \gtrless 0$.

79. Flächung: $e_a e_b + e_b e_a = 0$ oder $e_a e_b = - e_b e_a$, $e_a e_a = 0$.
80. Flechtung: $e_a e_b = e_b e_a$; $e_a e_a \gtrless 0$.

Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

81. Flach, Flachung, Zeichen $[abc\cdots]$.
82. $[e_1 e_2 e_3 \cdots] \gtrless 0$.
83. $[E e_r e_s] + [E e_s e_r] = 0$.
84. Für Flache gilt Einigung und Beziehung der Grösen, Vertauschung der Zahlen.
85. Für Flache gelten alle Gefetze 70 bis 76.
86. $[Abc] + [Acb] = 0$ wo b, c Grösen erster Klasse.
87. $[AbcD] + [AcbD] = 0$ wo b, c Grösen erster Klasse.
88. $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$ oder $[P_{a,b}] = - [P_{b,a}]$.
89. $[AB_rC_s] = (-1)^{rs}[AC_sB_r]$ wo B ein Zeug von r, C eins von s Fachen erster Klasse.
90. $[A_q B_r C_s] = (-1)^{q(r+s)+rs}[C_s B_r A_q]$.
91. $[P] = (-1)^r [Q]$ wo r die Anzahl der Fachpare erster Klasse, welche in P und Q entgegengefetzt geordnet find.
92. $[P_{a,a}] = 0$ das Flach mit zwei gleichen Fachen ist Null.
93. $[a_1 a_2 \cdots a_n] = 0$ wenn $a_m = \underset{1,m-1}{S} \alpha_a a_a + \underset{m+1,n}{S} \alpha_a a_a$.
94. $[(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b)\cdots(S\mu_m m_m)] = S(\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m)[a_a b_b \cdots m_m]$.
95. $[(S\gamma_a a_a)(S\beta_b b_b)\cdots(S\mu_m m_m)] = S(\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m)[a_a b_b \cdots m_m]$.
96. Flachtausche oder Determinante Δ^m aus m Reihen von je m Zahlen $\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$ wo jedes Glied mit $(-1)^r$ vervielfacht, wo r die Zahl der niedern Zeiger, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.
97. $\Delta^m = \underset{1,n}{S}(-1)^r \alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$, wo r die Zahl der niedern Zeiger, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.
98. Geschiedsflache aus n Grösen zur m ten Klasse $[a_1, a_2, \cdots a_n]^{\bullet m}$ find die Flache aus m Grösen, wenn jede nur mit den folgenden geflacht. (Anzahl $n^{\bullet m}$).
99. Die Geschiedsflache find die Ausgeschiede, jedes als Flach betrachtet.
100. $[(S\alpha_a a_a)(S\beta_b a_b)\cdots(S\mu_m a_m)] = [a_1, a_2, \cdots a_n]^{\bullet m} \cdot \Delta^m$.
101. $[(S\alpha_a a_a)(S\beta_b a_b)\cdots(S\nu_n a_n)] = \Delta^n [a_1, a_2, \cdots a_n]$.
102. Wenn $[b_1 b_2 \cdots b_n] = 0$, fo giebt es ein $b_m = \underset{1,m-1}{S} \beta_b b_b + \underset{m+1,n}{S} \beta_b b_b$.
103. Sämmtliche Gefetze der Flachung gelten, wenn statt der Einheiten $a_1, a_2, \cdots a_n$ n beliebige gegenfeitig freie Grösen $b_1, b_2, \cdots b_n$ als neue Einheiten genommen werden.
104. Wenn $Z_b = \underset{1,n}{S} \alpha_a x_a$ und $x_a = \underset{1,n}{S^a} \beta_c y_c$ auch $Z_b = \underset{1,n}{S^b} \gamma_c y_c$, fo ist ${}^b\gamma_c = {}^b\alpha_1 {}^1\beta_c + {}^b\alpha_2 {}^2\beta_c + \cdots + {}^b\alpha_n {}^n\beta_c$.
105. Wenn $[Z_1 Z_2 \cdots Z_n] = \underset{\alpha}{\overset{n}{\Delta}} [x_1 x_2 \cdots x_n]$ und $[x_1 x_2 \cdots x_n] = \underset{\beta}{\overset{n}{\Delta}} [y_1 y_2 \cdots y_n]$ auch $[Z_1 Z_2 \cdots Z_n] = \underset{\gamma}{\overset{n}{\Delta}} [y_1 y_2 \cdots y_n]$, fo ist $\underset{\alpha}{\overset{n}{\Delta}} \cdot \underset{\beta}{\overset{n}{\Delta}} = \underset{\gamma}{\overset{n}{\Delta}}$.
106. Wenn $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$, wo A, B, $\cdots$ Geschiedsflache freier Grösen, fo ist $\alpha = 0$, $\beta = 0, \cdots$ d. h. A, B, $\cdots$ find gegenfeitig frei.

107. $[a_1a_2\cdots a_m] \cong [b_1b_2\cdots b_m]$ dann und nur dann, wenn stets $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m = \gamma_1b_1 + \gamma_2b_2 + \cdots + \gamma_mb_m$ gesetzt werden kann, welche Werte auch $x_1\cdots x_m$ haben mögen.
108. Einfache Gröse m ter Klasse $= [b_1b_2\cdots b_m]$; zusammengesetzte.
109. $[b_1b_2\cdots b_m] =$ einfache Gröse m ter Klasse.
110. Linige Aenderung, einfache, mehrfache.
111. $[a_1a_2\cdots a_n] = [a_1a_2\cdots(a_m + \alpha a_{m+1})\cdots a_n] = [a_1a_2\cdots(a_{m-1} + \alpha a_m)\cdots a_n]$.
112. $[a_1\cdots a_n] = [(a_1 + \alpha a_m)a_2\cdots a_n]$.
113. Wenn $[abc\cdots m] = [ABC\cdots M] \gtrless 0$, so lassen sich die Grösen $a, b, c, \cdots m$ durch linige Aenderung in $A, B, C, \cdots M$ umwandeln.
114. $[a_1a_2\cdots a_n] = \left[a_1a_2\cdots(\alpha a_p)\cdots\begin{pmatrix}a_m\\ \alpha\end{pmatrix}\cdots a_n\right]$.
115. $[(a_1a_2\cdots)(b_1b_2\cdots)] = [a_1a_2\cdots b_1b_2\cdots]$.
116. $[A(BC)] = [ABC]$.
117. $A * [BC]$ * wenn $A > B$ und $B \gtrless 0$.
118. $\left(\mathbf{S}^{\alpha}_{a,b,c,\cdots}[a_aa_ba_c\cdots]\right)\left(\mathbf{S}^{\beta}_{m,n,o,\cdots}[b_mb_nb_o\cdots]\right) = \mathbf{S}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ a,b,c,\cdots & m,n,o,\cdots\end{pmatrix}[a_aa_ba_c\cdots b_mb_nb_o\cdots]$.
119. Jedes Flach, welches zwei gleiche Fache erster Klasse hat, ist Null.
120. Jedes Flach, wo ein Fach zu einem andern Fache erster Klasse hörig, ist Null.
121. Wenn $[A\cdot B] = 0$ und $\circ A\cdot\circ B = 0$, so ist $A = 0$ und $B = 0$.
122. Wenn $[aS] = 0$, so ist $S = [aP]$.
123. Wenn $0 = [a_aS]$ von $a = 1$ bis $a = m$, so ist $S = [a_1a_2\cdots a_mS_m]$.
124. Wenn $0 = [a_aS]$ von $a = 1$ bis $a = m$, wo S eine Summe m ter Klasse, so ist $S = \alpha[a_1a_2\cdots a_m]$.
125. Wenn $0 = [a_aS]$ von $a = 1$ bis $a = m + 1$, wo S eine Summe m ter Klasse, so ist entweder $S = 0$ oder $[a_1a_2\cdots a_{m+1}] = 0$.

Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modlungslehre.

126. Hauptgebiet H n ter Stufe, $\overset{n}{[}\ \ ]$ heist ein Modelflach oder Enflach, $\overset{n}{[}e_1e_2\cdots e_n] = 1$.
127. Ergänzung der Einheit E ist $\overline{E}$, gelesen Nicht E.
128. $\overset{n}{[}E\overline{E}] = 1$.
129. $\overline{\overline{E}} = E$; aber, wenn n gerade und zugleich m die Klasse von E ungerade, so ist $\overline{\overline{E}} = -E$.
130. $\overline{A} = \overline{(\alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \cdots)} = \alpha_1\overline{E}_1 + \alpha_2\overline{E}_2 + \cdots$.
131. Klasse von $\overline{E}$ ist $n - m$, wenn die von E m ist.
132. $\overline{\overline{A}} = A$; aber wenn n gerade und zugleich m die Klasse von A ungerade, so ist $\overline{\overline{A}} = -A$.
133. Fortschreitendes Flach $\overset{n}{[}EF]$, wo $\alpha + \beta < n$; $\overset{n}{[}EF] = [EF]$.
Rückschreitendes Flach $\overset{n}{[}EF]$, wo $\alpha + \beta > n$; $\overline{\overset{n}{[}EF]} = [\overline{E}\overline{F}]$.
Stehendes Flach $\overset{n}{[}EF]$, wo $\alpha + \beta = n$; $\overset{n}{[}EF] = \pm 1$. $\overline{\overset{n}{[}EF]} = \pm 1$.

134. **Modelſumme oder Enſumme** $\overset{n}{(}\alpha+\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma-\mathfrak{a}n$, wo $\overset{n}{(}\alpha+\beta+\gamma)<n$.
135. Wenn $\alpha+\beta>n$, ſo $A=[CA_1]$ und $B=[CB_1]$ wo $\alpha+\beta=n+\gamma$.
136. Summe einfacher Grösen $(n-1)$ Klasse ist eine einfache Gröse $(n-1)$ter Klasse.
137. Das stehende Modelflach ist $=\pm 1$, eine Gröse 0ter Klasse $\overset{n}{(}\alpha+\beta)=0$ und ist $\overset{n}{[}EF]$ wie $\overset{n}{[}\overline{E}\,\overline{F}]$ stehend.
138. $\overline{E}\overset{*}{=}\overset{n}{[}EFF]$ * wo $EF=\pm[e_1e_2\cdots e_n]$.
139. Für rückschreitende Modelflache ist $\overline{\overset{n}{[}EF]}=[\overline{E}\,\overline{F}]$.
140. $\alpha+\beta+\cdots=\mathfrak{a}n+\overset{n}{(}\alpha+\beta+\cdots)$.
141. Für alle Modelflache gilt das Beziehungsgeſetz.
142. Das Enflach $\overset{p}{[}AB]=0$ nur dann, wenn darin ein Fach erster Klasse 2mal öfter vorkommt als jede andere Einheit erster Klasse.
143. Für fortschreitende Modelflache gelten alle Geſetze der Flachung.
144. Für fortschreitendes Modelflach $\overset{n}{[}EF]$ ist $\overset{n}{[}\overline{E}\,\overline{F}]$ rückschreitend.
145. Wenn $C=\overset{p}{[}AB]$, ſo ist $\gamma=\overset{n}{(}\alpha+\beta)$.
146. Wenn $R=\overset{p}{[}ABC\cdots]$, ſo ist $\varrho=\overset{n}{(}\alpha+\beta+\gamma+\cdots\nu)$.
147. $\overline{\overset{n}{[}AB]}=\overset{p}{[}\overline{A}\,\overline{B}]$.
148. $\overline{\overset{p}{[}ABC\cdots]}=\overset{p}{[}\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cdots]$.
149. $\overline{\overset{p}{[}abc\cdots]}=\overset{n}{[}\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\cdots]$.
150. $\overline{\overset{n}{(}A\pm B\pm C\pm\cdots)}=\overline{A}\pm\overline{B}\pm\overline{C}\pm\cdots$.
151. Wenn $f_0(A,B,\cdots)=\varphi_0(A',B',\cdots)$, ſo ist auch $f_0(\overline{A},\overline{B},\cdots)=\varphi_0(\overline{A'},\overline{B'},\cdots)$.
152. Jeder Satz, der für Grösen m ter Klasse gilt, gilt auch für Grösen $(n-m)$ter Klasse.
153. $\overset{p}{[}EF(EG)]\overset{*}{=}\overset{p}{[}EFG\cdot E]$ * wo die Klassen $\alpha+\beta+\gamma=n$.
154. $\overset{p}{[}AB(AC)]\overset{*}{=}\overset{n}{[}ABC\cdot A]$ * wo $\alpha+\beta+\gamma=n$ und A, B, C einfach.
155. $\overset{p}{[}AB(AC)]\overset{*}{=}\overset{p}{[}ABC\cdot A]$ * wo $\alpha+\beta+\gamma=n$ und A einfach.
156. $\overset{p}{[}AB(AC)]\overset{*}{=}\overset{p}{[}ABC\cdot A]$; $\overset{p}{[}AB(BC)]\overset{*}{=}\overset{p}{[}ABC\cdot B]$; $\overset{p}{[}AC(BC)]=\overset{p}{[}ABC\cdot C]$
* wo $\alpha+\beta+\gamma=\mathfrak{a}n$ und A, B, C einfach.
157. $\overset{p}{[}A(BC)]\overset{*}{=}\overset{n}{[}AC\cdot B]$; $[\overset{n}{C}B\cdot A]\overset{*}{=}[\overset{n}{C}A\cdot B]$ * wo $\alpha+\beta=n$, A, B, C einfach und $B<A$.
158. $\overset{p}{[}AB]\gtrless 0$ dann und nur dann, wenn, ſofern δ die Stufenzahl des verbindenden und γ die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, bei $\alpha+\beta\leqq n$ auch $\alpha+\beta=\delta$, d. h. $\gamma=0$, bei $\alpha+\beta>n$ auch $\delta=n$, d. h. $\gamma=\overset{n}{(}\alpha+\beta)$.
159. **Nein** A $\overset{\leftrightarrow}{A}$; $\overset{\leftrightarrow}{A}\overset{*}{=}\overset{p}{[}AA'A']$ * wo $[AA']=\pm[a_1a_2\cdots a_n]$.
160. Alle Modlungsgeſetze gelten, wenn beliebige Grösen erster Klasse, deren Enflach 1 eins ist, als Einheiten gesetzt werden.

161. Wenn $1 = {}^{n}[a_1a_2\cdots a_n] = {}^{n}[PP'] = {}^{n}[AA'] = {}^{n}[BB'] = \cdots$ und $P = {}^{n}[ABC\cdots]$, so ist $P' = {}^{n}[A'B'C'\cdots]$.

162. Wenn $1 = {}^{n}[a_1a_2\cdots a_n]$ und $A_r = {}^{n}[a_1\cdots a_{r-1}\cdot a_{r+1}\cdots a_n]$, so ist
${}^{n}[A_n\cdots A_{m+1}] \stackrel{*}{=} {}^{n}[a_1\cdots a_m]$ * wo A_a das Geschiedsflach aus $(n-1)$ Grösen, in dem a_a fehlt.

163. ${}^{n}[AB] \cdot * \cdot {}^{n}[AD_1F_1] + {}^{n}[AD_2F_2] + \cdots$ * wo ${}^{n}[F_aD_a] = B$ und $\alpha + \delta_a = n$.

164. Reines Modelflach; gemischtes Modelflach.

165. Wenn ${}^{n}[ABC\cdots]$ fortschreitend, so ${}^{n}[\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}]$ rückschreitend und umgekehrt.

166. ${}^{n}[ABC\cdots M]$ ist, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots \leq n$ ist, rein fortschreitend, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots \geq n(m-1)$ ist, rein rückschreitend, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots > n$ und $< n(m-1)$ ist, gemischt.

167. Beim fortschreitenden Enflach ist die Klasse $\varphi = \alpha+\beta+\gamma+\cdots$; nur wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots = 0$, so ist $\varphi = 0$.
Beim rückschreitenden Enflach ist $\varphi = \alpha+\beta+\gamma+\cdots-(m-1)n$.

168. Beim fortschreitenden Enflach ist $o\varphi = o\delta$, beim rückschreitenden $o\varphi = o\gamma$.

169. ${}^{n}[A(BC)] = {}^{n}[ABC]$, wenn ${}^{n}[ABC]$ ein reines Enflach.

170. Wenn $P = {}^{n}[AB\cdot G]$ reines Enflach und $A = {}^{n}[a_1a_2\cdots a_q]$, $B = {}^{n}[a_{q+1}\cdots a_r]\cdots$
$G = {}^{n}[a_{s+1}\cdots a_t]$ und $a_1,\cdots a_t$ Grösen 1 oder $(n-1)$ter Klasse, so ist
$P = {}^{n}[a_1a_2\cdots a_t]$.

171. $P = {}^{n}[ABC\cdots]$ ist nur dann $\gtrless 0$, wenn beim fortschreitenden Enflach $\varphi = \delta = \alpha+\beta+\cdots$, und wenn beim rückschreitenden $\varphi = \gamma = \alpha+\beta+\cdots-(m-1)n$.

172. $P_{A,B} = P_{B,A}$, wenn P reines Enflach.

173. $P_{A,B} = 0$, wenn P reines Enflach und $A > B$ oder $A < B$.

174. ${}^{n}[ABC] = 0$, wenn entweder ${}^{n}[AB] = 0$ oder A, B, C im Gebiete $n-\zeta$.

175. ${}^{n}[ABC] = {}^{n}[ACB]$, wenn $B \lesseqgtr C$.

176. ${}^{n}[ABC] = (-1)^{\beta\gamma}\,{}^{n}[ACB]$, wenn $\alpha+\beta+\gamma \leq n$
$= (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)}\,{}^{n}[ACB]$, wenn $\alpha+\beta+\gamma \geq 2n$
$= (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)}\,{}^{n}[ACB]$, wenn $\alpha+\beta+\gamma = n+t$, wo $t < n$.

177. Aufzählung der Fälle, wo ${}^{n}[ABC] \cong {}^{n}[ACB] \cong {}^{n}[BAC] \cong {}^{n}[B\cdot AC]$.

178. ${}^{n}[A_1A_2\cdots A_{n-1}\cdot A_n] \cong {}^{n}[A_n(A_{n-1}\cdot(\cdots(A_2\cdot A_1)))]$
$\cong {}^{n}[A_1\cdots A_{n-r-1}\cdot(A_n(A_{n-1}\cdots A_{n-r}))]$
wenn ${}^{n}[A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n]$ ein Enflach der Klasse Null.

179. Zurückleitung A' einer Vielfachensumme von Geschiedsflachen beliebiger Klasse A auf das Gebiet ${}^{n}[a_1\cdots a_m]$ mit Ausschluss von ${}^{n}[a_{m+1}\cdots a_n]$. Fortschreitend, wenn $a_1\cdots a_n$ Grösen erster, rückschreitend, wenn sie Grösen $(n-1)$ter Klasse sind.

180. Sei m die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet, p die Klasse der Geschiedsflache, ſo ist die Zurückleitung fortschreitend, wenn $m \geqq p$, rückschreitend, wenn $m \leqq p$.

181. Sei A' die Zurückleitung von A auf das Gebiet B mit Ausschluss von C, ſo ist $A' = \frac{\overset{n}{[}B(AC)]}{\overset{n}{[}BC]}$ und ist $A' = \overset{n}{[}B(AC)]$, wenn $\overset{n}{[}BC] = 1$.

182. Wenn $P = \alpha A + \beta B + \cdots$, wo $\alpha, \beta, \cdots$ Zahlen, und P', A', B' ihre Zurückleitungen auf das Gebiet M ſind, ſo ist $P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots$.

183. Wenn $P = \overset{n}{[}A \cdot B \cdots E]$ reines Enflach und $P', A', B', \cdots E'$ die Zurückleitungen auf das Gebiet M ſind (auch die Zurückleitungen fortschreitend genommen ſind, wenn $\overset{n}{[}A \cdot B \cdot\cdot E]$ fortschreitend ist, dagegen rückschreitend, wenn dies rückschreitend ist), ſo ist $P' = \overset{n}{[}A'B' \cdots E']$.

184. Das reine Enflach von Grösen 1 oder $(n-1)$ ter Klasse ist ein Einheitsflach dieſer Grösen.

185. Gleichung, deren Glieder $(m-1)$ ter Klasse im Engebiete ist, lässt ſich durch Zahlgleichungen erſetzen.

Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

186. Das Innenzeug (innere Produkt) zweier Einheiten E und F ist $E \times F = \overset{n}{[}E\overline{F}]$.

187. $\overset{n}{[}E_r\overline{E_r}] = 1$, $\quad \overset{n}{[}E_r\overline{E_s}] = 0$.

188. $\overset{n}{[}E\overline{F}] \gtrless 0$ dann und nur dann, wenn $E \leqq F$ oder $F < E$ ist.

189. $\overset{n}{[}EF \cdot \overline{E}] = F$ und $\overset{n}{[}F \cdot \overline{(EF)}] = \overline{E}$, wenn E und F Einheiten und $\overset{n}{[}EF] \gtrless 0$.

190. Wenn E, F, G Einheiten und $\overset{n}{[}EF] \gtrless 0$ und $\overset{n}{[}EG] \gtrless 0$, ſo ist

$\overset{n}{[}EF\overline{(EG)}] = \overset{n}{[}F\overline{G}]$ wenn F von gleicher oder höherer Klasse als G.

$\overset{n}{[}FE\overline{(GE)}] = \overset{n}{[}FG]$ wenn G von gleicher oder höherer Klasse als F.

191. Das Innenzeug zweier Grösen ist $A \times B = \overset{n}{[}A\overline{B}]$.

192. $\overset{n}{[}A\overline{B}] = \overline{\overset{n}{[}B\overline{A}]}$, ſofern B von höherer Klasse als A; aber $\overset{n}{[}A\overline{B}] = -\overline{\overset{n}{[}B\overline{A}]}$ wenn die Klasse von B gerade, die von A ungerade.

193. Die Klasse von $\overset{n}{[}A\overline{B}]$ ist $\alpha - \beta$, wenn $\beta \leqq \alpha$, dagegen $\alpha + n - \beta$, wenn $\beta > \alpha$.

194. Die Anzahl der Einheiten, deren Vielfachenſumme das Innenzeug $A \times B$ ist, ist $n^{\bullet\alpha - \beta}$, wenn $\beta \leqq \alpha$, dagegen $n^{\bullet\beta - \alpha}$, wenn $\beta > \alpha$.

195. Das Innenzeug zweier Grösen gleicher Klasse ist eine Zahl.

196. $\overset{n}{[}(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)\overline{(\beta_1 E_1 + \cdots + \beta_m E_m)}] = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m$, wo $E_1 \cdots E_m$ Einheiten gleicher Klasse.

197. $\overset{n}{[}A\overline{B}] = \overset{n}{[}B\overline{A}]$, wenn A und B gleicher Klasse.

198. Das Innenquader von A ist $A^2 = \overset{n}{[}A\overline{A}]$.

199. $(\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_m E_m)^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2$.

200. Zahlwert von A ist $(A^2)^{1/2}$. Zahlwertig gleich ſind A und B, wenn $A^2 = B^2$.

201. **Normig** iſt A zu B, wenn $\overset{n}{[}A\overline{B}] = 0$, wo $A \gtrless 0$ und $B \gtrless 0$.
Allſeitig normig ſind zwei Gebiete, wenn jede Gröse erſter Klasse des einen normig zu jeder des andern ist.

202. **Normverein** n ter Stufe ist ein Verein von n zahlwertig gleichen Grösen erster Klasse. Vollständiger. Einfacher (dessen Zahlwert 1).

203. Der Verein der ursprünglichen Einheiten ist ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte eins.

204. **Kreiſeländerung** um den Winkel α ist, wenn ſich a in $xa + yb$ und b in $\pm(xb - ya)$ verwandeln, wo $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ und a und b zahlwertig gleich und normig.

205. Jeder Normverein kann durch Kreiſeländerung in einen zahlwertig gleichen verändert werden.

206. Das Enflach der Grösen eines Normvereins bleibt durch poſitive Kreiſeländerung unverändert, wird durch negative Kreiſeländerung entgegengeſetzt.

207. Die Grösen eines Normvereins ſind gegenſeitig frei und jede Gröse erster Klasse lässt ſich als eine Vielfachenſumme der Grösen eines beliebigen vollständigen Normvereins darstellen.

208. Eine Gröse A, welche zu mehren Grösen gleicher Stufe B, C, $\cdot\cdot$ normig ist ist auch zu jeder Vielfachenſumme dieſer Grösen normig.

209. Alle Grösen, welche zu m Grösen normig ſind, gehören zu dem Gebiete der n — m andern Grösen des Normvereins.

210. Jeder Normverein kann durch Kreiſeländerung ſo umgewandelt werden, dass statt a_1 die Gröse $c = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ eintritt, ſofern $a_1^2 = c^2$.

211. Je zwei Normvereine von gleichem Gebiete gleicher Stufe und gleichem Zahlwerte können in einander umgewandelt werden.

212. In jedem Gebiete kann man einen Normverein gleicher Stufe mit beliebigem Zahlwerte aufstellen.

213. **Normige Zurückleitung** auf Gebiet B unter Ausschluss von $\overline{B}$.

214. A' ſei normige Zurückleitung von A, ſo ist $A' = \dfrac{\overset{n}{[}B(A\overline{B})]}{B^2}$.

215. $A' \overset{*}{=} \dfrac{\overset{n}{[}A\overline{B}B]}{B^2}$ * wenn $\alpha = \beta$.

216. $\overline{A} \overset{*}{=} \overset{n}{[}ABB]$ * wenn $\overset{n}{[}AB]$ die n Grösen des Normvereins enthält, und dieſer $= 1$.

217. Alle Sätze bleiben gültig, wenn statt $\overset{n}{[}e_1 e_2 \cdots e_n]$ auch $\overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_n] = 1$ geſetzt.

218. Die Gleichungen $\overset{n}{[}a_r \overline{a_s}] = 0$, wo $r \gtrless s$ und $\overset{n}{[}a_r \overline{a_r}] = 1$ gelten, wenn $\overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_n]$ ein vollständiger Normverein.

219. $\overset{n}{[}a\overline{b}] = \overset{n}{[}b\overline{a}]$.

220. $\overset{n}{[}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdot\cdot)\overline{(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdot\cdot)}] = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 + \cdot\cdot$, wo $a_1, a_2, \cdot\cdot$ normig.

221. $\overset{n}{[}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdot\cdot)\overline{(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdot\cdot)}] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdot\cdot$, wo $a_1, a_2, \cdot\cdot$ einfach normig.

222. $(a_1 + a_2 + \cdots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots$, wo $a_1, a_2, \cdots$ normig.

223. $(a + b)^2 = a^2 + 2\,{}^{n}[a\overline{b}] + b^2$.

224. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,{}^{n}[b\overline{c}] + 2\,{}^{n}[c\overline{a}] + 2\,{}^{n}[a\overline{b}]$.

225. $\left.\begin{array}{l} {}^{n}[AB\overline{(AC)}] = A^2\,{}^{n}[B\overline{C}] \\ {}^{n}[CA\overline{(BA)}] = A^2\,{}^{n}[C\overline{B}] \end{array}\right\}$ wo B und A allseitig normig und $\gamma \leq \beta$.

226. ${}^{n}[A\overline{B}] = {}^{n}[A\overline{B'}]$ und ${}^{n}[B\overline{A}] = {}^{n}[B'\overline{A}]$, wo B′ normige Zurückleitung von B auf A.

227. ${}^{n}[A\overline{B}] = \alpha\beta'$, wenn $A = \alpha E$ und die Zurückleitung von A auf B gleicher Stufe $= \beta' E$.

228. B ist das ergänzende Geschiedsflach zu A, wenn ${}^{n}[AB] = {}^{n}[a_1 a_2 \cdots a_n]$.

229. ${}^{n}[AB\overline{(\mathcal{A}\mathcal{B})}] = {}^{n}[A\overline{\mathcal{A}}(B\overline{\mathcal{B}})] + {}^{n}[A_1\overline{\mathcal{A}}(B_1\overline{\mathcal{B}})] + \cdots$
${}^{n}[\mathcal{B}\mathcal{A}\overline{(AB)}] = {}^{n}[\mathcal{B}\overline{B}(\overline{\mathcal{A}}A] + {}^{n}[\mathcal{B}\overline{B}_1(\mathcal{A}\overline{A}_1)] + \cdots$
$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = \alpha,\ \mathcal{B} \leq \beta \text{ und } {}^{n}[AB] \gtrless 0, \text{ auch} \\ B, B_1, \cdots \text{die Ergänzung zu } A, A_1, \cdots \end{array}\right.$

230. $S\,{}^{n}[A_a\overline{\mathcal{A}}(B_b\overline{\mathcal{B}})\cdots(L_l\overline{\mathcal{L}})(M_m\overline{\mathcal{M}})]$ die Summe, wo $\alpha_a = \alpha = \mathcal{A}$, $\beta_b = \beta = \mathcal{B}\cdots$ $\mu_m = \mu \geq \mathcal{M}$ und ${}^{n}[AB\cdots M] \gtrless 0$.

231. ${}^{n}[AB\cdots LM\overline{(\mathcal{A}\mathcal{B}\cdots\mathcal{L}\mathcal{M})}] = S\,{}^{n}[A_a\overline{\mathcal{A}}(B_b\overline{\mathcal{B}})\cdots(L_l\overline{\mathcal{L}})(M_m\overline{\mathcal{M}})]$ wo Alles wie in 229.

232. ${}^{n}[AB\cdots\overline{(\mathcal{A}\mathcal{B}\cdots\ )}] = \dfrac{{}^{n}[A'B'\cdots]}{{}^{n}[AB\cdots]}$, wo $\alpha' = \alpha = \mathcal{A}$, $\beta' = \beta = \mathcal{B}\cdots$ und $A' = S\,{}^{n}[A_a\overline{\mathcal{A}}A_a]\cdots$.

233. ${}^{n}[abc\cdots\overline{(a'b'c'\cdots)}] = \mathcal{A}\left|\begin{array}{llllll} {}^{n}[a\overline{a'}] & {}^{n}[a\overline{b'}] & {}^{n}[a\overline{c'}]\cdots & = S \mp (\alpha_a\beta_b\gamma_c\cdots) & & \\ {}^{n}[b\overline{a'}] & {}^{n}[b\overline{b'}] & {}^{n}[b\overline{c'}]\cdots & \text{wo } \alpha_1 = {}^{n}[a\overline{a'}], & \alpha_2 = {}^{n}[a\overline{b'}]\cdots & \\ {}^{n}[c\overline{a'}] & {}^{n}[c\overline{b'}] & {}^{n}[c\overline{c'}]\cdots & \beta_1 = {}^{n}[b_1\overline{a'}], & \beta_2 = {}^{n}[b\overline{b'}]\cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$

234. ${}^{n}[ab\overline{(a'b')}] = {}^{n}[a\overline{a'}(b\overline{b'})] - {}^{n}[a\overline{b'}(a'\overline{b})]$.

235. ${}^{n}[ab]^2 = a^2 b^2 - {}^{n}[a\overline{b}]^2$.

236. ${}^{n}[abc]^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2\,{}^{n}[b\overline{c}]^2 - b^2\,{}^{n}[c\overline{a}]^2 - c^2\,{}^{n}[a\overline{b}]^2 + 2\,{}^{n}[a\overline{b}(b\overline{c})(c\overline{a})]$.

237. ${}^{n}[abcd]^2 = \mathcal{A}\left\{\begin{array}{l} a^2,\ {}^{n}[a\overline{b}],\ {}^{n}[a\overline{c}],\ {}^{n}[a\overline{d}],\ {}^{n}[b\overline{a}],\ b^2,\ {}^{n}[b\overline{c}],\ {}^{n}[b\overline{d}], \\ {}^{n}[c\overline{a}],\ {}^{n}[c\overline{b}],\ c^2,\ {}^{n}[c\overline{d}],\ {}^{n}[d\overline{a}],\ {}^{n}[d\overline{b}],\ {}^{n}[d\overline{c}],\ d^2. \end{array}\right.$

238. ${}^{n}[ab\overline{c}] = {}^{n}[a\overline{c}b] - {}^{n}[b\overline{c}a]$.

239. ${}^{n}[abc\overline{d}] = {}^{n}[a\overline{d}(bc)] + {}^{n}[b\overline{d}(ca)] + {}^{n}[c\overline{d}(ab)]$.

240. ${}^{n}[abcd\overline{e}] = {}^{n}[a\overline{e}(bcd)] + {}^{n}[b\overline{e}(cad)] + {}^{n}[c\overline{e}(abd)] + {}^{n}[d\overline{e}(cba)]$.

241. ${}^{n}[A\overline{B}] + {}^{n}[A_1\overline{B}_1] + \cdots = 0$, wo $\alpha = \alpha_a$, $\beta = \beta_b = n - \alpha$.

242. ${}^{n}[ab\overline{(cd)}] + {}^{n}[ac\overline{(db)}] + {}^{n}[ad\overline{(bc)}] = 0$.

243. ${}^{n}[ab\overline{c}] + {}^{n}[bc\overline{a}] + {}^{n}[ca\overline{b}] = 0$.

244. ${}^{n}[abc\overline{d}] - {}^{n}[bcd\overline{a}] + {}^{n}[cda\overline{b}] - {}^{n}[dab\overline{c}] = 0$.

245. $\overset{n}{[}A\overline{A'}] + \overset{n}{[}B\overline{B'}] + \cdots = 0$, wo $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 2m$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = \cdots = 2m$ und A, B, C, $\cdots a_1$ als Fach enthalten und $\overset{n}{[}AA'] = \overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_{4m}]$.

246. Cosinus des Winkels AB; $\cos\angle AB = \frac{\overset{n}{[}A\overline{B}]}{\alpha\beta}$, wo A, B gleicher Klasse, α, β ihre Zahlwerte und $\angle AB = M[0,\pi]$

$(\sin\overset{n}{[}abc\cdots])^2 = \frac{\overset{n}{[}abc\cdots]^{\underline{2}}}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdots}$ $\qquad \sin\overset{n}{[}abc\cdots] \geqq 0$.

247. $\sin\overset{n}{[}ab] = \sin\angle ab$ wenn a, b erster Klasse.

248. $\overset{n}{[}A\overline{B}] = \alpha\beta\cos\angle AB$, wo A und B gleicher Klasse, α, β ihre Zahlwerte.

249. $\overset{n}{[}ab]^{\underline{2}} = (\alpha\beta\sin\angle ab)^2$.

250. $\overset{n}{[}ab\overline{(cd)}] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin\angle ab)(\sin\angle cd)(\cos\angle ab(cd))$.

251. Normige Zurückleitung von A auf B gleicher Klasse $= A\cos\angle AB$.

252. $\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha}\cos\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos\angle bk + \cdots$, wo a, b$\cdots$ normig, α, $\beta\cdots$ ihre Zahlwerte, auch k als Vielfachenſumme zu a, b$\cdots$ hörig.

253. $\cos\angle kl = (\cos\angle ak)\cos\angle al + (\cos\angle bk)\cos\angle bl + \cdots$, wo a, b, c$\cdots$ normig, und k, l als Vielfachenſumme zu ihnen hörig.

254. Wenn alle Zurückleitungen normig, ſo kann man ſtatt k auf l auch k auf a, b$\cdots$ zurückleiten, dieſe a, b$\cdots$ auf l zurückleiten und fügen.

255. $0 = (\cos\angle ak)\cos\angle al + (\cos\angle bk)\cos\angle bl + \cdots$, wo alle normig und k und l Vielfachenſummen von a, b$\cdots$.

256. $1 = (\cos\angle ka)^2 + (\cos\angle kb)^2 + \cdots$, wo k Vielfachenſumme von a, b$\cdots$ die normig.

257. Wenn $a + b + \cdots = 0$, und α, β,$\cdots$ ihre Zahlwerte, ſo ist
1. $\alpha : \beta : \cdots = \sin a' : \sin b' : \cdots$, wo a′, b′$\cdots$ die Ergänzung zu a, b$\cdots$,
2. $\alpha\cos\angle ax + \beta\cos\angle bx + \cdots = 0$, wo x eine beliebige Gröſe,
3. $(\sin a')\cos\angle ax + (\sin b')\cos\angle bx + \cdots = 0$.

258. $(a + b)^{\underline{2}} = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\angle ab + \beta^2$.

259. $(a + b + c)^{\underline{2}} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\angle bc + 2\gamma\alpha\cos\angle ca + 2\alpha\beta\cos\angle bc$.

260. $(\sin\angle AB)(\sin\angle \mathit{AB})\cos\angle AB(\mathit{AB}) = S(\cos\angle A_r\mathit{A})\cos\angle B_r\mathit{B}$, wo die Klassen von A und A_r gleich und B_r die ergänzenden Geschiedsflache zu A_r ſind.

261. $(\sin\overset{n}{[}abc\cdots])(\sin\overset{n}{[}a'b'c'\cdots])\cos\angle abc\cdots a'b'c'\cdots = \Delta\left|\begin{matrix} \cos\angle aa', & \cos\angle ab', & \cdots \\ \cos\angle ba', & \cos\angle bb', & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix}\right.$

262. $(\sin\overset{n}{[}ab])(\sin\overset{n}{[}cd])\cos\angle ab(cd) = (\cos\angle ac)\cos\angle bd - (\cos\angle ad)\cos\angle bc$.

263. $(\sin\overset{n}{[}ab])(\sin\overset{n}{[}ac])\cos\angle ab(ac) = \cos\angle bc - (\cos\angle ac)\cos\angle ab$.

264. $(\sin\angle ab)^2 = 1 - (\cos\angle ab)^2$.

265. $(\sin\angle abc)^2 = 1 - (\cos\angle bc)^2 - (\cos\angle ca)^2 - (\cos\angle ab)^2$
$+ 2(\cos\angle ab)(\cos\angle bc)\cos\angle ca$.

266. $(\sin\overset{n}{[}ab])(\sin\overset{n}{[}cd])\cos\angle ab(cd) + (\sin\overset{n}{[}ac])(\sin\overset{n}{[}bd])\cos\angle ac(bd)$
$+ (\sin\overset{n}{[}ad])(\sin\overset{n}{[}bc])\cos\angle ad(bc) = 0.$

267. $(\sin A)(\sin A')\cos\angle AA' + (\sin B)(\sin B')\cos\angle BB' + \cdots = 0,$
wo A, B, C,·· die Geschiedsflache aus 4n Grösen zur 2n Klasse und A′, B′, C′,·· deren ergänzende Geschiedsflache find.

Anhang: Anwendung der Ausdehnungslehre zur Löfung der Gleichungen mit mehren Unbekannten.

268. Auflöfung von m Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten.
Gegeben
$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m &= \nu_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \cdots + \mu_2 x_m &= \nu_2 \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \cdots + \mu_m x_m &= \nu_m, \end{aligned}$$
fo ist
$$\begin{aligned} x_1 &= \Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) : \Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) \\ x_2 &= \Delta^m(\alpha_a \nu_b \gamma_c \cdots \mu_m) : \Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ x_m &= \Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \nu_m) : \Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m). \end{aligned}$$

269. Entfernung aller m Unbekannten aus m Gleichungen ersten Grades.
Gegeben
$$\begin{aligned} \nu_0 + \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \cdots + \mu_0 x_m &= 0 \\ \nu_1 + \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \mu_1 x_m &= 0 \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \nu_m + \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \cdots + \mu_m x_m &= 0, \end{aligned}$$
fo ist $\Delta^{m+1}(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m \nu_n) = 0$, wo die Zeiger $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots \mathfrak{n}$ fämmtlich einander ungleich find, die Gleichung, wo alle Unbekannte entfernt find.

270. Entfernung einer Unbekannten aus 2 Gleichungen mten und nten Grades.
Gegeben
$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m &= 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n &= 0, \end{aligned}$$
fo ist $\overset{m+n}{[}u_1 u_2 \cdots u_{m+n}] = 0$ die Gleichung, wo x entfernt ist und in welcher
$u_a = a_{a-1} e_1 + a_{a-2} e_2 + \cdots + a_0 e_a + b_{a-1} e_{n+1} + b_{a-2} e_{n+2} + \cdots + b_0 e_{n+a}$
und $e_1, e_2, \cdots e_{m+n}$ fämmtlich gegenfeitig freie Einheiten.

——

Formelbuch

der

Erweiterungslehre.

Vierter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.

1. Die Flechtung.

1. Flecht ab = Flecht a mal b. e Einheiten, a, b, c,··· Grösen erster Klasse, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ Zahlen.
2. $e_a e_a \gtrless 0 \qquad e_a e_b e_c \gtrless 0$.
3. $e_r(e_s e_t) = e_r e_s e_t \qquad e_r e_s = e_s e_r$.
4. Einheit nter Klasse $e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$, Gröse nter Klasse $abc \cdots n$.
5. Für die Flechte gelten alle Gesetze der Verwebung.
6. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b)\cdots(S\mu_m m_m) = S(\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m)(a_a b_b \cdots m_m)$.
7. Das Flecht von n Grösen erster Klasse = Vielfachensumme von Einheiten n ter Klasse.
8. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b a_b)\cdots(S\mu_m a_m) = S(\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m)(a_a a_b \cdots a_m)$.
9. Flechttausche Demutante $D^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)$.
10. Die Flechte mit m Fachen aus n Grösen = Geschiedsflechte aus n Gröse zur m ten Klasse.
11. Die Geschiedsflechte aus n Gröse zur m ten Klasse sind Vollgeschiede aus n Gröse zur m ten Klasse.
12. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b a_b)\cdots(S\mu_m a_m) = SD^m \cdots (a_r a_s a_t \cdots)$ wo $r \lesseqgtr s \lesseqgtr t \lesseqgtr \cdots$
13. Wenn $AB = 0$ und $A \gtrless 0$, so ist $B = 0$.
14. Wenn $AB = AC$ und $A \gtrless 0$, so ist $B = C$.
15. $A : B \cdot B = A$.
16. $AB : B = A$.
17. Alle Gesetze fürs Teilen gelten auch für die Flechte.

2. Die Hauptformeln und Hauptgrösen.

18. Zahlgröse αe. Hauptgröse $S\alpha_a a_a$.
19. Wenn $y = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ und $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ ist, so ist $y = f([x\bar{e}_1], [x\bar{e}_2], \cdots [x\bar{e}_n]) = \varphi x$ wo $e_1, e_2 \cdots e_n$ ein einfacher Normverein.
20. Wenn $y_a = f_a(x_1 x_2 \cdots x_n)$ und $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, auch $e_1, \cdots e_n$ und $e_1, \cdots e_m$ einfacher Normverein, so ist $y = F(x) = e_1 \varphi_1 x + e_2 \varphi_2 x + \cdots e_m \varphi_m x$ wo $\varphi_a x = f_a([x\bar{e}_1], [x\bar{e}_2], \cdots [x\bar{e}_n])$.
21. Wenn alle Grösen Vielfachensummen von $e_1, \cdots e_n$, so lässt sich jeder Verein von Folgen derselben als n Folge einer veränderlichen Gröse darstellen.

3. Die Lückenzeuge und die Lückenausdrücke.

22. Erklärung. N-Lückenzeug $Pl^n(x_1, \cdots x_n) = Pl^n\,0(x_1 x_2 \cdots x_n) : n!$
    Z. B.: $Pa_1 la_2 la_3$ giebt $Pl^2(x_1 y) = (a_1 x a_2 y a_3 + a_1 y a_2 x a_3) 2$.
23. $Pl^n(x_1 x_2 \cdots x_n) = Pl^n\,0(x_1 x_2 \cdots x_n) : n!$
24. $Pl^n x^n = Pxx \cdots x$.

25. $\mathrm{Pl}^{n+m}(x_1 x_2 \cdots x_n x^m) = \dfrac{\mathrm{Pl}^{n+m}\,0(x_1 x_2 \cdots x_n x^m)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$.

26. 27. $\left.\right\}\ \mathrm{Pl}^{n \pm m}(x_1 x_2 \cdots x_n)l^m = \dfrac{\mathrm{Pl}^{n+m}\,0(x_1 x_2 \cdots x_n l^m)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$.

28. $\mathrm{Pl}^m x = \dfrac{\mathrm{Pl}^m\,0(xl^m)}{m}$.

29. N-Lückenausdruck = Vielfachenſumme von N-Lückenzeugen.

30. Wenn $e_0, e_1 \cdots$ einfacher Normverein und $x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \cdots$.

31. Auch $A = S\alpha_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots} [l\overline{e_0}]^{\mathfrak{r}} [l\overline{e_1}]^{\mathfrak{a}} [l\overline{e_2}]^{\mathfrak{b}} \cdots$ wo $\mathfrak{r} + \mathfrak{b} + \cdots = n$ ſo ist $S\alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdots x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots = Ax^n$ wo A ein N-Lückenausdruck.

32. $A(x_1 x_2 \cdots x_n) = Ax_1 x_2 \cdots x_n$.

33. In $Ax_1 x_2 \cdots x_n$ wo $A = \mathrm{Pl}^{n+m}$, kann man in $x_1 x_2 \cdots x_n$ beliebig Klammern ſetzen.

34. In $Ax_1 x_2 \cdots$ wo A ein Lückenausdruck ist die Ordnung der Fache in $x_1 \cdots x_n$ beliebig.

35. $At(x + y + \cdots)u = Atxu + Atyu + \cdots$ wo A ein Lückenausdruck.

36. Für die Lückenausdrücke gelten alle Geſetze der Verwebung und der Beziehung.

4. Die Hauptbrüche oder die Hauptquotienten.

37. Der Hauptbruch $Q = \dfrac{b_1, b_2, \cdots b_n}{a_1, a_2, \cdots a_n}$, wo $a_1, a_2, \cdots a_n$ gegenſeitig frei im Hauptgebiete nter Stufe ist die Gröse $Qa_{\mathfrak{a}} = b_{\mathfrak{a}}$.

Umgekehrter Hauptbruch $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{a_1, a_2, \cdots a_n}{b_1, b_2, \cdots b_n}$, wo $b_1, b_2, \cdots b_n$ gegenſeitig frei.

38. Wenn $Qa_1 = Q_1 a_1, \cdots Qa_n = Q_1 a_n$ und $x = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n$ ſo ist $Qx = Q_1 x$.

39. $\beta \dfrac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} + \gamma \dfrac{c_1, c_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} = \dfrac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \cdots)}{a_1}, \dfrac{(\beta b_2 + \gamma c_2 + \cdots)}{a_2}, \dfrac{\cdots}{\cdots}$.

40. $\dfrac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} = \dfrac{S^1\alpha_{\mathfrak{a}} b_{\mathfrak{a}}, S^2\alpha_{\mathfrak{a}} b_{\mathfrak{a}} \cdots}{S^1\alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}}, S^2\alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}}, \cdots}$ wo ${}^{\mathfrak{b}}\alpha_{\mathfrak{a}}$ Zahlen und $S^{\mathfrak{b}}\alpha_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}}$ gegenſeitig frei.

41. $\dfrac{S^1\alpha_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}}{e_1}, \dfrac{S^2\alpha_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}}{e_2}, \dfrac{\cdots}{\cdots} = S^{\mathfrak{b}}\alpha_{\mathfrak{a}}{}^{\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a}}$, wo ${}^{\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a}} = \dfrac{{}^1e_{\mathfrak{b}}, {}^2e_{\mathfrak{b}}, \cdots}{{}^1e_{\mathfrak{a}}, {}^2e_{\mathfrak{a}}, \cdots}$ und ${}^{\mathfrak{b}}E_{\mathfrak{a}}$ gegenſeitig frei.

42. $\dfrac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} = \overset{n}{[}l\overline{a_1}]b_1 + \overset{n}{[}xl\overline{a_2}]b_2 + \cdots$ wenn $a_1, \cdots a_n$ einfacher Normverein.

5. Die Höhenwerte und die Hauptzahlen der Hauptbrüche.

43. Höhenwert $[Q^n] = \overset{n}{[}b_1 b_2 \cdots b_n]$ wo $Q = \dfrac{b_1, b_2, \cdots b_n}{e_1, e_2, \cdots e_n}$, wo $e_1, e_2, \cdots e_n$ die urſprüngliche Einheit.

44. $[Q^n] = \dfrac{\overset{n}{[}b_1 b_2 \cdots b_n]}{\overset{n}{[}a_1 a_2 \cdots a_n]}$ wenn $Q = \dfrac{b_1, b_2, \cdots b_n}{a_1, a_2, \cdots a_n}$.

45. Wenn $Q = \alpha Q_1$ ſo ist $[Q^n] = \alpha^n [Q_1{}^n]$.

46. Wenn $a_{m+b} = {}_{b}\alpha_1 a_1 + {}_{b}\alpha_2 a_2 + \cdots {}_{b}\alpha_m a_m$ und $c_{m+b} = {}_{b}\alpha_1 e_1 + {}_{b}\alpha_2 e_2 + \cdots {}_{b}\alpha_m e_m - e_{m+b} = \frac{e_1, e_2, \cdots e_m}{a_1, a_2, \cdots a_m} a_{m+b} - e_{m+b}$ ist, ſo ist
$$Q = \frac{a_1, a_2, \cdots a_m, \ 0, \ 0, \ \cdots \ 0}{e_1, e_2, \cdots e_m, \ e_{m+1}, \ e_{m+2}, \cdots e_{m+b}}.$$
47. Hauptzahl des Hauptbruches Q ist ϱ, wenn $Q = \varrho x$, wo $x \gtrless 0$ erster Klasse.
48. Der Hauptbruch Q der n Nenner $e_1, \cdots e_n$ hat n Hauptzahlen $\varrho_1, \cdots \varrho_n$, welche die Wurzeln der Gleichung $\alpha_0 \varrho^n - \alpha_1 \varrho^{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha_n = 0$, wo $\alpha_a = {}^{p}[Qe_1 Qe_2 \cdots Qe_n \, e_{a+1} \cdots e_n][Q^n] = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n$.
49. Wenn $\varrho, \cdots \varrho_n$ alle ungleich, ſo ſind die n Hauptgebiete alle erster Stufe und stehen in keiner Zahlenbeziehung.
50. Wenn $\varrho_1, \cdots \varrho_a = \alpha$, ſo ist $(\varrho - \alpha)^a [a_1 a_2 \cdots a_a c_{a+1} \cdots c_n]$ wo $c_{a+b} = (\varrho - Q) e_{a+b}$ für jeden Zeiger b.
51. Wenn $\varrho_1, \cdots \varrho_a = \alpha$ ſo $Qp = \alpha p + q$ wo p eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_b$, q eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_{b-1}$ ist.
52. Wenn $\varrho_1, \cdots \varrho_a = \alpha$, $\varrho_{a+1}, \cdots \varrho_{a+b} = \beta, \cdots$ wo $\alpha \gtrless \beta \gtrless \cdots$, ſo kann man n gegenſeitig freie Grösen $a_1, a_2, \cdots a_a$, $b_1, \cdots b_b, \cdots$ angeben der Art, dass $Qp = \beta p + q$ wo p eine Vielfachenſumme der ersten, m, q eine Vielfachenſumme der m — ten dieſer Grösen ist.

53. Wenn in Q für beliebige Grösen erster Klasse a und $b \gtrless 0 \, {}^{p}[Qa\bar{a}] \gtrless 0$ und ${}^{p}[Qa\bar{b}] = {}^{p}[Qb\bar{a}]$, ſo lassen ſich n gegenſeitig freie Grösen erster Klasse $c_1, \cdots c_n$ finden, für welche ${}^{p}[Qc_a \bar{c}_b] = 0$ wo $a \gtrless b$. Dann ſind alle Hauptzahlen von Q reell, und ſo viele Plus als ${}^{p}[Qc_a \bar{c}_a]$ Plus und giebt es dann n normige Grösen $e_1, \cdots e_n$ für die $Qe_a = \varrho_a e_a$, wo $[e_a \bar{e}_b] = 0$.

6. Die verwandten Vereine.

54. Verwandt ſind die Vereine $a, b, \cdots$ und $a_1, b_1, \cdots$ wenn dem $p = \alpha a + \beta b + \cdots$ stets $p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$ entspricht.
55. In zwei verwandten Vereinen nter Stufe kann man n gegenſeitig freien Grösen des einen, n beliebige gegenſeitig freie des andern entsprechend ſetzen und ist dann für jede Gröse des einen, die entsprechende des andern bestimmt.
56. Von zwei verwandten Vereinen nter Stufe kann man im einen jede beliebige $n + 1$ Grösen $a_1, \cdots a_n$, b, von denen n $a_1, \cdots a_n$ gegenſeitig frei ſind, ſetzen und im andern $n + 1$ entsprechende Grösen $\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_n a_n$, βb ſetzen, dann ist jede des andern bestimmt, wenn noch ϱ als Vorzahl für alle bestimmt ist.
57. Aus zwei verwandten Vereinen $a, b, \cdots$ und $a_1, b_1, \cdots$ kann man die linigen Zeuge $P(a, b, \cdots)$ und $P(a_1, b_1, \cdots) \cdot \cdot$ entsprechend ſetzen und ſind auch die dadurch erhaltenen Vereine einander verwandt.

JUN 9 1968